

**Б. Г. ВОЛОДИН, М. П. ГАНИН, И. Я. ДИНЕР, Л. Б.
КОМАРОВ, А. А. СВЕШНИКОВ, К. Б. СТАРОБИН**

**СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
СТАТИСТИКЕ И ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ**

**Под общей редакцией
заслуженного деятеля науки и техники РСФСР,
доктора технических наук профессора А. А.
СВЕШНИКОВА**

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Глава I. Случайные события.

- §1. Соотношения между случайными событиями
- §2. Непосредственный подсчет вероятностей
- §3. Геометрические вероятности
- §4. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей
- §5. Теорема сложения вероятностей
- §6. Формула полной вероятности
- §7. Вычисление вероятностей гипотез после испытания (формула Байеса)
- §8. Вычисление вероятностей появления события при повторных независимых испытаниях
- §9. Полиномиальное распределение. Рекуррентные формулы. Производящие функции

Глава II. Случайные величины

- §10. Ряд, многоугольник и функция распределения вероятностей дискретных случайных величин
- §11. Функция распределения и плотность вероятности непрерывной случайной величины
- §12. Числовые характеристики дискретных случайных величин
- §13. Числовые характеристики непрерывных случайных величин
- §14. Закон Пуассона
- §15. Закон нормального распределения
- §16. Характеристические функции
- §17. Вычисление полной вероятности и условной плотности вероятности после опыта для гипотез, являющихся возможными значениями непрерывных случайных величин

Глава III. Системы случайных величин

- §18. Законы распределения и числовые характеристики систем случайных величин
- §19. Закон нормального распределения на плоскости и в пространстве. Многомерное нормальное распределение
- §20. Законы распределения подсистем непрерывных случайных величин и условные законы распределения

Глава IV. Числовые характеристики и законы распределения функций случайных величин

- §21. Числовые характеристики функций случайных величин
- §22. Законы распределения функций случайных величин
- §23. Характеристические функции систем и функций случайных величин
- §24. Композиция законов распределения
- §25. Линеаризация функций случайных величин
- §26. Композиция двумерных и трехмерных нормальных законов распределения с использованием понятия векториальных отклонений

Глава V. Энтропия и информация

- §27. Энтропия случайных событий и величин
- §28. Количество информации

Глава VI. Предельные теоремы

- §29. Закон больших чисел
- §30. Теоремы Муавра-Лапласа и Ляпунова

Глава VII. Корреляционная теория случайных функций

- §31. Общие свойства корреляционных функций и законов распределения случайных функций
- §32. Линейные операции над случайными функциями
- §33. Задачи о выбросах
- §34. Спектральное разложение стационарных случайных функций
- §35. Вычисление вероятностных характеристик случайных функций на выходе динамических систем
- § 36. Оптимальные динамические системы
- § 37. Метод огибающих

Глава VIII. Марковские процессы

- § 38. Цепи Маркова
- § 39. Марковские процессы с дискретным числом состояний
- § 40. Непрерывные марковские процессы

Глава IX. Методы обработки результатов наблюдений

- §41. Определение моментов случайных величин по результатам опытов
- §42. Доверительные вероятности и доверительные интервалы
- §43. Критерии согласия
- §44. Обработка результатов наблюдений по способу наименьших квадратов
- §45. Статистические методы контроля качества
- §46. Определение вероятностных характеристик случайных функций по опытными данным

Ответы и решения

Используемые таблицы со ссылками на литературу

Литература

ГЛАВА I СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

§ 1. Соотношения между случайными событиями

Основные формулы

Случайные события обозначаются латинскими буквами A, B, C, \dots, U, V , причем U —достоверное, а V —невозможное события. Равенство $A = B$ означает, что появление одного из этих событий влечет за собой появление другого. Произведение событий A и B есть событие $C = AB$, состоящее в наступлении обоих событий A и B . Сумма событий A и B есть событие $C = A+B$, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A и B . Разность событий A и B есть событие $C = A-B$, состоящее в том, что A происходит, а B не происходит. Противоположное событие обозначается той же буквой, но с чертой сверху. Например, A и \bar{A} — противоположные события, причем \bar{A} означает, что A не происходит. События A и B несовместны, если $AB=V$. События A_k ($k=1, 2, \dots, n$) образуют полную группу, если в результате опыта обязательно должно произойти я хотя бы одно из них;

при этом $\sum_{k=1}^n A_k = U$.

Решение типовых примеров

Пример 1.1. При каких событиях A и B возможно равенство $A+B = A$?

Решение. Сумма $A+B$ представляет собой событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A и B . Если $A+B = A$, то событие A включает в себя событие B . Например, если событие A — попадание в область S_A , а B — в S_B , то область S_B расположена в S_A .

Аналогично решаются задачи 1.1—1.3 и 1.8.

Пример 1.2. Из таблицы случайных чисел наугад выбраны два числа. События A и B соответственно означают, что выбрано хотя бы одно простое и хотя бы одно четное число. Что означают события AB и $A+B$?

Решение. Событие AB означает наступление событий A и B , т. е. из двух выбранных чисел одно простое, а другое четное. Событие $A+B$ означает наступление хотя бы одного из событий A и B , т. е. среди двух выбранных чисел имеется хотя бы одно простое или хотя бы одно четное число или одно из этих чисел простое, другое четное.

Аналогично решаются задачи 1.4—1.7.

Пример 1.3. Доказать, что $\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$ и $\overline{C+D} = \bar{C}\bar{D}$.

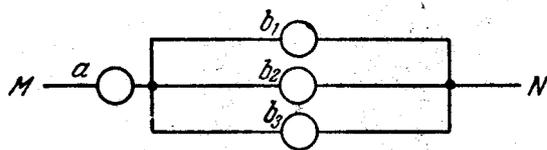
Доказательство. Если положить $C = \bar{A}$ и $D = \bar{B}$, то второе равенство записывается в виде $\overline{A+B} = \bar{A}\bar{B}$.

т. е. $A+B = \overline{\bar{A}\bar{B}}$. Поэтому достаточно доказать справедливость только первого равенства.

Событие $\bar{A}\bar{B}$ означает не появление событий A и B . Про-

тивоположное событие $\overline{\overline{AB}}$ означает что хотя бы одно из событий A или B имеет место, а это сумма событий $A + B$.

Поэтому $\overline{\overline{AB}} = A + B$. Доказательство этого равенства можно



также произвести геометрически, связав каждое событие с попаданием точки в соответствующую область.

Аналогично решается задача 1.9. Доказанные в примере 1.3 равенства используются при решении задач 1.10—1.14.

Пример 1.4. Электрическая цепь между точками M и N составлена по схеме, приведенной на рис. 1. Выход из строя элемента a —событие A , элемента b_k —событие B_k ($k = 1, 2, 3$).

Записать выражения для событий C и \overline{C} , если C означает разрыв цепи.

Решение. Разрыв цепи произойдет в том случае, если выйдет из строя элемент a или все три элемента B_k ($k = 1, 2, 3$). Эти события соответственно равны A и $B_1B_2B_3$. Поэтому $C = A + B_1B_2B_3$.

Используя равенства из примера 1.3, находим

$$\overline{C} = \overline{A + B_1B_2B_3} = \overline{AB_1B_2B_3} = \overline{A}(\overline{B_1} + \overline{B_2} + \overline{B_3})$$

Аналогично решаются задачи 1.16—1.18.

Задачи

1.1. Что означают события $A+A$ и AA ?

1.2. Когда возможно равенство $AB=A$?

1.3. Мишень состоит из десяти кругов. Ограниченных концентрическими окружностями с радиусами r_k ($k=1, 2, \dots, 10$), причем $r_1 < r_2 < \dots < r_{10}$. Событие A_k попадание в круг радиуса r_k ($k=1, 2, \dots, 10$). Что означают события

$$B = \sum_{k=1}^6 A_k, \quad C = \prod_{k=5}^{10} A_k?$$

1.4. События: A — хотя бы один из трех проверяемых приборов бракованный, B — все приборы доброкачественные. Что означают события: а) $A+B$; б) AB ?

1.5. События A , B и C означают, что взято хотя бы по одной книге из трех различных собраний сочинений, каждое из которых содержит по крайней мере три тома. События A_s и B_k означают соответственно, что из первого собрания сочинений взяты s , а из второго k томов. Что означают события: а) $A+B+C$; б) ABC ; в) A_1+B_3 , г) A_2B_2 д) $(A_1B_3 + B_1A_3)C$

1.6. Из таблицы случайных чисел наудачу взято одно число. Событие A — выбранное число делится на 5; событие B — данное число оканчивается нулем. Что означают события $A+B$ и \overline{AB} ?

1.7. Событие A —хотя бы одно из имеющихся четырех изделий бракованное, событие B —бракованных изделий среди них не менее двух. Что означают противоположные события \overline{A} и \overline{B} ??

1.8. Упростить выражение $A = (B + C)(B + \bar{C})(\bar{B} + C)$.

1.9. Когда возможны равенства: а) $A + B = \bar{A}$; б) $AB = \bar{A}$;

в) $A + B = AB$?

1.10. Найти случайное событие X из равенства

$$\overline{X + A} + \overline{X + \bar{A}} = B.$$

1.11. Доказать, что $\bar{A}B + A\bar{B} + \bar{A}\bar{B} = \bar{A}B$.

1.12. Доказать эквивалентность и справедливость дующих двух равенств:

$$\overline{\sum_{k=1}^n A_k} = \prod_{k=1}^n \bar{A}_k, \quad \overline{\prod_{k=1}^n A_k} = \sum_{k=1}^n \bar{A}_k.$$

1.13. Совместны ли события A и $\overline{A + B}$?

1.14. Доказать, что события A , $\bar{A}B$ и $\overline{A + B}$ образуют полную группу.

1.15. Два шахматиста играют одну партию. Событие A —выиграет первый игрок, B —выиграет второй игрок. Какое событие следует добавить к указанной совокупности, чтобы получилась полная группа событий?

1.16. Машинно-котельная установка, состоит из двух котлов и одной машины. Событие A —исправна машина, событие B_k ($k = 1, 2$)—исправен k -й котел. Событие C означает работоспособность машинно-котельной установки, что будет в том случае, если исправны машины и хотя бы один котел. Выразить события C и \bar{C} через A и B_k .

1.17. Судно имеет одно рулевое устройство, четыре котла и две турбины. Событие A означает исправность рулевого устройства. B_k ($k = 1, 2, 3, 4$)—исправность k -го котла, а C_j ($j = 1, 2$)—исправность j -й турбины. Событие D —судно управляемое, что будет в том случае, когда исправны рулевое устройство, хотя бы один котел и хотя бы одна турбина. Выразить события D и \bar{D} через A и B_k .

1.18. Прибор состоит из двух блоков первого типа и трех блоков второго типа. События: A_k ($k = 1, 2$) — исправен k -й блок первого типа, B_j ($j = 1, 2, 3$)—исправен j -й блок второго типа. Прибор работает, если исправны хотя бы один блок первого типа и не менее двух блоков второго типа. Выразить событие C , означающее работу прибора, через A_k и B_j .

§ 2. Непосредственный подсчет вероятностей

Основные формулы

Если результат опыта можно представить в виде полной группы событий, которые попарно несовместны и равновозможны, то вероятность события равна отношению числа m благоприятствующих этому событию исходов опыта к общему числу n всех возможных исходов, т. е., $P = \frac{m}{n}$. Под равновозможными понимаются события, которые в силу тех или других причин (например, симметрии) не имеют объективного преимущества одно перед другим.

Решение типовых примеров

Пример 2.1. Куб, все грани которого окрашены, распилен на

тысячу кубиков одинакового размера. Полученные кубики тщательно перемешаны. Определить вероятность того, что кубик, извлеченный наудачу, будет иметь две окрашенные стороны.

Решение. Всего кубиков $n = 1000$. Куб имеет 12 ребер, на каждом из которых по 8 кубиков с двумя окрашенными

сторонами. Поэтому от $m = 12 \cdot 8 = 96$, $p = \frac{m}{n} = 0,096$.

Аналогично решаются задачи 2.1—2.7.

Пример 2.2. Определить вероятность того, что последние две цифры у куба наудачу взятого целого числа N равны единице¹⁾.

Решение. Представим N в виде $N = a + 10b + \dots$, где a, b, \dots — произвольные числа, могущие принимать любые значения от 0 до 9 включительно. Тогда $N^3 = a^3 + 30a^2b + \dots$. Отсюда видно, что на две последние цифры у N^3 влияют только значения a и b . Поэтому число возможных значений $n = 100$. Так как последняя цифра у N^3 равна единице, то имеется одно

благоприятствующее значение $a = 1$. Кроме того, должна быть единичей последняя цифра $y = \frac{N^3 - 1}{10}$ т. е. должно оканчиваться на единицу произведение $3b$. Это будет только при $b = 7$. Таким образом, благоприятствующее значение единственное ($a = 1, b = 7$), поэтому $p = 0,01$.

Аналогично решаются задачи 2.8—2.11.

Пример 2.3. В партии из n изделий k бракованных. Определить вероятность того, что среди выбранных наудачу для проверки m изделий ровно l окажутся бракованными.

Решение. Число возможных способов взять m изделий из n равно C_n^m . Благоприятствующими являются случаи, когда из общего числа k бракованных изделий взято l (это можно сделать C_k^l способами), а остальные $m - l$ изделий не бракованные, т. е. они взяты из общего числа $n - k$ (число способов равно C_{n-k}^{m-l}). Поэтому число благоприятствующих случаев равно $C_k^l C_{n-k}^{m-l}$. Искомая вероятность будет
$$p = \frac{C_k^l C_{n-k}^{m-l}}{C_n^m}$$

Аналогично решаются задачи 2.12—2.20.

Пример 2.4. Из полного набора костей домино наудачу берутся пять костей. Найти вероятность того, что среди них будет хотя бы одна с шестеркой.

Решение. Найдем вероятность q противоположного события. Тогда $p = 1 - q$. Вероятность того, что все взятые пять костей не содержат шестерки (см. пример 2.3), равна

$$q = \frac{C_7^0 C_{21}^5}{C_{28}^5} \quad \text{поэтому} \quad p = 1 - \frac{C_{21}^5}{C_{28}^5} = 0,793$$

Аналогично переходом к противоположному событию решаются задачи 2.21, 2.22.

Задачи

2.1. Лотерея выпущена на общую сумму n рублей. Цена одного билета r рублей. Ценные выигрыши падают на m

билетов. Определить вероятность ценного выигрыша на один билет.

2.2. Случайно выбранная кость домино оказалась не дублем. Найти вероятность того, что вторую также взятую наудачу кость домино можно приставить к первой.

2.3. В колоде 36 карт четырех мастей. После извлечения и возвращения одной карты колода перемешивается и снова извлекается одна карта. Определить вероятность того, что обе извлеченные карты одной масти.

2.4. Буквенный замок содержит на общей оси пять дисков, каждый из которых разделен на шесть секторов с различными нанесенными на них буквами. Замок открывается только в том случае, если каждый диск занимает одно определенное положение относительно корпуса замка. Определить вероятность открытия замка, если установлена произвольная комбинация букв.

2.5. Черный и белый короли находятся соответственно на первой и третьей горизонталях шахматной доски. На одно из незанятых полей первой или второй горизонтали • наудачу ставится ферзь. Определить вероятность того, что образовавшаяся позиция матовая для черного короля, если положения королей равновозможны на любых полях указанных горизонталей.

2.6. В кошельке лежат три монеты достоинством по 20 коп. и семь монет по 3 коп. Наудачу берется одна монета, а затем извлекается вторая монета, оказавшаяся монетой в 20 коп. Определить вероятность того, что и первая извлеченная монета имеет достоинство в 20 коп.

2.7. Из партии деталей, среди которых n доброкачественных и m бракованных, для контроля наудачу взято s штук. При контроле оказалось, что первые k из s деталей доброкачественны. Определить вероятность того, что следующая деталь будет доброкачественной.

2.8. Определить вероятность того, что выбранное наудачу целое число N при а) возведении в квадрат; б) возведении в четвертую степень; в) умножении на произвольное целое число даст число, оканчивающееся единицей.

2.9. На десяти одинаковых карточках написаны различные числа от нуля до девяти. Определить вероятность того, что наудачу образованное с помощью данных карточек а) двузначное число делится на 18; б) трехзначное число делится на 36.

2.10. Определить вероятность того, что серия наудачу выбранной облигации не содержит одинаковых цифр, если номер серии может быть любым пятизначным числом, начиная с 00001.

2.11. Десять книг на одной полке расставляются наудачу, Определить вероятность того, что при этом три определенные книги окажутся поставленными рядом.

2.12. На восьми одинаковых карточках написаны соответственно числа 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12. и 13. Наугад берутся две карточки. Определить вероятность того, что образованная из двух полученных чисел дробь сократима.

2.13. Имеется пять отрезков, длины которых равны; соответственно 1, 3, 5, 7 и 9 единицам. Определить вероятность того, что с помощью взятых наудачу трех отрезков из данных

пяти можно построить треугольник.

2.14. Из десяти билетов выигрышными являются два.

Определить вероятность того, что среди взятых наудачу пяти билетов: а) один выигрышный; б) оба выигрышных; в) хотя бы один выигрышный.

2.16. Обобщение задачи 2.14. Имеются $n + m$ билетов, из которых n выигрышных. Одновременно приобретаются k билетов. Определить вероятность того, что среди них s выигрышных.

2.16. В генуэзской лотерее разыгрываются девяносто номеров, из которых выигрывают пять. По условию можно ставить ту или иную сумму на любой из девяноста номеров или на любую совокупность двух, трех, четырех или пяти номеров. Какова вероятность выигрыша в каждом из указанных пяти случаев?

2.17. Для уменьшения общего количества игр $2n$ команд спортсменов разбиты на две подгруппы. Определить, вероятность того, что две наиболее сильные команды окажутся. а) в разных подгруппах; б) в одной подгруппе.

2.18. В зале, насчитывающем $n+k$ мест, случайным образом занимают места n человек. Определить вероятность того, что будут заняты определенные m [n мест.

2.19. Из колоды карт (52 карты) наугад извлекаются три карты. Найти вероятность того, что это будут тройка, семерка и туз.

2.20. Из колоды в 36 карт наудачу извлекаются три карты.

Определить вероятность того, что сумма очков этих карт равна 21, если валет составляет два очка, дама - три, король - четыре, туз - одиннадцать, а остальные карты - соответственно шесть, семь, восемь, девять и десять очков.

2.21. Имеются пять билетов стоимостью по одному рублю три билета по три рубля и два билета по пяти рублей. Наугад берутся три билета. Определить вероятность того, что: а) хотя бы два из этих билетов имеют одинаковую стоимость; б) все три билета стоят семь рублей.

2.22. Очередь в кассу, где производится продажа билетов по 5 коп, состоит из $2n$ человек. Какова вероятность того, что ни одному из покупателей не придется ждать сдачи, если перед продажей билета первому покупателю из очереди у кассира было только $2m$ пятаков, а получение платы за каждый билет равновозможно как пятаком, так и гривенником?

§ 3. Геометрические вероятности

Основные формулы

Геометрическое определение вероятности может быть использовано в том случае, когда вероятность попадания в любую часть области пропорциональна мере этой части (длине, площади, объему и т. д.) и не зависит от ее расположения и формы.

Если геометрическая мера всей области равна S , а геометрическая мера части этой области, попадание в которую благоприятствует данному событию, есть S_B , то вероятность события равна

$$p = \frac{S_B}{S}.$$

Области могут иметь любое число измерений.

Решение типовых примеров

Пример 3.1. На горизонтальной плоскости вдоль прямой AB через интервал l расположены оси одинаковых вертикальных Цилиндров с радиусом основания r . Под углом q к прямой бросается шар радиуса R . Определить вероятность столкновения шара с цилиндром, если пересечение линии движения центра шара с прямой AB равновозможно. в любой точке¹).

Решение. Пусть x — расстояние от центра шара до ближайшей линии, проходящей через центр цилиндра параллельно направлению перемещения центра шара: Возможные значения x определяются условиями (рис. 2)

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2} l \sin q.$$

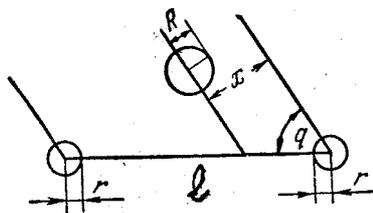


Рис. 2.

Столкновение шара с цилиндром произойдет в том случае, если

$$0 \leq x \leq R + r.$$

Искомая вероятность равна отношению длин отрезков, на которых находятся благоприятствующие и все возможные значения x . Поэтому

$$p = \begin{cases} \frac{2(R+r)}{l \sin q} & \text{при } R+r \leq \frac{l}{2} \sin q; \\ 1 & \text{при } R+r \geq \frac{l}{2} \sin q. \end{cases}$$

Аналогично решаются задачи 3.1 - 3.4 и 3.24. Пример 3.2. На одной дорожке магнитофонной ленты длиной 200 м записано сообщение на интервале 20 м, на второй - записано аналогичное сообщение. Определить вероятность того, что в интервале от 60 до 85 м не будет промежутка ленты, не содержащего записи, если начала обоих сообщений равновозможны в любой точке от 0 до 180 м.

Решение. Пусть x и y - координаты начала записей, причем $x > y$. Так как $0 < x < 180$; $0 < y < 180$ и x / y , то область возможных значений x и y является треугольник с катетами по 180 м. Площадь этого треугольника

$S = \frac{1}{2} \cdot 180^2 \text{ м}^2$. Найдем область значений x и y , благоприятствующих указанному событию. Для того чтобы получилась непрерывная запись, необходимо выполнение неравенства $x - y \leq 20$ м. Чтобы интервал записи был не менее 25 м, должно быть $x - y \geq 5$ м. Кроме того, для получения непрерывной записи на интервале от 60 до 85 м должно быть

$$45 \text{ м} < y < 60 \text{ м} \quad 65 \text{ м} < x < 80 \text{ м}.$$

Проведя границы указанных областей, получим, что благоприятствующие значения x и y заключены в треугольнике, площадь которого $S_B = \frac{1}{2} 15^2 \text{ м}^2$ (рис. 3). Искомая вероятность равна отношению площади S_B , попадание в которую благоприятствует данному событию, к площади области S возможных значений x и y , т. е.

$$p = \left(\frac{15}{180} \right)^2 = \frac{1}{144}$$

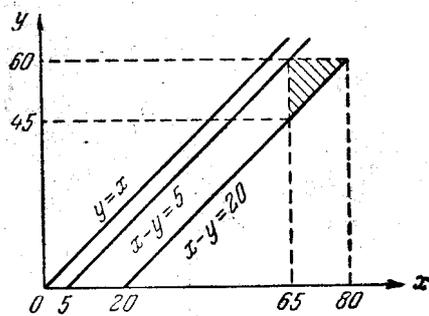


Рис. 3.

Аналогично решаются задачи 3.5—3.15.

Пример 3.3. В любые моменты времени промежутка T равновозможны поступления в приемник двух сигналов.

Рис. 4.

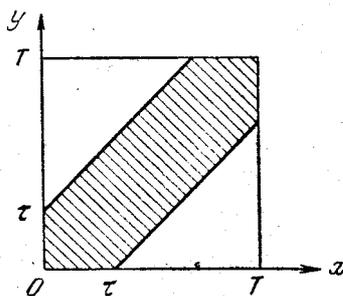


Рис. 4.

Приемник будет забит, если разность между моментами поступления сигналов будет меньше τ . Определить вероятность того, что приемник будет забит.

Решение. Пусть x и y — моменты поступления сигналов в приемник.

Областью возможных значений x , y является квадрат площадью T^2 (рис. 4).

Приемник будет забит, если $|x - y| \leq \tau$. Данная область лежит между прямыми $x - y = \tau$ и $x - y = -\tau$. Ее площадь

$$S_B = S - (T - \tau)^2,$$

поэтому

$$p = 1 - \left(1 - \frac{2}{9}\right)^2.$$

Аналогично решаются задачи 3.16—3.19. Пример 3.4. Какова вероятность того, что сумма двух наугад взятых положительных чисел, каждое из которых не больше единицы, не превзойдет единицы, а их произведение будет не больше $2/9$?

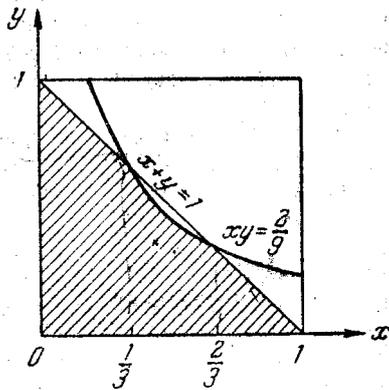


Рис. 5.

Решение. Пусть x и y —взятые числа. Их возможные значения $0 \leq x \leq 1$; $0 \leq y \leq 1$, что на плоскости соответствует квадрату с площадью $S=1$. Благоприятствующие значения x удовлетворяют условиям: $x + y \leq 1$ и $xy \leq 2/9$. Граница $x+y=1$ делит квадрат пополам, причем область $x + y \leq 1$ представляет собой нижний треугольник (рис, 5). Вторая граница $xy = 2/9$ является гиперболой. Абсциссы точек пересечения этих границ: $x_1 = 1/3$ и $x_2 = 2/3$. Величина благоприятствующей площади

$$S_B = \frac{1}{3} + \int_{1/3}^{2/3} y dx = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} \int_{1/3}^{2/3} \frac{dx}{x} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} \ln 2.$$

Искомая вероятность $p = \frac{S_B}{S} = 0,487$.

Аналогично решаются задачи 3.20—3.23.

Задачи

3.1. В точке C , положение которой на телефонной линии AB длины L , равномерно, произошел разрыв. Определить вероятность того, что точка C удалена от точки A на расстояние, не меньшее l .

3.2. На плоскости проведены параллельные линии, расстояния между которыми попеременно равны 1,5 и 8 см. Определить вероятность того, что наудачу брошенный на эту плоскость круг радиуса 2,5 см не будет пересечен ни одной линией.

3.3. В круге радиуса R проводятся хорды параллельно заданному направлению. Какова вероятность того, что длина наугад взятой хорды не более R , если равновозможны любые положения точек пересечения хорды с диаметром, перпендикулярным выбранному направлению?

3.4. Перед вращающимся с постоянной скоростью диском находится отрезок длиной $2h$, расположенный в плоскости диска таким образом, что прямая, соединяющая середину отрезка с центром диска, перпендикулярна отрезку. По касательной к окружности в произвольный момент времени слетает частица. Определить вероятность попадания этой частицы на отрезок, если расстояние между отрезком и центром диска равно l .

I 3.5. Прямоугольная решетка состоит из цилиндрических прутьев радиуса r . Расстояния между осями прутьев равны соответственно a и b . Определить вероятность попадания шариком диаметра d в решетку при одном бросании без прицеливания, если траектория полета шарика перпендикулярна плоскости решетки.

3.6. В средней части эллипса с полуосями $a=100$ см и $b=10$ см симметрично расположен прямоугольник со сторонами 10 и 3 см, большая сторона которого параллельна a . Кроме того, проведены не пересекающиеся с эллипсом, прямоугольником и между собой четыре окружности, диаметр каждой из которых равен 4,3 см.

Определить вероятность того, что:

а) случайная точка, положение которой равномерно внутри эллипса, окажется внутри одного из кругов;

б) окружность радиуса 5 см, построенная вокруг этой точки как около центра, пересечется хотя бы с одной стороной прямоугольника.

3.7. Начерчены пять концентрических окружностей, радиусы которых равны соответственно kr ($k=1, 2, 3, 4, 5$). Круг радиуса r и два кольца с внешними радиусами $3r$ и $5r$ заштрихованы. В круге радиуса $5r$ наудачу выбрана точка. Определить

вероятность попадания этой точки:

а) в круг радиуса $2r$; б) в заштрихованную область.

3.8. Лодка перевозит груз с одного берега пролива на другой, пересекая пролив за один час. Какова вероятность того, что идущее вдоль пролива судно будет замечено, если с лодки обнаруживают судно в случае, когда пересекают его курс не ранее, чем за 20 мин. до пересечения судном курса лодки, и не позднее, чем через 20 мин. после пересечения судном курса лодки? Любой момент и любое место пересечения судном курса лодки равновозможны.

3.9. На отрезке длиной l наудачу выбраны две точки. Какова вероятность, что расстояние между ними меньше kl , где $0 < k < 1$?

3.10. На отрезке AB длиной l наудачу поставлены две точки L и M . Найти вероятность того, что точка L будет ближе к точке M , чем к точке A .

3.11. На отрезке длиной l наудачу ставятся две точки, в результате чего этот отрезок оказывается разделенным на три части. Определить вероятность того, что из трех получившихся частей отрезка можно построить треугольник.

3.12. На окружности радиуса R наудачу поставлены три точки A, B, C . Какова вероятность, что треугольник ABC остроугольный ?

3.13. Какова вероятность, что из трех взятых наудачу отрезков длины не более l можно построить треугольник?

3.14. На отрезке AB длиной l наудачу поставлены две точки M и N . Определить вероятность того, что длины каждого из трех получившихся отрезков не превосходят заданной величины

$$a \left(l \geq a \geq \frac{l}{3} \right).$$

3.15. К автобусной остановке через каждые четыре минуты подходит автобус линии A и через каждые шесть минут — автобус линии B . Интервал времени между моментами прихода автобуса линии A и ближайшего следующего автобуса линии B равновозможен в пределах от нуля до четырех минут.

Определить вероятность того, что: а) первый подошедший автобус окажется автобусом линии A ; б) автобус какой-либо линии подойдет в течение двух минут.

3.16. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих пароходов независимо и равновозможно в течение данных суток. Определить вероятность того, что одному из пароходов придется ожидать освобождения причала, если время стоянки первого парохода один час, а второго — два часа.

3.17. Два лица имеют одинаковую вероятность прийти к указанному месту в любой момент промежутка времени T . Определить вероятность того, что время ожидания одним другого будет не больше t .

3.18. Два судна в тумане: одно идет вдоль пролива шириной L , а другое курсирует без остановок поперек этого пролива. Скорости движения судов соответственно равны v_1 и v_2 . Второе судно подает звуковые сигналы, которые слышны на расстоянии $d < L$. Определить вероятность того, что на первом судне услышат сигналы, если пересечение курсов судов равновозможно в любом месте пролива.

3.19. Стержень длиной $l=200$ мм наудачу ломается на части. Определить вероятность того, что хотя бы одна часть стержня

между точками излома будет не более 10 мм, если точек излома а) две, б) три, причем излом стержня равновозможен в любом месте.

3.20. На поверхности сферы радиуса R произвольно выбираются две точки. Какова вероятность, что проходящая через них дуга большого круга стягивает угол, меньший α ($\alpha < \pi$)?

3.21. Спутник Земли движется по орбите, которая заключена между 60° северной и 60° южной широты. Считая падение спутника в любую точку поверхности Земли между указанными параллелями равновозможным, найти вероятность того, что спутник упадет выше 30° северной широты.

3.22. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии L . Найти вероятность того, что наудачу брошенная игла длиной l ($l < L$) пересечет какую-нибудь прямую (задача Бюффона).

8.23. Определить вероятность того, что корни а) квадратного $x^2 + 2ax + b = 0$, б) кубического $x^3 + 3ax + 2b = 0$ уравнений вещественны, если равновозможны значения коэффициентов в прямоугольнике $|a| \in [n, |b| \in [m$. Какова вероятность, что при указанных условиях корни квадратного уравнения будут положительными?

8.24. На плоскости независимо друг от друга прямолинейно перемещаются точка A и центр B круга радиуса R . Скорости этих точек постоянны и равны соответственно u и v . В фиксированный момент времени расстояние $AB = r$ ($r > R$), а угол между линией AB и вектором v равен β . Считая все направления движения точки A равновозможными, определить вероятность попадания точки A в круг.

§ 4. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей

Основные формулы

Условной вероятностью $P(A|B)$ события A называется вероятность появления этого события, вычисленная в предположении, что имело место событие B . События A и B независимы, если $P(A|B) = P(A)$. Вероятность произведения двух событий определяется по формуле

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B), \text{ которая}$$

обобщается на произведение n событий:

$$P\left(\prod_{k=1}^n A_k\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \dots P\left(A_n \middle| \prod_{k=1}^{n-1} A_k\right)$$

События A_1, A_2, \dots, A_n независимые, если для любого m ($m=2, 3, \dots, n$) и любых k_j ($j=1, 2, \dots, m$), $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m \leq n$

$$P\left(\prod_{j=1}^m A_{k_j}\right) = \prod_{j=1}^m P(A_{k_j}).$$

Решение типовых примеров

Пример 4.1. Разрыв электрической цепи происходит в том случае, когда выходит из строя хотя бы один из трех последовательно соединенных элементов. Определить вероят-

ность того, что не будет разрыва цепи, если элементы выходят из строя соответственно с вероятностями 0,3; 0,4 и 0,6. Как изменится искомая вероятность, если первый элемент не выходит из строя?

Решение. Искомая вероятность равна вероятности того, что не выйдут из строя все три элемента. Пусть событие A_k означает, что k -й элемент не выйдет из строя ($k=1, 2, 3$). Тогда $p = P(A_1 A_2 A_3)$. Так как события независимы, то $p = P(A_1) P(A_2) P(A_3) = 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 0,168$. Если первый элемент не выходит из строя, то $p = P(A_2 A_3) = 0,24$.

Аналогично решаются задачи 4.1—4.10.

Пример 4.2. Определить вероятность того, что выбранное наудачу изделие является первосортным, если известно, что 4% всей продукции являются браком, а 75% небракованных изделий удовлетворяют требованиям первого сорта.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что выбранное изделие небракованное, а событие B —выбранное изделие первосортное.

Дано; $P(A) = 1 - 0,04 = 0,96$, $P(B|A) = 0,75$.

Искомая вероятность $p = P(AB) = 0,96 \cdot 0,75 = 0,72$.

Аналогично решаются задачи 4.11—4.19.

Пример 4.3. Партия из ста деталей подвергается выборочному контролю. Условием непригодности всей партии является наличие хотя бы одной бракованной детали среди пяти проверяемых. Какова вероятность для данной партии быть принятой, если она содержит 5% неисправных деталей?

Решение. Найдем вероятность q противоположного события, A которое заключается в том, что партия деталей будет принята. Данное событие является произведением пяти событий

$A = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$, где A_k ($k=1, 2, 3, 4, 5$) означает, что k -я проверенная деталь доброкачественная.

Вероятность события A_1 $P(A_1) = 95/100$ так как всего деталей 100, а исправных 95. После осуществления события A_1 деталей останется 99, среди которых исправных 94, по этому $P(A_2|A_1) = 94/99$. Аналогично $P(A_3|A_1 A_2) = 99/98$

$$P(A_4 | A_1 A_2 A_3) = \frac{92}{97} \quad \text{и} \quad P(A_5 | A_1 A_2 A_3 A_4) = \frac{91}{96}$$

По общей формуле находим

$$q = \frac{95}{100} \cdot \frac{94}{99} \cdot \frac{93}{98} \cdot \frac{92}{97} \cdot \frac{91}{96} = 0,77.$$

Задачи

4.1. Два стрелка, для которых вероятности попадания в мишень равны соответственно 0,7 и 0,8, производят по одному выстрелу. Определить вероятность хотя бы одного попадания в мишень.

4.2. Вероятность выхода из строя k -го блока вычислительной машины за время T равна p_k ($k=1, 2, \dots, n$). Определить вероятность выхода из строя за указанный промежуток времени хотя бы одного из n блоков этой машины, если работа всех блоков взаимно независима.

4.3. Вероятность наступления события в каждом опыте одинакова и равна 0,2. опыты производятся последовательно до наступления события. Определить вероятность того, что придется производить четвертый опыт.

4.4. Вероятность того, что изготовленная на первом станке деталь будет первосортной, равна 0,7. При изготовлении такой же детали на втором станке эта вероятность равна 0,8. На первом станке изготовлены две детали, на втором три. Найти вероятность того, что все детали первосортные.

4.5. Разрыв электрической цепи может произойти вследствие выхода из строя элемента K или двух элементов K_1 и K_2 , которые выходят из строя независимо друг от друга соответственно с вероятностями 0,3; 0,2 и 0,2. Определить вероятность разрыва электрической цепи.

4.6. Работа прибора прекратилась вследствие выхода из строя одной лампы из общего числа N . Отыскание этой лампы производится путем поочередной замены каждой лампы новой. Определить вероятность того, что придется проверять n ламп, если вероятность выхода из строя каждой лампы равна p .

4.7. Сколько нужно взять чисел из таблицы случайных чисел, чтобы с вероятностью не менее 0,9 быть уверенным, что среди них хотя бы одно число четное?

4.8. Вероятность того, что в результате четырех независимых опытов событие A произойдет хотя бы один раз, равна половине. Определить вероятность появления события при одном опыте, если она во всех опытах остается неизменной.

4.9. В круг радиуса R вписан равносторонний треугольник. Какова вероятность того, что четыре наугад поставленные в данном круге точки окажутся внутри треугольника?

4.10. Определить вероятность того, что написанная наудачу простая дробь несократима (задача Чебышева).

4.11. События A и B несовместны, $P(A) \neq 0$ и $P(B) \neq 0$. Зависимы ли данные события?

4.12. Вероятность того, что в электрической цепи напряжение превысит номинальное значение, равна p_1 . При повышенном напряжении вероятность аварии прибора — потребителя электрического тока равна p_2 . Определить вероятность аварии прибора вследствие повышения напряжения.

4.13. На участке AB для мотоциклиста-гонщика имеются

12 препятствий, вероятность остановки на каждом из которых равна 0,1. Вероятность того, что от пункта B до конечного пункта C мотоциклист проедет без остановки, равна 0,7. Определить вероятность того, что на участке AC не будет ни одной остановки.

4.14. Три игрока играют на следующих условиях. Сначала против первого последовательно ходят второй и третий игроки. При этом первый игрок не выигрывает, а вероятности выигрыша для второго и третьего игроков одинаковы и равны 0,3. Если первый игрок не проигрывает, то он делает по одному ходу против второго и третьего игроков и, выигрывает у каждого из них с вероятностью 0,4. После этого игра заканчивается. Определить вероятность того, что в результате такой игры первый игрок выиграет хотя бы у одного партнера.

4.15. Вероятность попадания в первую мишень для данного стрелка равна $2/3$. Если при первом выстреле зафиксировано попадание, то стрелок получает право на второй выстрел по другой мишени. Вероятность поражения, обеих мишеней при двух выстрелах равна 0,5. Определить вероятность поражения второй мишени.

4.16. Детали могут быть изготовлены с применением двух технологий: в первом случае деталь проходит три технические операции, вероятности получения брака при каждой из которых равны соответственно 0,1, 0,2 и 0,3. Во втором случае имеются две операции, вероятности получения брака при которых одинаковы и равны 0,3. Определить, какая технология обеспечивает большую вероятность получения первосортной продукции, если в первом случае для доброкачественной детали вероятность получения продукции первого сорта равна 0,9, а во втором 0,8.

4.17. Вероятности того, что любая деталь окажется бракованной в результате механической и термической обработки, равны соответственно p_1 и p_2 . Вероятности того, что брак является неустранимым, соответственно равны p_3 и p_4 .

Определить: а) какое количество деталей необходимо взять после механической обработки, чтобы с вероятностью 0,9 можно было утверждать, что хотя бы одна из них будет сдана доброкачественной в термическую обработку с учетом возможности устранения брака; б) вероятность того, что хотя бы одна из трех деталей будет иметь неустранимый брак после прохождения сначала механической, а затем термической обработки.

4.18. Показать, что если условная вероятность $P(A|B)$ больше безусловной вероятности $P(A)$, то и условная вероятность $P(B|A)$ больше безусловной вероятности $P(B)$.

4.19. Мишень состоит из двух концентрических кругов с радиусами k_r и n_r , где $k < n$. Считая равновероятным попадание в любую часть круга радиуса nr , определить вероятность того, что при двух выстрелах будет одно попадание в круг радиуса kr .

4.20. С помощью шести карточек, на которых написано по одной букве, составлено слово «карета». Карточки перемешиваются, а затем наугад извлекаются по одной. Какова вероятность, что в порядке поступления букв образуется слово

«ракета»?

4.21. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и потому набирает ее наудачу. Определить вероятность того, что ему придется звонить не более чем в три места.

Как изменится вероятность, если известно, что последняя цифра нечетная?

4.22. В лотерее n билетов, из которых m выигрышных. Какова вероятность выиграть, имея k билетов?

4.23. В лотерее из сорока тысяч билетов ценные выигрыши падают на три билета. Определить: а) вероятность получения хотя бы одного ценного выигрыша на тысячу билетов; б) сколько необходимо приобрести билетов, чтобы вероятность получения ценного выигрыша была не менее 0,5.

4.24. По займу ежегодно разыгрываются шесть основных тиражей и один дополнительный, происходящий после основного пятого. Из 100 000 серий в каждом основном тираже выигрывают 170 серий, а в каждом дополнительном—230 серий. Найти вероятность выигрыша на одну облигацию за первые десять лет: а) в каком-либо тираже; б) в дополнительном тираже; в) в основном тираже.

4.25. Имеются четыре бракованных изделия: на одном повреждена окраска, на другом имеется вмятина, на третьем — зазубрины, а на четвертом - одновременно все три указанных дефекта. Пусть A , B , C —события, заключающиеся в том, что у первого наудачу взятого изделия повреждена окраска (A), имеется вмятина (B) или имеются зазубрины (C). Являются ли данные события независимыми попарно и в совокупности?

4.26. Пусть A_1, A_2, \dots, A_n совокупность попарно независимых событий. Всегда ли условная вероятность появления любого события, вычисленная в предположении, что какие-либо другие события из этой совокупности произошли, равна безусловной вероятности этого события?

4.27. Квадрат горизонтальными линиями разделен на n одинаковых полос. В каждую из них бросается точка, положение которой равновозможно в любом месте полосы. Затем аналогично предыдущему проводят $n - 1$ вертикальных линий. Определить вероятность того, что в каждой вертикальной полосе будет только по одной точке.

4.28. В обществе из $2n$ человек одинаковое число мужчин и женщин. Места за столом занимаются наудачу. Определить вероятность того, что два лица одного пола не займут места рядом.

4.29. Общество, состоящее из пяти мужчин и десяти женщин, наудачу разбивается на пять групп по три человека. Найти вероятность того, что в каждой группе будет по одному мужчине.

4.30. В урне имеются $n+m$ одинаковых шаров, из которых n белого, а m черного цвета, причем m / n . Производятся подряд без возвращения n извлечений по два шара. Определить вероятность того, что каждый раз извлекаются пары шаров разного цвета.

4.31. В урне имеются n шаров с номерами от 1 до n . Шары

извлекаются наудачу по одному без возвращения. Какова вероятность, что при k первых извлечениях номера шаров совпадут с номерами извлечений-?

4.32. В урне имеются два шара — белый и черный. Производятся извлечения по одному шару до тех пор, пока не появится черный, причем при извлечении белого шара в урну возвращается этот шар и добавляется еще два белых шара. Определить вероятность того, что при первых пятидесяти опытах черный шар не будет извлечен.

4.33. В очереди за билетами стоимостью в 5 руб. стоят $n+m$ человек, из которых n лиц имеют деньги пятирублевого достоинства, а m ($m \leq n+1$) — десятирублевого. Каждый покупает только один билет. В кассе до продажи билетов денег нет. Какова вероятность, что никому из очереди не придется ожидать сдачи?

4.34. Условия и вопрос задачи такие же, как и в 4.33, но билет стоит один рубль, а покупатели имеют деньги рублевого (n человек) и трехрублевого достоинства (m человек), причем $2m \leq n+1$.

4.35. Баллотируются два кандидата, причем за первого в урну опущено n бюллетеней, а за второго m бюллетеней ($n > m$). Какова вероятность того, что в ходе подсчета бюллетеней число подсчитанных голосов, поданных за первого, все время будет больше числа голосов, поданных за второго?

§ 5. Теорема сложения вероятностей

Основные формулы

Вероятность суммы двух событий определяется по формуле

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

которая обобщается на сумму любого числа событий

$$P\left(\sum_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k) - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n P(A_k A_j) + \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{j=k+1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n P(A_k A_j A_i) - \dots + (-1)^{n-1} P\left(\prod_{k=1}^n A_k\right)$$

Для несовместных событий вероятность суммы событий равна сумме вероятностей этих событий, т. е.

$$P\left(\sum_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k).$$

Решение типовых примеров

Пример 5.1. Определить вероятность того, что партия из ста изделий, среди которых пять бракованных, будет принята при испытании наудачу выбранной половины всей партии, если условиями приема допускается бракованных изделий не более одного из пятидесяти.

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что при испытании не получено ни одного бракованного изделия, а через B —событие, состоящее в том, что получено только одно бракованное изделие. Искомая вероятность $p = P(A+B)$. События A и B несовместны. поэтому $p = P(A)+P(B)$.

Из 100 изделий 50 можно выбрать C_{100}^{50} способами. Из 95 небракованных изделий 50 можно выбрать C_{95}^{50} способами.

Поэтому

$$P(A) = \frac{C_{95}^{50}}{C_{100}^{50}}$$

Аналогично

$$P(B) = \frac{C_5^1 C_{95}^{49}}{C_{100}^{50}}$$

Тогда

$$p = \frac{C_{95}^{50}}{C_{100}^{50}} + \frac{C_5^1 C_{95}^{49}}{C_{100}^{50}} = \frac{47 \cdot 37}{99 \cdot 97} = 0,181$$

Аналогично решаются задачи 5.1—5.12.

Пример 5.2. Электрическая цепь между точками M и N составлена по схеме, приведенной на рис. 6. Выход из строя за время T различных элементов цепи - независимые события, имеющие следующие вероятности (табл.1).

Таблица 1

Элемент	K_1	K_2	L_1	L_2	L_3
Вероятность	0,6	0,5	0,4	0,7	0,9

Определить вероятность разрыва цепи за указанный промежуток времени.

Решение. Обозначим через $A_j(j=1,2)$ событие, состоящее в выходе из строя элемента K_j через A — выход

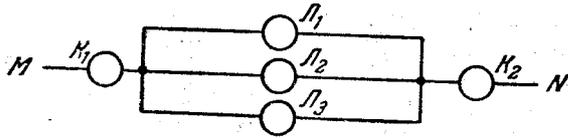


Рис. 6.

из строя хотя бы одного элемента K_j , а через B — выход из строя всех трех элементов L_i ($i=1, 2, 3$). Тогда искомая вероятность

$P = P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$. Так как $P(A) = P(L_1) + P(L_2) - P(L_1)P(L_2) = 0,8$.

$P(B) = P(L_1)P(L_2)P(L_3) = 0,252$, то $p \cong 0,85$.

Аналогично решаются задачи 5.13—5.16.

Пример 5.3. Появление события A равновозможно в любой момент промежутка времени T . Вероятность того, что событие A за этот промежуток времени произойдет, равна p . Известно, что за время $t < T$ данное событие не произошло. Определить вероятность P того, что событие A произойдет в оставшийся промежуток времени.

Решение. Вероятность p появления события за время T равна вероятности $(t/p)p$ появления данного события за время t

плюс произведение вероятности $\left(1 - \frac{t}{T}p\right)$ того что событие не произойдет за время t , на условную вероятность P

появления события за оставшееся время, если раньше оно не произошло. Таким образом, имеет место равенство

$$p = \frac{t}{T}p + \left(1 - \frac{t}{T}p\right)P.$$

Отсюда находим

$$P = \frac{p\left(1 - \frac{t}{T}\right)}{1 - \frac{t}{T}p}$$

Пример 5.4. В урне имеются n белых, m черных и l красных шаров, которые извлекаются наудачу по одному:

а) без возвращения; б) с возвращением после каждого извлечения. Определить в обоих случаях вероятности того, что белый шар будет извлечен раньше черного.

Решение. Пусть P — вероятность того, что белый шар будет извлечен раньше черного, а P_1 — вероятность того, что черный шар будет извлечен раньше белого.

Вероятность P_{II} является суммой вероятностей извлечения белого шара сразу, после извлечения одного красного, двух красных и т. д. Таким образом, можно записать в случае, когда шары не возвращаются,

$$P_I = \frac{n}{n+m+l} + \frac{l}{n+m+l} \frac{n}{n+m+l-1} + \frac{l(l-1)}{n+m+l} \frac{n}{n+m+l-2} + \dots$$

а при возвращении шаров

$$P_I = \frac{n}{n+m+l} + \frac{ln}{(n+m+l)^2} + \frac{l^2n}{(n+m+l)^3} + \dots = \frac{n}{n+m}$$

Для получения вероятностей P_{II} в предыдущих формулах нужно произвести замену n на m , а m на n . Отсюда следует, что в обоих случаях $P_I : P_{II} = n : m$. Так как, кроме того, $P_I + P_{II} = 1$, то искомая вероятность при извлечении

шаров без возвращения также равна $P_I = \frac{n}{n+m}$, Аналогично решаются задачи 5.23—5.27.

Пример 5.5. Некто написал n писем, запечатал их в конверты, а затем наудачу на каждом из них написал различные адреса. Определить вероятность того, что хотя бы на одном из конвертов написан правильный адрес.

Решение. Пусть событие A_k состоит в том, что на k -м конверте написан правильный адрес ($A=1, 2, \dots, n$).

Искомая вероятность $p = P\left(\sum_{k=1}^n A_k\right)$. События A_k совместны; $\setminus \text{й}=1 /$

при любых $k, j, i \dots$ имеют место равенства:

$$P(A_k) = \frac{1}{n} = \frac{(n-1)!}{n!},$$

$$P(A_k A_j) = P(A_k) P(A_j | A_k) = \frac{(n-2)!}{n!},$$

$$P(A_k A_j A_i) = \frac{(n-3)!}{n!} \text{ и т. д., } P\left(\prod_{k=1}^n A_k\right) = \frac{1}{n!}$$

Используя формулу для вероятности суммы n событий, получаем

$$p = C_n^1 \frac{(n-1)!}{n!} - C_n^2 \frac{(n-2)!}{n!} + C_n^3 \frac{(n-3)!}{n!} - \dots$$

При больших n $p \approx 1 - e^{-1}$.

Аналогично решаются задачи 5.32—5.38.

Задачи

6.1. Каждое из четырех несовместных событий может произойти соответственно с вероятностями 0,012, 0,010, 0,006 и 0,002. Определить вероятность того, что в результате опыта произойдет хотя бы одно из этих событий.

5.2. Стрелок производит один выстрел в мишень, состоящую из центрального круга и двух концентрических колец. Вероятности попадания в круг и кольца соответственно равны 0,20, 0,15 и 0,10. Определить вероятность непопадания в мишень.

5.3. В квадрат, разделенный на n^2 одинаковых квадратов, брошен шарик. Вероятность попадания шарика в малый квадрат i -й горизонтальной и j -й вертикальной полос равна p_{ij}

$$\left(\sum_{i,j=1}^n p_{ij} = 1 \right)$$

Определить вероятность попадания шарика в горизонтальную полосу.

5.4. Две одинаковые монеты радиуса r расположены внутри круга радиуса R , в который наудачу бросается точка.

Определить вероятность того, что эта точка упадет на одну из монет, если монеты не перекрываются.

5.5. Какова вероятность извлечь из колоды в 52 карты фигуру любой масти или карту пиковой масти (фигурой называется валет, дама или король)?

5.6. В ящике имеются 10 монет по 20 коп., 5 монет по 15 коп. и 2 монеты по 10 коп. Наугад берутся шесть монет. Какова вероятность, что в сумме они составят не более одного рубля?

5.7. Известны вероятности событий A и AB . Найти вероятность события $A\bar{B}$.

5.8. Доказать, что из условия

$$P(B|\bar{A}) = P(B|A) \Rightarrow$$

следует независимость событий A и B .

5.9. Событие B включает в себя событие A . Доказать, что $P(A) \leq P(B)$.

5.10. В двух урнах находятся шары, отличающиеся только цветом, причем в первой урне 5 белых шаров, 11 черных и 8 красных, а во второй соответственно 10, 8 и 6. Из обеих урн наудачу извлекается по одному шару. Какова вероятность, что оба шара одного цвета?

5.11. На плоскости проведены две параллельные полосы, ширина которых 10 мм, а расстояние между ними 155 мм. Вдоль прямой, перпендикулярной этим полосам, на расстояниях 120 мм друг от друга расположены центры окружностей радиуса 10 мм. Определить вероятность того, что хотя бы одна окружность пересечет любую из полос, если центры окружностей располагаются на прямой независимо от положения полос.

5.12. Вдоль дороги на одинаковом расстоянии друг от друга посеяны в одну линию семена n растений. При пересечении дороги пешеходом в неустановленном месте может быть повреждена посадка одного растения с вероятностью p

$$\left(p < \frac{1}{n} \right)$$

Определить вероятность того, что m -й пешеход, пересекающий дорогу в неустановленном месте, повредит посадку, если пешеходы пересекают дорогу последовательно и независимо друг от друга.

5.13. Определить вероятность того, что наудачу выбранное целое положительное число не делится: а) ни на два, ни на три; б) на два или на три.

6.14. Вероятность получения билета, у которого равны суммы первых и последних трех цифр номера, равна 0,0525.

Какова вероятность иметь такой билет среди двух взятых наудачу, если оба билета: а) имеют последовательные номера; б) получены независимо один от другого?

6.15. Доказать, что при $P(A)=a$ и $P(B)=b$ будет

$$P(A|B) \geq \frac{a+b-1}{b}$$

6.16. Известно, что $P(X \in [10]) = 0,9$, $P(|Y| \in [1]) = 0,95$. Доказать, что при любой зависимости между X и Y для $Z = X + Y$ имеют место следующие неравенства:

$$P(Z \leq 11) \geq 0,85, \quad P(Z \leq 9) \leq 0,95.$$

6.17. Игра между A и B ведется на следующих условиях: в результате первого хода, который всегда делает A , он может выиграть с вероятностью $0,3$; если первым ходом A не выигрывает, то ход делает B и может выиграть с вероятностью $0,5$; если в результате этого хода B не выигрывает, то A делает второй ход, который может привести к его выигрышу с вероятностью $0,4$. Определить вероятности выигрыша для A и для B .

5.18. Вероятность для данного спортсмена улучшить свой предыдущий результат с одной попытки равна p . Определить вероятность того, что на соревнованиях спортсмен улучшит свой результат, если разрешается делать две попытки.

5.19. Игрок A поочередно играет по две партии с игроками B и C . Вероятности выигрыша первой партии для B и C равны $0,1$ и $0,2$ соответственно; вероятность выиграть во второй партии для B равна $0,3$, для C равна $0,4$.

Определить вероятность того, что: а) первый выиграет B ; б) первым выиграет C .

5.20. Из урны, содержащей n шаров с номерами от 1 до n последовательно извлекаются два шара, причем первый шар возвращается, если его номер не равен единице. Определить вероятность того, что шар с номером 2 будет извлечен при втором извлечении.

5.21. Игрок A поочередно играет с игроками B и C , имея вероятность выигрыша в каждой партии $0,25$, и прекращает игру после первого проигрыша или после двух партий, сыгранных с каждым игроком. Определить вероятности выигрыша B и C .

5.22. Вероятность выхода из строя прибора после того, как он применялся k раз, равна $G(k)$. Найти вероятность выхода из строя прибора при его последующих n применениях, если при предшествующих m применениях прибор из строя не вышел.

5.23. Двое поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у которого раньше появится герб. Определить вероятности выигрыша для каждого из игроков.

5.24. Трое поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у которого раньше появится герб. Определить вероятности выигрыша для каждого из игроков.

5.25. Вероятность получить очко, не теряя подачи, при игре двух равносильных волейбольных команд равна половине. Определить вероятность получения одного очка для подающей

команды.

5.26. В урне имеются n белых и m черных шаров. Два игрока последовательно достают по одному шару, возвращая каждый раз извлеченный шар. Игра продолжается до тех пор, пока кто-нибудь из них не достанет белый шар. Определить вероятность того, что первым вытащит белый шар игрок, начинающий игру.

5.27. Два стрелка поочередно стреляют по мишени до первого попадания. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,2, а для второго равна 0,3. Найти вероятность того, что первый стрелок сделает больше выстрелов, чем второй.

5.28. Доказать справедливость равенства

$$P\left(\prod_{k=1}^n A_k\right) = 1 - P\left(\sum_{k=1}^n \bar{A}_k\right)$$

5.29. Упростить общую формулу для вероятности сумм событий применительно к случаю, когда совпадают вероятности произведений при равных количествах событий.

5.30. Доказать, что

$$P\left(\prod_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k) - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n P(A_k + A_j) + \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{j=k+1}^{n-1} \sum_{l=j+1}^n P(A_k + A_j + A_l) - \dots \\ \dots + (-1)^{n-1} P\left(\sum_{k=1}^n A_k\right)$$

5.31. Доказать, что для любых событий A_k ($k=0, 1, \dots, n$) справедливо равенство

$$P\left(\bar{A}_0 \prod_{k=1}^n A_k\right) = P(\bar{A}_0) - \sum_{k=1}^n P(\overline{A_0 + A_k}) + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n P(\overline{A_0 + A_k + A_j}) - \dots + (-1)^n P\left(\overline{\sum_{k=0}^n A_k}\right)$$

5.32. В урне имеется n одинаковых шаров с номерами от 1 до n . Шары извлекаются по одному без возвращения. Определить вероятность того, что хотя бы при одном извлечении номер шара совпадет с номером опыта.

5.33. В помещении, насчитывающем n пронумерованных мест, n лицам выдали n номерных билетов. Какова вероятность, что ровно m лиц окажутся сидящими на местах, соответствующих номерам билетов, если все места занимаются наудачу?

5.34. В электропоезд, состоящий из n вагонов, входят k (k/n) пассажиров, которые выбирают вагоны наудачу. Определить вероятность того, что в каждый вагон войдет хотя бы один пассажир.

5.35. Двое играют до победы, причем для этого необходимо первому выиграть m партий, а второму n партий. Вероятность выигрыша каждой партии первым игроком равна p , а вторым $q = 1 - p$. Определить вероятность выигрыша всей игры первым игроком.

5.36. Два игрока условились, что выигрыш получит тот, кто выиграет определенное число партий. Игра была прервана, когда первому игроку осталось до выигрыша m , а второму n партий. Как разделить ставку, если вероятность выигрыша партии для каждого из игроков равна половине?

(Задача де Мере).

5.37. Задача о четырех лгунах. Из четырех человек $a, b, в, г$ один (a) получил информацию, которую в виде сигнала «да» или «нет» сообщает второму (b), второй—третьему ($в$), третий—четвертому ($г$), а последний объявляет результат полученной информации таким же образом, как и все другие. Известно, что каждый из них говорит правду только в одном случае из трех. Какова вероятность, что первый из этих лгунов сказал правду, если четвертый сказал правду?

5.38. На горизонтальной плоскости проведены параллельные прямые, отстоящие друг от друга на расстоянии L . На плоскость наудачу брошен выпуклый контур, периметр которого равен s . Найти вероятность того, что контур пересечет одну из параллельных прямых, если диаметр круга, описанного около выпуклого контура, меньше L .

§ 6. Формула полной вероятности

Основные формулы

Вероятность $P(A)$ появления события A , которое может произойти только совместно с одним из событий H_1, H_2, \dots, H_n , образующих полную группу несовместных событий (гипотез), определяется формулой полной вероятности

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(H_k) P(A | H_k),$$

$$\sum_{k=1}^n P(H_k) = 1.$$

Решение типовых примеров

Пример 6.1. Среди n лиц разыгрываются m [n выигрышей путем случайного извлечения из ящика и билетов. Одинаковы ли шансы выигрыша для любого из играющих? Когда выгоднее тащить билет?

Решение. Обозначим через A_k событие, состоящее в извлечении выигрышного билета после k извлечений билетов из ящика. По результатам предыдущих опытов можно сделать $k+1$ гипотез. Пусть гипотеза H_{ks} означает, что из k извлеченных билетов выигрышных было s . Вероятности этих гипотез

$$P(H_{ks}) = \frac{C_m^s C_{n-m}^{k-s}}{C_n^k} \quad (s = 0, 1, \dots, k),$$

причем

$$P(H_{ks}) = 0, \text{ если } s > m.$$

Так как осталось $n-k$ билетов, из которых $m-s$ выигрышных, то при m/s

$$P(A_k | H_{ks}) = \frac{m-s}{n-k}.$$

По формуле полной вероятности находим

$$P(A_k) = \sum_{s=0}^k \frac{C_m^s C_{n-m}^{k-s}}{C_n^k} \frac{m-s}{n-k},$$

где $C_m^s = 0$ при $s > m$.

Данное равенство можно записать также в виде

$$P(A_k) = \frac{m}{n} \sum_{s=0}^k \frac{C_{m-1}^s C_{n-m}^{k-s}}{C_{n-1}^k}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^k C_{m-1}^s C_{n-m}^{k-s} u^{n-k-1} &= \frac{1}{k!} \sum_{s=0}^k C_k^s \frac{d^s u^{m-1}}{du^s} \frac{d^{k-s} u^{n-m}}{du^{k-s}} = \\ &= \frac{1}{k!} \frac{d^k}{du^k} (u^{m-1} u^{n-m}) = \frac{1}{k!} \frac{d^k u^{n-1}}{du^k} = C_{n-1}^k u^{n-k-1}, \end{aligned}$$

т.е. справедливо равенство

$$\sum_{s=0}^k C_{m-1}^s C_{n-m}^{k-s} = C_{n-1}^k.$$

Искомая вероятность $P(A_k) = m/n$ при любом k . Таким образом, у всех играющих шансы одинаковы и очередность извлечения не имеет значения.

Аналогично решаются задачи 6.1—6.17.

Пример 6.2. Отмеченный шар с вероятностями p и $1-p$ может находиться в первой или во второй урне. Вероятность извлечь отмеченный шар из урны, в которой этот шар находится, равна $P(P \neq 1)$. Как следует распорядиться правом n раз извлекать шары из любой урны, чтобы вероятность извлечения отмеченного шара была наибольшей, если шар после извлечения возвращается в урну?

Решение. Пусть событие A — извлечение отмеченного шара. Гипотезы: H_1 — шар находится в первой урне. H_2 — во второй. По условию $P(H_1) = p$, $P(H_2) = 1-p$. Допустим, что из первой урны извлечено m , а из второй $n-m$ шаров. Условные вероятности извлечения отмеченного шара будут

$$P(A|H_1) = 1 - (1-p)^m$$

По формуле полной вероятности искомая вероятность

$$P(A) = p[1 - (1-p)^m] + (1-p)[1 - (1-p)^{n-m}].$$

Нужно определить m так, чтобы была наибольшей вероятность $P(A)$. Дифференцируя $P(A)$ по m (для нахождения приближенного значения m , считаем m непрерывным), получаем

$$\frac{dP(A)}{dm} = -p(1-p)^m \ln(1-p) + (1-p)(1-p)^{n-m} \ln(1-p).$$

Полагая $\frac{dP(A)}{dm} = 0$ приходим к равенству $(1-p)^{2m-n} =$

$$= \frac{1-p}{p}. \text{ Поэтому должно быть } m = \frac{n}{2} + \frac{\ln \frac{1-p}{p}}{2 \ln(1-p)}.$$

Данная формула используется при решении задач 6.18, 6.19.

Задачи

6.1. Имеются две партии изделий по 12 и 10 штук, причем в каждой партии одно изделие бракованное. Изделие, взятое наудачу из первой партии, переложено во вторую, после чего выбирается наудачу изделие из второй партии.

Определить вероятность извлечения бракованного изделия из второй партии.

6.2. Из полного набора костей домино наугад берутся две кости. Определить вероятность того, что вторую кость можно приставить к первой.

6.3. В двух урнах находится соответственно m_1 и m_2 белых и n_1 и n_2 черных шаров. Из каждой урны наудачу извлекается один шар, а затем из этих двух шаров наудачу берется один. Какова вероятность, что этот шар белый?

6.4. Имеется n урн, в каждой из которых по m белых и по A черных шаров. Из первой урны наудачу извлекается один шар и перекладывается во вторую. Затем из второй урны наудачу извлекается один шар и перекладывается в третью урну и т. д. Определить вероятность извлечения после такого перекладывания белого шара из последней урны.

6.5. В тире имеются пять ружей, вероятности попадания из которых равны соответственно 0,5; 0,6; 0,7; 0,8 и 0,9.

Определить вероятность попадания при одном выстреле, если стреляющий берет одно из ружей наудачу.

6.6. Для контроля продукции из трех партий деталей взята для испытания одна деталь. Как велика вероятность обнаружения бракованной продукции, если в одной партии $2/3$ деталей бракованные, а в двух других — все доброкачественные?

6.7. Радиолампа может принадлежать к одной из трех партий с вероятностями p_1 , p_2 и p_3 , где $p_1 = p_3 = 0,25$, $p_2 = 0,5$.

Вероятности того, что лампа проработает заданное число часов, равны для этих партий соответственно 0,1; 0,2 и 0,4.

Определить вероятность того, что лампа проработает заданное число часов.

6.8. Игрок A играет поочередно с двумя партнерами, вероятности выигрыша для которых в первой партии равны соответственно 0,5 и 0,6 и увеличиваются после каждой сыгранной партии на 0,1. Первые две партии выиграл A . Определить вероятность проигрыша A в третьей партии, если

неизвестно, с каким партнером была сыграна первая партий, а ничьи исключены.

6.9. Характеристика материала, взятого для изготовления продукции, с вероятностями 0,09; 0,16; 0,25; 0,25; 0,16 и 0,09 может находиться в шести различных интервалах. В зависимости от свойств материала вероятности получения первого сортной продукции равны соответственно 0,2; 0,3; 0,4; 0,4; 0,3 и 0,2. Определить вероятность получения первосортной продукции.

6.10. Пластина из изолятора длиной 100 мм прикрывает две проводящие полосы, идущие перпендикулярно ее длине и имеющие от края пластины границы на расстояниях 20 и 40 мм и соответственно 65 и 90 мм. С центром в точке, положение которой равновозможно в любом месте пластины, просверлено отверстие диаметром 10 мм. Определить вероятность получения электрического контакта с любой из полос, если проводящий контакт приложен сверху к произвольной точке, расположенной на том же расстоянии от основания пластины, что и центр отверстия.

6.11. Вероятность поступления k вызовов на телефонную станцию за промежуток времени t равна $P_t(k)$. Считая числа вызовов за любые два соседних промежутка времени независимыми, определить вероятность $P_{2t}(s)$ поступления s вызовов за промежуток времени длительностью $2t$.

6.12. Определить вероятность того, что 100 лампочек, взятых наудачу из 1000, окажутся исправными, если известно, что число испорченных лампочек на 1000 штук равновозможно от 0 до 5.

6.13. В сосуд, содержащий n шаров, опущен белый шар. Какова вероятность извлечь из этого сосуда белый шар, если все предположения о первоначальном составе шаров по цвету равновозможны?

6.14. В ящике находятся 15 теннисных мячей, из которых 9 новых. Для первой игры наугад берутся три мяча, которые после игры возвращаются в ящик. Для второй игры также наугад берутся три мяча. Найти вероятность того, что все мячи, взятые для второй игры, новые.

6.15. В правом кармане имеются три монеты по 20 коп. и четыре монеты по 3 коп., а в левом—шесть по 20 коп. и три по 3 коп. Из правого кармана в левый наудачу перекладываются пять монет. Определить вероятность извлечения из левого кармана после перекладывания монеты в 20 коп., если монета берется наудачу.

6.16. Пятнадцать экзаменационных билетов содержат по два вопроса, которые не повторяются. Экзаменуемый может ответить только на 25 вопросов. Определить вероятность того, что экзамен будет сдан, если для этого достаточно ответить на два вопроса из одного билета или на один вопрос из первого билета и на указанный дополнительный вопрос из другого билета.

6.17. В каких случаях, имеет место равенство

$$P(A) = P(A|B) + P(A|\bar{B})?$$

6.18. В одной из двух урн, в каждой из которых 10 шаров, один шар отмечен. Играющий имеет право последовательно извлечь 20 шаров из любой урны, каждый раз возвращая

извлеченный шар обратно. Как следует вести игру, чтобы вероятность извлечения отмеченного шара была наибольшей, если вероятность того, что отмеченный шар находится в первой урне, равна $2/3$? Чему равна эта вероятность?

6.19. Для поисков пропавшего самолета выделено десять вертолетов, каждый из которых может быть использован для поисков в одном из двух возможных районов, где самолет может находиться с вероятностями $0,8$ и $0,2$. Как следует распределить вертолеты по районам поисков, чтобы вероятность обнаружения самолета была наибольшей, если каждый вертолет обнаруживает находящийся в районе поиска самолет с вероятностью $0,2$, а поиски осуществляются каждым вертолетом независимо от других? Найти вероятность обнаружения самолета при оптимальной процедуре поисков.

§ 7. Вычисление вероятностей гипотез после испытания (формула Байеса)

Основные формула

Вероятность $P(H_k | A)$ гипотезы H_k после того, как имело место событие; A , определяется формулой

$$P(H_k | A) = \frac{P(H_k) P(A | H_k)}{P(A)}$$

где

$$P(A) = \sum_{j=1}^n P(H_j) P(A | H_j),$$

а гипотезы H_j , ($j=1, 2, \dots, n$) составляют полную группу несовместных событий.

Решение типовых примеров

Пример 7.1. Телеграфное сообщение состоит из сигналов «точка» и «тире». Статистические свойства помех таковы, что искажаются в среднем $2/5$ сообщений «точка» и $1/3$ сообщений «тире». Известно, что среди передаваемых сигналов «точка» и «тире» встречаются в отношении $5 : 3$.

Определить вероятность того, что принят передаваемый сигнал, если; а) принят сигнал «точка»; б) принят сигнал «тире».

Решение. Пусть событие A — принят сигнал «точка», а событие B — принят сигнал «тире».

Можно сделать две гипотезы: H_1 — передан сигнал «точка», H_2 — передан сигнал «тире». По условию

$$P(H_1) : P(H_2) = 5:3.$$

Кроме того, $P(H_1) + P(H_2) = 1$. Поэтому $P(H_1) = 5/8$
 $P(H_2) = 3/8$ Известно, что

$$P(A|H_1) = \frac{3}{5}, \quad P(A|H_2) = \frac{1}{3},$$
$$P(B|H_1) = \frac{2}{5}, \quad P(B|H_2) = \frac{2}{3}.$$

Вероятности событий A и B находим по формуле полной вероятности:

$$P(A) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$
$$P(B) = \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

Аналогично решаются задачи 7.1—7.16.

Пример 7.2. Имеется две партии деталей, причем известно, что в одной партии все детали удовлетворяют техническим условиям, а в другой партии $1/4$ деталей недоброкачественная. Деталь, взятая из наудачу выбранной партии, оказалась доброкачественной. Определить вероятность того, что вторая деталь из этой же партии окажется недоброкачественной, если первая деталь после проверки возвращена в партию.

Решение. Гипотезы: H_1 - взята партия с недоброкачественными деталями, H_2 - взята партия доброкачественных деталей. Событие A — первая деталь доброкачественная. По условию задачи $P(H_1) = P(H_2) = 1/2$ $P(A|H_1) = 3/4$

$P(A|H_2) = 1$. Поэтому по формуле полной вероятности вероятность события A будет

$$P(A) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} + 1 \right) = \frac{7}{8}.$$

После первого испытания вероятность того, что партия содержит недоброкачественные детали, равна

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1) P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{7}{8}} = \frac{3}{7}.$$

Вероятность, того, что партия содержит только добро-

качественные детали,

$$P(H_2|A) = \frac{4}{7}.$$

Пусть событие B состоит в том, что при втором испытании деталь оказалась недоброкачественной. Вероятность данного события также находится по формуле полной вероятности. Если p_1 и p_2 — вероятности гипотез H_1 и H_2 после испытания, то согласно предыдущим вычислениям,

$$p_1 = \frac{3}{7} \quad p_2 = \frac{4}{7} \quad \text{Кроме того, } P(B|H_1) = 1/4, \quad P(B|H_2) = 0.$$

Поэтому

искомая вероятность $P(B) = (3/7) * (1/4) = 3/28$. Аналогично решаются задачи 7.17, 7.18.

Задачи

7.1. Имеется десять одинаковых урн, из которых в девяти находятся по два черных и по два белых шара, а в одной — пять белых и один черный шар. Из урны, взятой наудачу, извлечен белый шар. Какова вероятность, что шар извлечен из урны, содержащей пять белых шаров?

7.2. Имеется k_1 урн, в каждой из которых m_1 белых и n_1 черных шаров, и k_2 урн, содержащих по m_2 белых и по n_2 черных шаров. Извлеченный из наудачу выбранной урны один шар оказался белым. Какова вероятность, что данный шар извлечен из первой группы урн?

7.3. Известно, что 96% выпускаемой продукции удовлетворяют стандарту. Упрощенная схема контроля признает пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0,98 и нестандартную — с вероятностью 0,05. Определить вероятность того, что изделие, прошедшее упрощенный контроль, удовлетворяет стандарту.

7.4. Из партии в пять изделий наудачу взято одно изделие, оказавшееся бракованным. Количество бракованных изделий равновозможно любое. Какое предположение о количестве бракованных изделий наиболее вероятно?

7.5. Определить вероятность того, что среди 1000 лампочек нет ни одной неисправной, если из взятых наудачу 100 лампочек все оказались исправными. Предполагается, что число неисправных лампочек из 1000 равновозможно от 0 до 5.

7.6. Игрок D играет с неизвестным противником на следующих условиях: ничейный исход исключен; первый ход делает противник; в случае его проигрыша делает ход D , выигрыш которого означает выигрыш игры, а при проигрыше игра повторяется второй раз на тех же условиях. Из двух равновозможных противников B имеет вероятность выиграть первым ходом 0,4, а вторым — 0,3; C имеет вероятность выиграть первым ходом 0,8, а вторым ходом 0,6. Для D вероятность выиграть первым ходом равна 0,3 и не зависит от противника, а для второго хода равна 0,5 при игре с B и 0,7 при игре с C . Игру выиграл D .

Какова вероятность: а) что противником был B ; б) что

противником был С? •

7.7. Из 18 стрелков 5 попадают в мишень с вероятностью 0,8; 7—с вероятностью 0,7; 4—с вероятностью 0,6 и 2 —с вероятностью 0,5. Наудачу выбранный стрелок произвел выстрел, но в мишень не попал. К какой из групп вероятнее всего принадлежал этот стрелок?

7.8. Вероятности попадания при каждом выстреле для трех стрелков равны соответственно $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$. При одновременном выстреле всех трех стрелков имелось два попадания. Определить вероятность того, что промахнулся третий стрелок.

7.9. Трое охотников одновременно выстрелили по вепрю, который был убит одной пулей. Определить вероятности того, что вепрь убит первым, вторым или третьим охотником, если вероятности попадания для них равны соответственно 0,2; 0,4; 0,6.

7.10. Попадание случайной точки в любое место области S равновозможно, а область S состоит из четырех частей, составляющих соответственно 50, 30, 12 и 8% всей области. При испытании имело место событие A , которое происходит только при попадании случайной точки в каждую из этих частей с вероятностями соответственно 0,01, 0,05, 0,2 и 0,5. В какую из частей области S вероятнее всего произошло попадание?

7.11. В урне имеется n шаров, причем цвет каждого из них с равной вероятностью может быть белым или черным. Извлекаются последовательно k шаров, причем каждый раз после извлечения шар возвращается в урну. Какова вероятность того, что в урне содержатся только белые шары, если черные шары не извлекались?

7.12. Из двух близнецов первый—мальчик. Какова вероятность, что другой тоже мальчик, если среди близнецов вероятность рождения двух мальчиков и двух девочек соответственно равны a и b , а для разнополых близнецов вероятность родиться первым для обоих полов одинакова?

7.13. Принимая, что вероятность рождения однополых близнецов вдвое больше, чем разнополых, вероятности рождения близнецов разного пола в любой последовательности одинаковыми, а вероятность рождения мальчика равной 0,51. девочки—0,49, определить вероятность рождения второго мальчика, если первым родился мальчик.

7.14. Два стрелка поочередно стреляют в мишень. Вероятности попадания первыми выстрелами для них равны соответственно 0,4 и 0,5, а вероятности попадания при последующих выстрелах для каждого увеличиваются на 0,05. Какова вероятность, что первым произвел выстрел первый стрелок, если при пятом выстреле произошло попадание в мишень?

7.15. Произведено три независимых испытания, в каждом из которых событие A происходит с вероятностью 0,2. Вероятность появления другого события B зависит от числа появления события A : при однократном появлении события A эта вероятность равна 0,1, при двукратном появлении равна 0,3, при трехкратном появлении равна 0,7; если событие A не имело

места ни разу, то событие B невозможно. Определить наивероятнейшее число появлений события A , если событие B имело место.

7.16. В техникуме n студентов, из которых n_k ($k = 1, 2, 3$) человек учатся k -й год. Среди двух наудачу выбранных студентов оказалось, что один из них учится больше второго. Какова вероятность того, что этот студент учится третий год?

7.17. Третья часть одной из трех партий деталей является второсортной, остальные детали первого сорта. Деталь, взятая из одной партии, оказалась первосортной. Определить вероятность того, что деталь была взята из партии, имеющей второсортные детали. Найти ту же вероятность при условии, что взятая из той же партии вторая деталь оказалась первосортной, если первая деталь после проверки возвращена в партию.

7.18. Получена партия из восьми изделий одного образца. По данным проверки половины партии, три изделия оказались технически исправными, а одно бракованным. Какова вероятность, что при проверке трех последующих изделий одно из них окажется исправным, а два бракованными, если любое количество бракованных изделий в данной партии равновероятно?

§ 8. Вычисление вероятностей появления события при повторных независимых испытаниях

Основные формулы

Вероятность $P_{n;m}$ появления события m раз при n независимых опытах, в каждом из которых вероятность появления события равна p , определяется формулой биномиального распределения

$$P_{n;m} = C_n^m p^m q^{n-m},$$

где

$$q = 1 - p$$

Вероятность появления события не менее m раз при n опытах вычисляется по формуле

$$R_{n;m} = \sum_{k=m}^n P_{n;k} \quad \text{или} \quad R_{n;m} = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} P_{n;k}.$$

Вероятность Появления события хотя бы один раз при n опытах будет

$$R_{n;1} = 1 - q^n.$$

Количество n опытов, которые нужно произвести для того, чтобы с вероятностью не меньше P можно было утверждать, что данное событие произойдет по крайней мере один раз, находится по формуле

$$n \geq \frac{\ln(1-P)}{\ln(1-p)},$$

где p — вероятность появления этого события в каждом опыте.

Наивероятнейшее значение μ числа m появлений события A

равно целой части числа $(n+1)p$, а при целом $(n+1)p$ наибольшее значение вероятности достигается при двух числах $\mu_1=(n+1)p-1$ и $\mu_2=(n+1)p$.

Если опыты независимы, но вероятности появления события различны, то вероятность $P_{n;m}$ появления события m раз при n опытах равна коэффициенту при u^m в разложении производящей функции

$$G(u) = \prod_{k=1}^n (p_k u + q_k) = \sum_{m=0}^n P_{n;m} u^m,$$

где $q_k = 1 - p_k$, p_k - вероятность появления события в k -м опыте.

Коэффициенты $P_{n;m}$ могут быть определены дифференцированием функции $G(u)$:

$$P_{n;m} = \frac{1}{m!} \left\{ \frac{d^m G(u)}{du^m} \right\}_{u=0}$$

что дает, например

$$P_{n;0} = q_1 q_2 \dots q_n$$

Решение типовых примеров

Пример 8.1. Что вероятнее выиграть у равносильного противника (ничейный исход партии исключен): а) три партии из четырех или пять из восьми; б) не менее трех партий из четырех или не менее пяти партий из восьми?

Решение. Так как противники равносильные, то вероятности выигрыша и проигрыша каждой партии одинаковы и равны $p = q = 1/2$,

а) Вероятность выиграть три партии из четырех

$$P_{4;3} = C_4^1 \frac{1}{2^4} = \frac{1}{4}$$

Вероятность выиграть пять партий из восьми $P_{8;5} =$

$$= C_8^3 \frac{1}{2^8} = \frac{7}{32}$$

Так как $1/4 > 7/32$ то вероятнее выиграть три партии из четырех.

б) Вероятность выиграть не менее трех партий из четырех

$$R_{4;3} = P_{4;3} + P_{4;4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

а вероятность выиграть не менее пяти партий из восьми

$$\begin{aligned} R_{8;5} &= P_{8;5} + P_{8;6} + P_{8;7} + P_{8;8} = \\ &= \frac{7}{32} + \left(\frac{8 \cdot 7}{2} + 8 + 1 \right) \frac{1}{2^8} = \frac{93}{256} \end{aligned}$$

Так как $93/256 > 5/16$, то вероятнее выиграть не менее пяти партий из восьми.

Аналогично решаются задачи 8.1—8.31.

Пример 8.2. Имеется шесть потребителей электрического тока, для первого из которых при определенных условиях вероятность того, что произойдет авария, приводящая к отключению потребителя, равна 0,6, для второго—0,2, а для четырех остальных — по 0,3. Определить вероятность того, что генератор тока будет отключен полностью: а) если все потребители соединены последовательно; б) если потребители соединены так, как показано на схеме (рис. 7).

Решение, а) Вероятность неотключения всех шести потребителей равна произведению вероятностей неотключения

каждого потребителя,

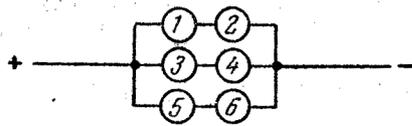


Рис. 7.

т. е.

$$q = q_1 q_2 q_3^4 \approx 0,077.$$

Искомая вероятность равна вероятности отключения хотя бы одного потребителя, т. е. $p = 1 - q \approx 0,923$

б) В этом случае генератор будет отключен полностью, если в каждой паре последовательно соединенных потребителей отключен хотя бы один потребитель:

$$p = (1 - q_1 q_2)(1 - q_3^2) \approx 0,177.$$

Аналогично решаются задачи 8.32—8.35.

Пример 8.3. Партия изделий содержит один процент брака. Каков должен быть объем случайной выборки, чтобы вероятность встретить в ней хотя бы одно бракованное изделие была не меньше 0,95?

Решение. Искомое число n находится по формуле

$$n \geq \frac{\ln(1 - P)}{\ln(1 - p)}.$$

В данном случае $P = 0,95$, а $p = 0,01$.

Поэтому

$$n \geq \frac{\ln 0,05}{\ln 0,99} \approx 296.$$

Аналогично решаются задачи 8.36—8.40.

Пример 8.4. Оптовая база снабжает 10 магазинов, от каждого из которых может поступить заявка на очередной день с вероятностью 0,4 независимо от заявок других магазинов. Найти наивероятнейшее число заявок в день и вероятность получения этого числа заявок.

Решение. В данном случае $n = 10$, $p = 0,4$, $(n + 1)p = 4,4$.

Наивероятнейшее число μ , заявок равно целой части числа $(n + 1)p$ т.е. $\mu = 4$

Вероятность четырех заявок из десяти

$$P_{10; 4} = C_{10}^4 \cdot 0,4^4 \cdot 0,6^6 = 0,251$$

Аналогично решаются задачи 8.41—8.42.

Задачи

- 8.1.** Определить вероятность того, что номер первой встретившейся автомашины не содержит: а) цифры пять; б) двух пятерок.

Известно, что все номера четырехзначные, неповторяющиеся и равновозможные.

8.2. В семье десять детей. Считая вероятности рождения мальчика и девочки равными 0,5, определить вероятность того,

что в данной семье: а) пять мальчиков; б) мальчиков не менее трех, но и не более восьми.

8.3. Из таблицы случайных чисел наудачу выписаны 200 двузначных случайных чисел (от 00 до 99). Определить вероятность того, что среди них число 33 встретится; а) три раза; б) четыре раза.

8.4. В библиотеке имеются книги только по технике и математике. Вероятности того, что любой читатель возьмет книгу по технике и по математике, равны соответственно 0,7 и 0,3. Определить вероятность того, что пять читателей подряд возьмут книги или только по технике, или только по математике, если каждый из них берет только одну книгу.

8.5. Две электрические лампочки включены в цепь последовательно. Определить вероятность того, что при повышении напряжения в сети выше номинального произойдет разрыв цепи, если вероятность того, что лампочка перегорит, для обеих лампочек одинакова и в этих условиях равна 0,4.

8.6. Событие B наступает в том случае, если событие A появится не менее трех раз. Определить вероятность появления события B , если вероятность появления события A при одном опыте равна 0,3 и произведено: а) пять независимых опытов; б) семь независимых опытов.

8.7. Электрическая схема, содержащая два блока типа A , один блок типа B и четыре блока типа C , составлена так, как это показано на рис. 8. Определить вероятность разрыва цепи, неустраняемого с помощью ключа K , если элементы типа A выходят из строя с вероятностью 0,3, элементы типа B — с вероятностью 0,4, элементы типа C с вероятностью 0,2.

8.8. Вероятность того, что агрегат необходимо поставить на ремонт после m аварий, определяется формулой

$$G(m) = 1 - \left(1 - \frac{1}{\bar{\omega}}\right)^m,$$

где $\bar{\omega}$ — среднее число аварий до постановки агрегата на ремонт. Доказать, что вероятность того, что после n производственных циклов потребуется ремонт, определяется по

формуле $W_n = 1 - \left(1 - \frac{p}{\bar{\omega}}\right)^n$, где

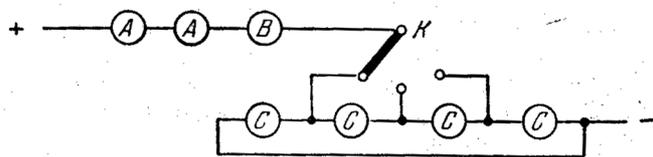


Рис. 8.

p — вероятность того, что во время одного производственного цикла произойдет авария.

8.9. Производится четыре независимых опыта, в каждом из которых событие L происходит с вероятностью 0,3. Событие B наступает с вероятностью, равной 1, если событие A произошло не менее двух раз; не может наступить, если событие A не имело места, и наступает с вероятностью 0,6, если событие A имело место один раз. Определить вероятность появления события B .

8.10. По мишени в тире произведено 200 независимых

выстрелов при одинаковых условиях, которые дали 116 попаданий. Определить, какое значение вероятности попадания на один выстрел более вероятно: $1/2$ или $2/3$, если до опыта обе гипотезы равновероятны и единственно возможны.

8.11. Рассчитать зависимость вероятности хотя бы одного появления события A при 10 независимых опытах от вероятности p появления события A в каждом опыте для следующих значений p : 0,01; 0,05; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6.

8.12. Вероятность хотя бы одного появления события при четырех независимых опытах равна 0,59. Какова вероятность появления события A при одном опыте, если при каждом опыте эта вероятность одинакова?

8.13. Вероятность появления некоторого события в каждом из восемнадцати независимых опытов равна 0,2. Определить вероятность появления этого события по крайней мере три раза.

8.14. Вероятность выигрыша на каждый из лотерейных билетов равна 0,02. Рассчитать вероятности хотя бы одного выигрыша на n билетов для $n = 1, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100$, если считать, что билеты принадлежат разным сериям.

8.15. Если известно, что на лотерейный билет выпал выигрыш, то вероятности того, что выигрышем будет велосипед или стиральная машина, равны соответственно 0,03 и 0,02. Найти вероятность выигрыша хотя бы одного из этих предметов на 10 выигравших лотерейных билетов, выбранных из разных серий.

8.16. Игра состоит в набрасывании колец на колышек. Игрок получает 6 колец и бросает кольца до первого попадания. Найти вероятность того, что хотя бы одно кольцо останется неизрасходованным, если вероятность попадания при каждом броске равна 0,1.

8.17. Определить вероятность получения не менее 28 очков при трех выстрелах из спортивного пистолета по мишени с максимальным числом очков, равным 10, если вероятность получения 30 очков равна 0,008. Известно, что при одном выстреле вероятность получения восьми очков равна 0,15, а менее восьми очков—0,4.

8.18. Два баскетболиста делают по три броска мячом в корзину. Вероятности попадания мяча при каждом броске равны соответственно 0,6 и 0,7. Найти вероятность того, что: а) у обоих будет равное количество попаданий; б) у первого баскетболиста будет больше попаданий, чем у второго.

8.19. Вероятность того, что лампа останется исправной после 1000 часов работы, равна 0,2. Какова вероятность того, что хотя бы одна из трех ламп останется исправной после 1000 часов работы?

8.20. Трое рабочих на своих станках производят изделий только отличного и хорошего качества, причем первый и второй из них производят изделия отличного качества с вероятностью 0,9, а третий—с вероятностью 0,8. Один из этих рабочих изготовил 8 изделий, среди которых 2 хороших. Какова вероятность, что среди следующих 8 изделий, изготовленных тем же рабочим, будут 2 хороших и 6 от-

личных?

8.21. Для победы в волейбольном состязании команда необходимо выиграть три партии из пяти; команды неравносильны. Определить вероятность выигрыша в каждой партии для первой команды, если для уравнивания шансов она должна дать фору: а) в две партии; б) в одну партию

8.22. Матч между двумя шахматистами проводится на следующих условиях: 1) учитываются только результативные партии; 2) выигравшим считается тот, кто первым наберет четыре очка при условии, что у противника при этом не более двух очков; 3) если у обоих игроков по три очка, то выигрывает тот, кто первым наберет пять очков.

Определить вероятности выигрыша матча для каждого из игроков, если вероятности выигрыша каждой партии относятся, как три к двум.

8.23. Для прикуривания гражданин пользовался двумя коробками спичек, доставая наудачу ту или иную коробку. Через некоторое время он обнаружил, что одна коробка пуста. Какова вероятность, что во второй коробке при этом k спичек, если вначале в каждой коробке было по n спичек?

(Задача Банаха).

8.24. Вероятность попадания стрелком в десятку равна $0,7$, а в девятку— $0,3$. Определить вероятность того, что данный стрелок при трех выстрелах наберет не менее 29 очков.

8.25. Во время каждого из опытов на 1 час в цепь включается батарея мощностью в 120 вт или в 200 вт ; вероятности благоприятного исхода опыта равны соответственно $0,06$ и $0,08$. Результат проведенной серии опытов считается достигнутым в случае хотя бы одного благоприятного исхода опыта с батареей в 200 вт , или хотя бы двух с батареей в 120 вт . Общая энергия, затраченная на производство всех опытов, не может превышать 1200 вт . Какие батареи выгоднее использовать?

8.26. Прибор выходит из строя, если перегорит не менее пяти ламп I типа или не менее двух ламп II типа. Определить вероятность выхода из строя прибора, если известно, что перегорело пять ламп, а вероятности перегорания ламп I и II типов равны соответственно $0,7$ и $0,3$.

8.27. Вероятность возникновения опасной для прибора перегрузки в каждом опыте равна $0,4$. Определить вероятность отказа прибора в серии из трех независимых опытов.

если вероятности отказа прибора при одной, двух и трех опасных перегрузках соответственно равны $0,2$; $0,5$ и $0,8$.

8.28. Вероятность участия в каждом из опытов любого из n одинаковых объектов равна p ($p < 1/n$). Если данный объект участвовал в опытах ровно k раз, результат опытов считается достигнутым. Определить вероятность достижения результата после m опытов.

8.29. В условиях предыдущей задачи определить вероятность достижения результата при $(2k-1)$ опытах, если после достижения намеченного результата опыты прекращаются.

8.30. Вероятность отказа каждого прибора при испытании

равна 0,2. Сколько таких приборов нужно испытать, чтобы с вероятностью не менее 0,9 получить не меньше трех отказов?

8.31. Пункт A нужно связать с 10 абонентами пункта B . Каждый абонент занимает линию 12 минут в час. Вызовы любых двух абонентов независимы. Какое минимальное количество каналов необходимо для того, чтобы можно было в любой момент с вероятностью 0,99 обслужить всех абонентов?

8.32. Последовательно послано четыре радиосигнала. Вероятности приема каждого из них не зависят от того, приняты ли остальные сигналы, и соответственно равны 0,1; 0,2; 0,3 и 0,4. Определить вероятность приема k сигналов ($k = 0, 1, 2, 3, 4$).

8.33. Используя условия предыдущей задачи, определить вероятность установления двусторонней радиосвязи, если вероятность этого события при приеме одного сигнала равна 0,2, при приеме двух равна 0,6, а при приеме трех и четырех — единице.

8.34. Вероятности перегорания первой, второй и третьей ламп равны соответственно 0,1; 0,2 и 0,3. Вероятности выхода из строя прибора при перегорании одной, двух и трех ламп равны соответственно 0,25; 0,6 и 0,9. Определить вероятность выхода прибора из строя.

8.35. Охотник стреляет в лося с расстояния 100 м и попадает в него с вероятностью 0,5. Если при первом выстреле попадания нет, то охотник стреляет второй раз, но с расстояния 150 м. Если нет попадания и в этом случае, то охотник стреляет третий раз, причем в момент выстрела расстояние до лося равно 200 м. Считая, что вероятность попадания обратно пропорциональна квадрату расстояния, определить вероятность попадания в лося.

8.36. Сколько чисел необходимо взять из таблицы случайных чисел, чтобы с наибольшей вероятностью обеспечилось появление среди них трех чисел, оканчивающихся цифрой 7?

8.37. Вероятность попадания в десятку при одном выстреле $p = 0,2$. Сколько нужно произвести независимых выстрелов, чтобы с вероятностью не менее 0,9. попасть в десятку хотя бы один раз?

8.38. За один цикл автомат изготавливает 10 деталей. За какое количество циклов вероятность изготовления хотя бы одной бракованной детали будет не менее 0,8, если вероятность того, что любая деталь бракованная, равна 0,01?

8.39. На прямой через 60 см один от другого расположены центры окружностей, диаметры которых одинаковы и равны 1 см. Несколько таких прямых устанавливаются параллельно друг другу в одной плоскости, причем относительный сдвиг линий равновозможен на любую величину от 0 до 60 см. Перпендикулярно этим линиям в той же плоскости перемещается круг радиуса 7 см. Какое количество линий должно быть, чтобы вероятность пересечения окружности перемещающегося круга с какой-либо окружностью была не менее 0,9?

8.40. Из ящика, в котором 20 белых и 2 черных шара, n раз извлекаются шары по одному, причем после каждого извлечения шар возвращается. Определить наименьшее число извлечений, при котором вероятность достать хотя бы один раз

черный шар будет больше половины.

8.41. Для данного баскетболиста вероятность забросить мяч в корзину при броске равна 0,4. Произведено 10 бросков.

Найти наивероятнейшее число попаданий и соответствующую вероятность.

8.42. Найти наивероятнейшие числа отрицательных и положительных ошибок и соответствующую вероятность при четырех измерениях, если при каждом измерении вероятность получения положительной ошибки равна $2/3$, а отрицательной — $1/3$.

§ 9. Полиномиальное распределение. Рекуррентные формулы. Производящие функции

Основные формулы

Вероятность того, что при n независимых опытах, в каждом из которых может произойти только одно из событий A_1, A_2, \dots, A_m , соответственно с вероятностями p_1, p_2, \dots, p_m , события A_k ($k = 1, 2, \dots, m$) произойдут ровно n_k раз $\left(\sum_{k=1}^m n_k = n\right)$, определяется формулой полиномиального распределения

$$P_{n; n_1, n_2, \dots, n_m} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_m^{n_m}$$

Вероятность $P_{n; n_1, n_2, \dots, n_m}$ является коэффициентом при

$u_1^{n_1} u_2^{n_2} \dots u_m^{n_m}$ в следующей производящей функции:

$$G(u_1, u_2, \dots, u_m) = (p_1 u_1 + p_2 u_2 + \dots + p_m u_m)^n$$

Производящая функция для $n + N$ независимых опытов является произведением производящих функций для n и соответственно для N опытов. Использование этого свойства часто существенно упрощает вычисление искомых вероятностей. Для этих же целей применяется соответствующая замена аргументов в производящей функции. Если, например, нужно определить вероятность того, что событие A_1 при n испытаниях появится на l раз больше, чем событие A_2 , то в производящей функции следует положить $u_2 = 1/u$, $u_1 = u$, $u_j = 1$ ($j = 3, 4, \dots, m$). Искомая вероятность является коэффициентом при u^l в разложении по степеням u функции

$$G(u) = \left(p_1 u + \frac{p_2}{u} + \sum_{j=3}^m p_j \right)^n. \text{ Если } p_k = \frac{1}{m} (k=1, 2, \dots, m)$$

и требуется определить вероятность того, что сумма номеров появившихся событий равна r , то искомая вероятность является коэффициентом при u^r в разложении по степеням u функции

$$G(u) = \frac{1}{m^n} u^n (1 + u + \dots + u^{m-1})^n = \frac{u^n}{m^n} \left(\frac{1 - u^m}{1 - u} \right)^n$$

При разложении $G(u)$ в ряд удобно для $(1 - u)^{-n}$ использовать следующее разложение:

$$(1 - u)^{-n} = 1 + C_n^{n-1} u + C_{n+1}^{n-1} u^2 + C_{n+2}^{n-1} u^3 + \dots$$

Факториалы больших чисел могут быть найдены на таблицы логарифмов, этих величин [2Г] или вычислены по формуле Стирлинга

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \dots \right).$$

Вероятность появления события при n опытах иногда может быть получена с помощью соотношений (рекуррентных формул) вида

$$p_k = a_k p_{k-1} + b_k p_{k-2},$$

где a_k и b_k —известные постоянные. Искомая вероятность определяется переходом от n к $n + 1$ после расчета по исходным данным вероятностей для нескольких значений k .

Решение типовых примеров

Пример 9.1. Вероятности того, что диаметр любой детали меньше допустимого, больше допустимого и в допустимых пределах, равны соответственно 0,05; 0,10 и 0,85. Из общей партии берутся наудачу 100 деталей. Определить вероятность того, что среди них будет пять деталей с меньшим диаметром и пять деталей с большим диаметром.

Решение. Пусть событие A_1 —выбрана наудачу деталь первого, A_2 —второго и A_3 —третьего типа. По условию $p_1=0,05$, $p_2=0,10$, $p_3=0,85$. Всего производится $n = 100$ опытов. Определяется вероятность p того, что при этом события A_1 и A_2 произойдут по пяти раз. Тогда $n_1 = n_2 = 5$, $n_3 = 90$. Поэтому искомая вероятность

$$p = P_{100; 5, 5, 90} = \frac{100!}{5!5!90!} 0,05^5 \cdot 0,1^5 \cdot 0,85^{90}.$$

Логарифмируя данное равенство; находим

$$\lg p = \lg 100! - \lg 90! - 2 \lg 5! + 5 \lg 5 + 90 \lg 0,85 = 15.$$

Воспользовавшись таблицей для логарифмов факториалов и таблицей десятичных логарифмов, получаем

$$\lg p = \bar{3},7824, \quad \text{т. е.} \quad p \approx 0,006.$$

Аналогично решаются задачи 9.1—9.7 и 9.25.

Пример 9.2. При каждом испытании вероятность появления события равна p . С какой вероятностью оно произойдет четное число раз при n испытаниях?

Решение. Обозначим через p_k вероятность того, что после k опытов событие произойдет четное число раз.

Перед k -м опытом можно сделать две гипотезы: при $(k - 1)$ -м опыте событие произошло четное или нечетное число раз. Вероятности этих гипотез равны соответственно P_{k-1} и $1 - P_{k-1}$.

Тогда

$$p_k = p_{k-1}(1 - p) + (1 - p_{k-1})p,$$

т. е.

$$p_k = p + p_{k-1}(1 - 2p).$$

Представив последнее выражение в виде

$$\left(p_k - \frac{1}{2}\right) = (1 - 2p) \left(p_{k-1} - \frac{1}{2}\right) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

и перемножив левые и правые части всех n таких равенств.

получим

$$\prod_{k=1}^n \left(p_k - \frac{1}{2}\right) = (1 - 2p)^n \prod_{k=1}^n \left(p_{k-1} - \frac{1}{2}\right).$$

Сокращая обе части равенства на

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(p_k - \frac{1}{2} \right)$$

находим

$$p_n - \frac{1}{2} = (1 - 2p)^n \left(p_0 - \frac{1}{2} \right)$$

Так как $p_0 = 1$, то искомая вероятность будет

$$p_n = \frac{1}{2} [1 + (1 - 2p)^n]$$

Аналогично решаются задачи 9.8—9.13 и 9.26. Пример 9.3.

Определить вероятность получения билета, у которого равны суммы первых трех и последних трех цифр номера, если номер шестизначный и может "быть любым от 000 000 до 999 999.

Решение. Рассмотрим сначала первые три цифры номера.

Так как они произвольны, то можно считать, что производится три опыта ($n = 3$), в результате каждого из

которых с вероятностью $p = 1/10$ появляется одна из цифр. В

данном случае число событий $m = 10$, вероятности

$p_k = 1/10$ ($k = 0, 1, \dots, 9$), а производящая функция имеет вид

$$G_1(u_0, u_1, \dots, u_9) = \frac{1}{10^3} \left(\sum_{k=0}^9 u_k \right)^3$$

где индекс k и u_k указывает на то, что в результате опыта появляется число k .

Положим $u_k = u^k$. Тогда у функции

$$G_1(u) = \frac{1}{10^3} \left(\sum_{k=0}^9 u^k \right)^3 = \frac{1}{10^3} \left(\frac{1 - u^{10}}{1 - u} \right)^3$$

коэффициент при u^σ равен вероятности того, что сумма первых трех цифр номера билета равна σ . Аналогично у функции

$$G_2(u) = \frac{1}{10^3} \left(\frac{1 - u^{-10}}{1 - u^{-1}} \right)^3$$

коэффициент при u^σ равен вероятности того, что сумма последних трех цифр номера билета равна σ . Но тогда у функции

$$G(u) = G_1(u) G_2(u) = \frac{1}{10^6 u^{27}} \left(\frac{1-u^{10}}{1-u} \right)^6$$

коэффициент при u^0 равен искомой вероятности того что суммы первых трех и последних трех цифр номера билета равны.

Имеем

$$(1 - u^{10})^6 = 1 - C_6^1 u^{10} + C_6^2 u^{20} - \dots,$$

$$(1 - u)^{-6} = 1 + C_6^5 u + C_7^5 u^2 + \dots$$

Поэтому искомая вероятность будет

$$p = \frac{1}{10^6} (C_{32}^5 - C_6^1 C_{22}^5 + C_6^2 C_{12}^5) = 0,05525.$$

Аналогично решаются задачи 9.14—9.24.

Задачи

9.1. В урне имеется три шара: черный, красный и белый. Из урны шары по одному извлекались 5 раз, причем после каждого извлечения шар возвращался обратно. Определить вероятность того, что черный и белый шары извлечены не менее чем по два раза каждый.

9.2. Рабочий производит с вероятностью 0,90 годное изделие, с вероятностью 0,09 — изделие с устранимым браком и с вероятностью 0,01 — с неустранимым браком. Произведено три изделия. Определить вероятность того, что среди них хотя бы одно годное изделие и хотя бы одно с устранимым браком.

9.3. Каждый из девяти шаров с одинаковой вероятностью может быть помещен в один из трех первоначально пустых ящиков. Определить вероятность того, что: а) в каждый ящик попало по три шара; б) в один ящик попало четыре шара, в другой — три, а в оставшийся — два шара.

9.4. По мишени, состоящей из внутреннего круга и двух концентрических колец, производится десять выстрелов из спортивного пистолета. Вероятности попадания в указанные области при каждом выстреле равны соответственно 0,15; 0,22 и 0,13. Определить вероятность того, что при этом будет шесть попаданий в круг, три — в первое кольцо и одно попадание во второе кольцо.

9.5. Прибор имеет четыре блока, в каждом из которых имеются электронные лампы. Если известно, что одна лампа вышла из строя, то вероятности того, что эта лампа принадлежит данному блоку, равны соответственно $p_1 = 0,6111$, $P_2 = P_3 = 0,0664$, $P_4 = 0,2561$ и не зависят от того, сколько ламп вышло из строя до этого. Определить вероятность прекращения работы прибора при выходе из строя четырех ламп, если прибор прекращает работать как при выходе из строя хотя бы одной лампы из первого блока, так и в том

случае, когда и во втором и в третьем - блоках выходят из строя хотя бы по одной лампе.

9.6. В электропоезд, состоящий из шести вагонов, садится двенадцать человек, причем выбор каждым пассажиром вагона равновозможен. Определить вероятность того, что; а) в каждый вагон вошло по два человека; б) в один вагон никто не вошел, в другой — вошел один человек, в два вагона - по два человека, а в оставшиеся два вагона соответственно три и четыре человека.

9.7. Урна содержит l белых, m черных и n красных шаров. Производится $l_1+m_1+n_1$ извлечений шаров по одному с возвращением каждого извлеченного шара. Определить вероятность того, что будет извлечено; а) сначала l_1 белых, затем m_1 черных и наконец n_1 красных шаров; б) l_1 белых, m_1 черных и n_1 красных шаров, причем все шары одного цвета появляются подряд, но последовательность цветов может быть любой; в) l_1 белых, m_1 черных и n_1 красных шаров в любой последовательности.

9.8. Определить вероятность того, что при n бросаниях монеты герб появится нечетное число раз.

9.9. Два равносильных противника играют в шахматы до тех пор, пока один из них не выиграет на две партии больше, чем другой. Какова вероятность, что будет сыграно $2n$ результативных партий?

9.10. Двое играют до тех пор, пока один из них не выиграет все деньги у другого. Определить вероятность того, что при этом будет сыграно ровно n партий, если все ставки одинаковы, каждый игрок в начале игры имеет по три ставки, а вероятность выигрыша в любой партии для каждого из игроков равна половине.

9.11. Два игрока продолжают игру до полного разорения одного из них. Капитал первого игрока равен n рублей, второго — m рублей. Вероятности выигрыша каждой партии для этих игроков равны соответственно p и q ($p+q=1$). В каждой партии выигрыш одного игрока (проигрыш другого) равен одному рублю. Определить вероятности разорения для каждого из игроков.

9.12. В шахматы играют $n+1$ равносильных игроков, причем каждый по очереди играет с победителем. Игра продолжается до тех пор, пока один из игроков не выиграет подряд у всех n противников. Какова вероятность, что при

этом будет сыграно ровно m результативных партий (ничьи не учитываются)?

9.13. Матч между двумя равносильными шахматистами происходит на следующих условиях:

- 1) учитываются только результативные партии;
- 2) победившим считается набравший шесть очков, если его противник набрал не более четырех очков;
- 3) если у одного шесть, а у другого пять выигранных партий, то игра продолжается до тех пор, пока разрыв не составит два очка.

Определить вероятность того, что результативных партий придется играть: а) не более десяти; б) ровно n .

9.14. Вероятность появления события в каждом из n опытов одинакова и равна p . Доказать, что производящей функцией для вероятностей появления события менее $n - m$ раз является функция

$$G(u) = \frac{(p + qu)^n}{1 - u}.$$

9.15. Вероятность появления события в k -м опыте равна p_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Доказать, что производящими функциями для вероятностей появления события соответственно не более m и не менее $n - m$ раз при n независимых опытах являются функции

$$G_1(u) = \frac{\prod_{k=1}^n (q_k + p_k u)}{1 - u} \quad \text{и} \quad G_2(u) = \frac{\prod_{k=1}^n (p_k + q_k u)}{1 - u}.$$

9.16. Два стрелка производят по n выстрелов, причем каждый стреляет по своей мишени. Определить вероятность того, что у них будет по одинаковому числу попаданий, если вероятность попадания при каждом выстреле постоянна и равна половине.

9.17. В каждом из двух одинаковых приборов - левом и правом - имеется по две лампы. После 100 часов работы только в одном приборе с вероятностью $1/4$ перегорает одна лампа и с вероятностью $1/16$ —обе лампы. Определить вероятность того что в n парах таких приборов лампы в левых приборах перегорит по крайней мере на m ($m \leq 2n$) больше, чем в правых. Рассчитать эту вероятность для случая, когда $n=m=3$.

9.18, Матч на звание чемпиона мира по шашкам состоит из двадцати партий. Определить вероятность того, что матч закончится с результатом 12:8, если вероятности выигрыша каждой партии для обоих игроков равны 0,2.

9.19. Для победы в матче за звание чемпиона мира по шахматам претенденту необходимо набрать не менее $12\frac{1}{2}$ очков из 24 возможных. При ничейном исходе (12: 12) звание чемпиона мира сохраняется за чемпионом. Встречаются два равносильных противника, у которых вероятности выигрыша каждой партии в два раза меньше вероятности ничейного исхода. Определить: а) вероятность того, что чемпионом мира останется прежний чемпион, и вероятность того, что чемпионом мира станет претендент; б) вероятность того, что в матче будет сыграно двадцать партий.

9.20, Определить вероятность того, что при бросании n игральных костей (кубиков) сумма очков на верхних гранях будет а) равна заданному числу m , б) не больше m . Найти эти вероятности при $n = 10$, $m = 20$.

9.21. Определить вероятность получения билета, у которого сумма цифр номера равна 21, если номер билета равновозможен от 0 до 999 999.

9.22. Каждая из n величин X_1, X_2, \dots, X_n с одинаковой вероятностью может принимать любое целое положительное значение от 1 до m . Найти вероятность того, что сумма $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ будет а) равна заданному числу N ($nm \leq N \leq n$); б) не меньше заданного числа N .

9.23. Два стрелка производят по три выстрела каждый в свою мишень. Один стрелок при каждом выстреле с одинаковой вероятностью выбивает любое количество очков от 7 до 10, а для другого вероятности выбить 7 и 10 очков равны $1/8$, а вероятности выбить 8 и 9 очков равны $3/8$. Найти вероятность того, что: а) первый стрелок выбьет 25 очков; б) второй стрелок выбьет 25 очков; в) оба стрелка выбьют одинаковое количество очков.

9.24. Бросают две монеты. Определить вероятность того, что равное количество гербов будет при n -м бросании монет (не раньше).

9.25. Определить вероятность необходимости повторного голосования при выборе l человек, если голосуют n человек; вероятность быть вычеркнутым для каждого из k кандидатов одинакова и равна p а для выбора кандидата необходимо

получить большинство голосов. Повторное голосование производится в том случае, если будет равное число голосов у l -го и $(l + 1)$ -го кандидатов (по числу полученных голосов).

9.26. Две равносильные волейбольные команды играют одну партию. Игра продолжается до тех пор, пока одна команда не будет иметь по крайней мере на два очка больше, чем другая, причем наименьшее необходимое число очков равно 15.

Определить вероятности: а) P_k и Q_k , выигрыша первой (подающей первый мяч) и второй команд со счетом $15:k$ ($k=0, 1, \dots, 13$); б) P_l и Q_l выигрыша для обеих команд, когда проигравшая команда имеет не более 13 очков; в) p_k и q_k , выигрыша со счетом $(16+k) : (14+k)$ ($k = 0, 1, \dots$); г) P_{II} и Q_{II} выигрыша, когда каждая команда потеряла не менее 14 очков; д) P и Q выигрыша первой и второй команд.

ГЛАВА II

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

§ 10. Ряд, многоугольник и функция распределения вероятностей дискретных случайных величин

Основные формулы

Случайная величина называется дискретной, если ее частные (возможные) значения можно пронумеровать.

Дискретная случайная величина X может быть задана:

1) рядом распределения, 2) функцией распределения (интегральным законом распределения).

Рядом распределения называется совокупность всех возможных значений x_i и соответствующих им вероятностей $p_i = P(X = x_i)$. Ряд распределения может быть задан в виде таблицы (табл. 2) или формулой.

Таблица 2

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

Вероятности p_i удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1,$$

где число возможных значений n может быть конечным или бесконечным.

Графическое изображение ряда распределения называется многоугольником распределения. Для его построения воз-

возможные значения случайной величины (x_i)-откладываются по оси абсцисс, а вероятности p_i —по оси ординат; точки A_i с координатами (x_i, p_i) соединяются ломаными линиями (рис. 9).

Функцией распределения (интегральным законом распределения) случайной величины X называется функция $F(x)$,

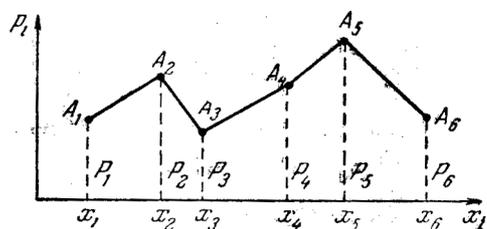


рис. 9.

равная вероятности $P(X < x)$ того, что случайная величина будет меньше произвольно выбранного значения x . Функция $F(x)$ вычисляется по формуле

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i$$

где суммирование ведется по всем значениями i , для которых $x_i < x$.

Решение типовых примеров

Пример 10.1. Из партии, состоящей из 100 изделий, среди которых имеется 10 бракованных, выбраны случайным образом пять изделий для проверки их качества. Построить ряд распределения случайного числа X бракованных изделий, содержащихся в выборке.

Решение. Так как в выборке число бракованных изделий может быть любым целым числом в пределах от 0 до 5 включительно, то возможные значения x_i случайной величины X равны:

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3, x_5 = 4, x_6 = 5$$

Вероятность $P(X = k)$ того, что в выборке окажется ровно k ($k=0, 1, 2, 3, 4, 5$) бракованных изделий, равна

$$P(X = k) = \frac{C_{10}^k C_{90}^{5-k}}{C_{100}^5}$$

В результате расчетов по данной формуле с точностью до 0,001 получим:

$$p_1 = P(X = 0) = 0,583, \quad p_2 = P(X = 1) = 0,340,$$

$$p_3 = P(X = 2) = 0,070,$$

$$p_4 = P(X = 3) = 0,007, \quad p_5 = P(X = 4) = 0,$$

$$p_6 = P(X = 5) = 0.$$

Используя для проверки равенство $\sum_{k=1}^6 p_k = 1$,

убеждаемся что расчеты и округление произведены правильно (см. табл. 3).

Таблица 3

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,583	0,340	0,070	0,007	0	0

Аналогично решаются задачи 10.13 и 10.14.

Пример 10.2. Изделия испытываются при перегрузочных режимах. Вероятности для каждого изделия пройти испытания равны $4/5$ и независимы. Испытания заканчиваются о после первого же изделия, не выдержавшего испытания. Вывести формулу для ряда распределения числа испытаний.

Решение. Испытания заканчиваются на k -м изделии ($k=1, 2, 3, \dots$), если первые $k-1$ изделий пройдут испытания, а k -е изделие не выдержит испытаний.

Если X — случайное число испытаний, то

$$P(X = k) = \left(1 - \frac{1}{5}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Полученная формула для ряда распределения эквивалентна таблице 4.

Таблица 4

x_i	1	2	3	...	k	...
p_i	1/5	4/5 ²	4 ² /5 ³	...	4 ^{k-1} /5 ^k	...

Особенность данной задачи состоит в том, что теоретически число испытаний может быть бесконечно большим, однако вероятность такого события стремится к нулю:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(X = k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{4^{k-1}}{5^k} = 0.$$

Аналогично решаются задачи 10.2, 10.4, 10.5, 10.7, 10.10 и 10.12.

Пример 10.3. На пути движения автомашины четыре светофора. Каждый из них с вероятностью 0,5 либо разрешает, либо запрещает автомашине дальнейшее движение.

Построить многоугольник распределения вероятностей числа светофоров, пройденных автомашиной до первой остановки.

Решение. X —случайное число светофоров, пройденных автомашиной до первой остановки; оно может принимать следующие значения:

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3, x_5 = 4.$$

Вероятности $p_i = P(X = x_i)$ того, что число пройденных светофоров X будет равно данному частному значению, вычисляются по формуле

$$p_i = P(X = x_i) = \begin{cases} p(1-p)^{i-1} & \text{для } i = 1, 2, 3, 4, \\ (1-p)^4 & \text{для } i = 5, \end{cases}$$

где p — вероятность светофору задержать автомашину ($p = 0,5$).

В результате вычислений получим $p_1 = 0,5$, $p_2 = 0,25$, $p_3 = 0,125$, $p_4 = 0,0625$, $p_5 = 0,0625$. По полученным данным строим многоугольник распределения вероятностей (рис. 10).

Аналогично решаются задачи 10.3, 10.8, 10.9.

Пример 10.4. Космическая ракета имеет прибор, состоящий из четырех блоков A_1 , A_2 , A_3 и A_4 , каждый из которых дает отказ при попадании в него хотя бы одной элементарной частицы. Отказ прибора в целом наступает

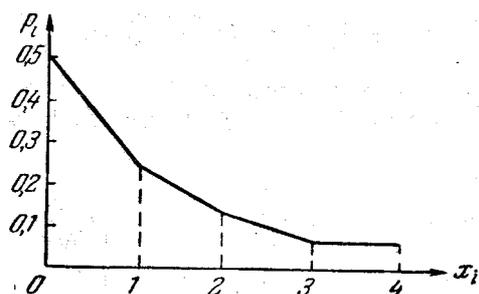


Рис. 10.

как при отказе блока A_1 ? так и при одновременном отказе всех трех блоков A_2 , A_3 и A_4 .

Построить функцию распределения $F(x)$ случайного числа X частиц, после попадания которых в прибор он дает отказ, если вероятность частице, попавшей в прибор, попасть в блок A_1 ; равна $p_1 = 0,4$, а в блоки A_2 , A_3 и A_4 соответственно равна $p_2 = p_3 = p_4 = 0,2$.

Решение. Обозначим A_1 , A_2 , A_3 и A_4 , события, состоящие в поражении блоков A_1 , A_2 , A_3 и A_4 , соответственно. Искомая функция распределения $F(x)$ равна вероятности того, что при числе попаданий $n < x$ прибор не выйдет из строя, т. е.

$$F(x) = P(\overline{A_1 + A_2 A_3 A_4}).$$

Используя формулу (см. § 5)

$$\begin{aligned} \overline{A_1 + A_2 A_3 A_4} &= \overline{A_1}(\overline{A_2} + \overline{A_3} + \overline{A_4}) = \overline{A_1}\overline{A_2} + \overline{A_1}\overline{A_3} + \overline{A_1}\overline{A_4} = \\ &= (\overline{A_1 + A_2}) + (\overline{A_1 + A_3}) + (\overline{A_1 + A_4}) \end{aligned}$$

и применяя формулу сложения вероятностей, получим

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 - P[(\overline{A_1 + A_2}) + (\overline{A_1 + A_3}) + (\overline{A_1 + A_4})] = \\ &= 1 - P(\overline{A_1 + A_2}) - P(\overline{A_1 + A_3}) - P(\overline{A_1 + A_4}) + \\ &\quad + P[(\overline{A_1 + A_2})(\overline{A_1 + A_3})] + P[(\overline{A_1 + A_2})(\overline{A_1 + A_4})] + \\ &\quad + P[(\overline{A_1 + A_3})(\overline{A_1 + A_4})] - P[(\overline{A_1 + A_2})(\overline{A_1 + A_3})(\overline{A_1 + A_4})], \end{aligned}$$

где все вероятности определяются при условии попадания в прибор n частиц. Так как $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$ и при

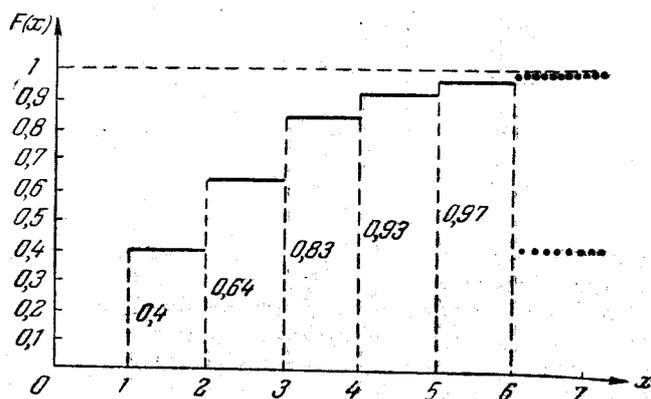


Рис. 11.

каждом попадании частицы в прибор обязательно дает отказ один и только один из блоков, то

$$\begin{aligned}
P(\overline{A_1 + A_2}) &= (p_3 + p_4)^n; & P(\overline{A_1 + A_3}) &= (p_2 + p_4)^n; \\
P(\overline{A_1 + A_4}) &= (p_2 + p_3)^n; \\
P[(\overline{A_1 + A_2})(\overline{A_1 + A_3})] &= p_4^n; & P[(\overline{A_1 + A_2})(\overline{A_1 + A_4})] &= p_3^n; \\
P[(\overline{A_1 + A_3})(\overline{A_1 + A_4})] &= p_2^n; \\
P[(\overline{A_1 + A_2})(\overline{A_1 + A_3})(\overline{A_1 + A_4})] &= 0.
\end{aligned}$$

Таким образом/учитывая, что $p_2 = p_3 = p_4 = 0,2$, получим

$$F(x) = 1 + 3p_2^n - 3(2p_2)^n = 1 - 3p_2^n(2^n - 1) = 1 - 3 \frac{(2^{[x]} - 1) 2^{[x]}}{10^{[x]}}$$

где под $[x]$ понимается наибольшее целое число, меньшее x , например $[5,9] = 5$, $[5] = 4$.

Таким образом, график функции распределения вероятностей для нескольких начальных значений x имеет вид, Представленный на рис. 11.

Аналогично решаются задачи 10.6 и 10.11.

Задачи

10.1. Построить ряд распределения и функцию распределения случайного числа попаданий мячом в корзину при одном броске, если вероятность попадания мячом в корзину при одном броске $p = 0,3$.

10.2. Опыт состоит из трех независимых бросаний монеты, при каждом из которых герб выпадает с вероятностью $p = 0,5$. Для случайного числа появлений герба построить:

- а) ряд распределения; б) многоугольник распределения;
- в) функцию распределения.

10.3. Производятся последовательные испытания пяти приборов на надежность. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, если предыдущий оказался надежным. Построить ряд распределения случайного числа испытанных приборов, если вероятность выдержать испытания для каждого из них равна 0,9.

10.4. Независимые опыты продолжаются до первого положительного исхода, после чего они прекращаются. Найти для случайного числа опытов: а) ряд распределения; б) многоугольник распределения; в) наивероятнейшее число опытов, если вероятность положительного исхода при каждом опыте равна 0,5.

10.5. Два баскетболиста поочередно забрасывают мяч в корзину до тех пор, пока один из них не попадет. Построить ряд распределения случайного числа бросков, производимых каждым из баскетболистов, если вероятность попадания для первого равна 0,4, а для второго 0,6.

10.6. Мишень состоит из круга № 1 и двух колец с номерами 2 и 3. Попадание в круг № 1 дает 10 очков, в ко-

лицо № 2 дает 5 очков, в кольцо № 3 дает —1 очко. Вероятности попадания в круг № 1 и кольца № 2 и 3 соответственно равны 0,5; 0,3; 0,2. Построить ряд распределения для случайной суммы выбитых очков в результате трех попаданий.

10.7. Опыт производится с помощью серии одинаковых приборов, которые включаются один за другим через 5 сек. Время срабатывания прибора 16 сек. Опыт прекращается сразу же после того, как сработает хотя бы один прибор.

Найти ряд распределения для случайного числа включенных приборов, если вероятность сработать для каждого прибора равна $1/2$. **10.8.** Имеется n заготовок для одной и той же детали. Вероятность изготовления годной детали из каждой заготовки равна p . а) Найти ряд распределения числа заготовок, оставшихся после изготовления первой годной детали, б) Построить ряд распределения для случайного числа использованных заготовок.

10.9. Производятся испытания n изделий на надежность. причем вероятность выдержать испытания для каждого изделия равна p . Построить ряд распределения случайного числа изделий, выдержавших испытания.

10.10. Прибор, состоящий из блоков a, b_1 и b_2 дает отказ в случае осуществления события $C = A + B_1 B_2$ где A — отказ блока a , B_1 и B_2 — отказы блоков b_1 и b_2 соответственно. Отказы происходят при попадании в блок хотя бы одной космической частицы. Построить ряд распределения числа случайных частиц, попадание которых в прибор приводит к его отказу, если вероятности попадания в блоки частицы, попавшей в прибор, равны $P(A) = 0,5$, $P(B_1) = P(B_2) = 0,25$.

10.11. Опыт может быть удачным с вероятностью p или неудачным с вероятностью $(1-p)$. Вероятность получения благоприятного результата при m удачных опытах $P(m) =$

$1 - \left(1 - \frac{1}{\omega}\right)^m$. Построить ряд распределения числа опытов, которые необходимо поставить для достижения благоприятного результата.

10.12. Число проведенных опытов X случайно и может изменяться в пределах от 0 до ∞ . Вероятность $P(X = k) =$

$$= \frac{n^k e^{-n}}{k!};$$

Каждый опыт может быть успешным с вероятностью p и неуспешным с вероятностью $(1-p)$. Построить ряд распределения числа успешных опытов.

10.13. Вероятность получения герба при каждом из пяти бросаний монеты равна 0,5. Составить ряд распределения отношения числа X появлений герба к числу Y появлений решетки.

10.14. Построить ряд распределения суммы цифр трехзначных случайных чисел.

§ 11. Функция распределения и плотность вероятности непрерывной случайной величины

Основные формулы

Непрерывной случайной величиной называется такая, которая может принимать любые числовые значения в заданном интервале и для которой при любом x из этого интервала существует предел

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x}$$

именуемый плотностью вероятности.

Непрерывная случайная величина задается либо функцией распределения $F(x)$ (интегральным законом распределения), либо плотностью вероятности $f(x)$ (дифференциальным законом распределения).

Функция распределения $F(x) = P(X < x)$, где x — произвольное действительное число, дает вероятность того, что случайная величина X окажется меньше x .

Функция распределения $F(x)$ имеет следующие основные свойства:

$$1) P(a \leq X < b) = F(b) - F(a);$$

$$2) F(x_1) \leq F(x_2), \text{ если } x_1 < x_2;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0.$$

Плотность вероятности (дифференциальный закон распределения) $f(x)$ обладает следующими основными свойствами:

$$1) f(x) \geq 0;$$

$$2) f(x) = \frac{dF(x)}{dx};$$

$$3) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1;$$

$$4) P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x) dx.$$

Величина x_p , определяемая равенством $F(x_p) = p$, называется квантилем; квантиль $x_{0.5}$ называют медианой. Если плотность имеет максимум, то значение x , при котором $f(x) = \max$, называется модой.

Понятие плотности вероятности $f(x)$ может быть введено и для дискретной случайной величины, если положить

$$f(x) = \sum_{k=1}^n p_k \delta(x - x_k),$$

где x_k — возможные значения случайной величины, p_k — соответствующие им вероятности:

$$p_k = P(X = x_k),$$

$\delta(x)$ — обозначение дельта-функции, т. е. такой функции что

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0, \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \delta(y-x) dx = \varphi(y),$$

где $\omega(x)$ —любая непрерывная в точке $x=y$ функция. Для $\delta(x)$ справедливо следующее аналитическое представление где интеграл понимается в смысле его главного значения. (См., например, И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилор. «Обобщенные функции и действия над ними».)

Решение типовых примеров

Пример 11.1. Проекция X радиуса-вектора случайной точки окружности радиуса a на диаметр имеет функцию распределения (закон арксинуса)

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geq a; \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x}{a} & \text{при } -a < x < a; \\ 0 & \text{при } x \leq -a. \end{cases}$$

Определить: а) вероятность того, что X окажется в пределах промежутка $(-a/2, a/2)$ б) квантиль $x_{0,75}$; в) плотность вероятности $f(x)$ случайной величины X ; г) моду и медиану распределения.

Решение, а) Вероятность того, что X окажется в пределах $(-a/2, a/2)$, равна

$$P\left(-\frac{a}{2} < X < \frac{a}{2}\right) = F\left(\frac{a}{2}\right) - F\left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

б) По условию $p = 0,75$; решая уравнение

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x_{0,75}}{a} = 0,75,$$

находим

$$x_{0,75} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

в) Плотность вероятности $f(x)$ случайной величины X равна:

1) для всех x , принадлежащих промежутку $(-a, a)$,

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x}{a} \right) = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}};$$

2) нулю для всех остальных значений x .

г) Модой распределения называется значение аргумента, при котором плотность вероятности достигает максимума. Закон арксинуса моды не имеет, так как функция

$$f(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}$$

не имеет максимума. Медианой распределения называется величина $x_{0,5}$, определяемая равенством $F(x_{0,5}) = 1/2$. Решая уравнение

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x_{0,5}}{a} = \frac{1}{2},$$

находим $x_{0,5} = 0$.

Аналогично решаются задачи 11.1—11.8.

Пример 11.2. Плотность вероятности случайной величины равна

$$f(x) = ax^2e^{-kx} \quad (k > 0, 0 \leq x < \infty).$$

Требуется: а) найти коэффициент a ; б) найти функцию распределения случайной величины X ; в) вычислить вероятность попадания случайной величины в интервал $(0, 1/k)$.

Решение, а) Коэффициент a определяем с помощью равенства

$$\int_0^{\infty} ax^2e^{-kx} dx = 1.$$

Отсюда

$$a = \frac{1}{\int_0^{\infty} x^2e^{-kx} dx}.$$

Двукратным интегрированием по частям получаем

$$\int_0^{\infty} x^2e^{-kx} dx = \frac{2}{k^3}$$

Следовательно, $a = k^3/2$ и плотность вероятности имеет вид

$$f(x) = \frac{k^3}{2} x^2e^{-kx}$$

б) Функция распределения $F(x)$ случайной величины X определяется по формуле

$$F(x) = \int_0^x \frac{k^3}{2} x^2e^{-kx} dx = 1 - \frac{k^2x^2 + 2kx + 2}{2} e^{-kx}.$$

в) Вероятность $P(0 < X < 1/k)$ попадания случайной величины X в заданный промежуток вычисляется по формуле

$$P\left(0 < X < \frac{1}{k}\right) = F\left(\frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{5}{2e} \approx 0,086.$$

Аналогично решаются задачи 11.9, 11.10, 11.12. Пример 11.3.

Электронная аппаратура имеет три параллельные дублирующие линии. Вероятность выхода из строя каждой линии за время гарантийного срока работы аппаратуры в целом равна 0,1.

Используя дельта-функцию, написать выражение для плотности вероятности случайного числа линий, вышедших из строя за время гарантийного срока, если выход из строя одной линии не зависит от того, работают или вышли из строя другие линии.

Решение. Обозначим через X случайное число линий, вышедших из строя. Случайная величина X дискретного типа

имеет следующий ряд распределения (табл. 5):

Таблица 5

x_k	0	1	2	3
p_k	0,729	0,243	0,027	0,001

Пользуясь понятием плотности вероятности для дискретной случайной величины, получим

$$f(x) = 0,729\delta(x) + 0,243\delta(x-1) + 0,027\delta(x-2) + 0,001\delta(x-3),$$

Аналогично решается задача 11.15.

Задачи

11.1. Функция распределения равномерно распределенной случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ x & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

1 при $x > 1$. Найти плотность вероятности случайной величины X .

11.2. Дана функция распределения случайной величины

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (\text{закон нормального распределения}).$$

Найти плотность вероятности случайной величины X .

11.3. В книге Г. Крамера [25] дана функция распределения годовых доходов лиц, облагаемых налогом;

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^\alpha & \text{при } x \geq x_0, \\ 0 & \text{при } x < x_0 \end{cases} \quad (\alpha > 0).$$

Определить размер годового дохода, который для случайно выбранного налогоплательщика может быть превзойден с вероятностью 0,5.

11.4. Функция распределения случайного времени безотказной работы радиоаппаратуры, имеет вид

$$F(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}} \quad (t \geq 0).$$

Найти: а) вероятность безотказной работы аппаратуры в течение времени T . б) плотность вероятности $f(t)$.

11.5. Случайная величина эксцентриситета детали характеризуется функцией распределения Рэлея

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (x \geq 0).$$

Найти: а) моду распределения; б) медиану распределения; в) плотность вероятности $f(x)$.

11.6. Функция распределения Вейбулла

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x^m}{x_0}} \quad (x \geq 0)$$

в ряде случаев характеризует срок службы элементов электронной аппаратуры.

Найти: а) плотность вероятности $f(x)$; б) квантиль распределения порядка p ; в) моду распределения.

11.7. Случайное время простоя радиоэлектронной аппаратуры в ряде случаев имеет плотность вероятности

$$f(x) = \frac{M}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\lg x - \lg x_0)^2}{2\sigma^2}}$$

где $M = \lg e = 0,4343\dots$ (логарифмически нормальный закон распределения).

Найти: а) моду распределения при $x_0 = 1$ и $\sigma = \sqrt{5M}$; б) функцию распределения.

11.8. Дана функция распределения случайной величины X :

$$F(x) = a + b \arctg \frac{x}{2} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (\text{закон Коши}).$$

Определить: а) постоянные a и b ; б) плотность вероятности; в) $P(\alpha < X < \beta)$.

11.9. Каково должно быть a , чтобы $f(x) = ae^{-x^2}$ являлось плотностью вероятности случайной величины X , изменяющейся в бесконечных пределах?

11.10. При каком значении a функция

$$f(x) = \frac{a}{1+x^2} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

является плотностью вероятности случайной величины X ?

Найти: а) функцию распределения случайной величины X ;
б) вероятность попадания случайной величины в интервал $(-1, 1)$.

11.11. Шкала секундомера имеет цену делений 0,2 сек. Какова вероятность сделать по этому секундомеру отсчет времени с ошибкой более 0,05 сек., если отсчет делается с точностью до целого деления с округлением в ближайшую сторону?

11.12. Азимутальный лимб имеет цену делений 1° . Какова вероятность при считывании азимутального угла сделать ошибку в пределах $\pm 10'$, если отсчет округляется до ближайшего целого числа градусов?

11.13. Известно, что вероятность выхода из строя электронной лампы в течение Δx дней, с точностью до величины порядка малости более высокого чем Δx , равна $k \Delta x$ независимо от величины x дней, которые лампа проработала до интервала времени Δx . Какова вероятность выхода из строя лампы в течение l дней?

11.14. Линия трамвая имеет протяженность L . Вероятность того, что пассажир сядет в трамвай в окрестности точки x , пропорциональна $x(L-x)^2$, а вероятность того, что пассажир, вошедший в точке x , выйдет в точке y , пропорциональна $(y-x)^h$, $h/0$.

Найти вероятность того, что: а) пассажир сядет в трамвай ранее пункта z , б) пассажир, севший в трамвай в точке x , выйдет после пункта z .

11.15. Последовательные ускоренные испытания приборов на надежность производятся до первого отказа, после чего они прекращаются. Пользуясь понятием плотности вероятности для дискретной случайной величины, найти плотность вероятности случайного числа испытанных приборов, если вероятность отказа для всех приборов одна и та же и равна 0,5.

§ 12. Числовые характеристики дискретных случайных величин

Основные формулы

В качестве числовых характеристик дискретных случайных величин чаще всего используются моменты этих величин.

Начальные m_k и центральные μ_k , моменты k -го порядка дискретных случайных величин определяются формулами

$$m_k = M[X^k] = \sum_{i=1}^n x_i^k p_i,$$

$$\mu_k = M[(X - \bar{x})^k] = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^k p_i,$$

где $M[X^k]$ - математическое ожидание X^k , x_i - возможные значения случайной величины X , p_i - соответствующие им вероятности, а \bar{x} - математическое ожидание X . Таким образом, начальный момент первого порядка определяется формулой

$$\bar{x} = M[X] = \sum_{i=1}^n x_i p_i,$$

второй центральный момент, или дисперсия, - формулой

$$D[X] = M[(X - \bar{x})^2] = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 p_i$$

или формулой

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2.$$

Среднее квадратическое отклонение σ определяется соотношением

$$\sigma = \sqrt{D[X]}.$$

Если вероятности различных значений случайной величины X зависят от событий A_k , то условное математическое ожидание случайной величины X при условии A_k есть

$$M[X | A_k] = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i | A_k).$$

Если A_k ($k = 1, 2, \dots, m$) образуют полную группу событий,

т. е.

$$\sum_{k=1}^m P(A_k) = 1,$$

то полное математическое ожидание X связано с условным математическим ожиданием формулой

$$M[X] = M\{M[X | A_k]\} = \sum_{k=1}^m M[X | A_k] P(A_k).$$

Во всех приведенных выше формулах число слагаемых в суммах может быть бесконечным; в этом случае для существования соответствующего математического ожидания сумма должна сходиться абсолютно.

Решение типовых примеров

Пример 12.1. Партия, насчитывающая 100 изделий, содержит 10 бракованных. Из всей партии случайным образом отбираются с целью проверки качества 5 изделий (случайная выборка). Найти математическое ожидание числа бракованных изделий, содержащихся в случайной выборке.

Решение. Случайное число бракованных изделий, содержащихся в выборке, имеет следующие возможные значения:

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3, x_5 = 4, x_6 = 5,$$

Вероятности $p_i = P(X=x_i)$ того что X принимает данное значение x_i равны (см. пример 10.1)

$$p_i = \frac{C_{10}^{i-1} C_{90}^{6-i}}{C_{100}^5} \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Искомое математическое ожидание

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^6 (i-1) \frac{C_{10}^{i-1} C_{90}^{6-i}}{C_{100}^5} = \frac{1}{C_{100}^5} \sum_{j=0}^5 j C_{10}^j C_{90}^{5-j}.$$

Так как $\sum_{j=0}^5 j C_{10}^j C_{90}^{5-j}$ есть коэффициент при u^5 в произведении

$(1+u)^{10} (1+u)^{90}$ то $\sum_{j=0}^5 j C_{10}^j C_{90}^{5-j}$ есть коэффициент при u^5 в выражении

$$\frac{\partial}{\partial t} \{(1+tu)^{10} (1+u)^{90}\} \Big|_{t=1} = 10u (1+u)^{99}.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=0}^5 j C_{10}^j C_{90}^{5-j} = 10 C_{99}^4, \text{ а } \bar{x} = \frac{10 C_{99}^4}{C_{100}^5} = 0,5.$$

Аналогично решаются задачи 12.1 и 12.2. Пример 12.2.

Дискретная случайная величина X задана рядом распределения $p_k = P(X=k)$, $k=1, 2, 3, \dots$. Выразить математическое ожидание случайной величины X через производящую функцию $G(u)$ (см. § 9).

Решение. По определению математического ожидания случайной величины

$$M[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k.$$

С другой стороны, значение производной от производящей функции, вычисленное при $u=1$, равно

$$G'(1) = \frac{dG(u)}{du} \Big|_{u=1} = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k u^{k-1} \Big|_{u=1} = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k.$$

следовательно

$$M[X] = G'(1)$$

Аналогично решаются задачи 12.3—12.6 и 12.24—12.26. Пример 12.3. Опыт может быть успешным с вероятностью p и неуспешным с вероятностью $1 - p$.

Условная вероятность достижения намеченного результата после m успешных опытов $P(m)$ равна

$$P(m) = 1 - (1 - 1/\omega)^m \quad (\omega > 1).$$

Найти математическое ожидание числа независимых опытов, необходимых для достижения намеченного результата.

Решение. Обозначим $P_n(A)$ вероятность достижения намеченного результата при n опытах. Если $P_{n,m}$ - вероятность иметь ровно m успешных из общего числа n опытов, то согласно формуле полной вероятности

$$P_n(A) = \sum_{m=0}^n P_{n,m} P(m).$$

Так как опыты независимы и вероятность успешного исхода в каждом из них равна p , то

$$P_{n,m} = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m}.$$

Подставляя в формулу для $P_n(A)$ значения $P_{n,m}$ и $P(m)$, получим

$$\begin{aligned} P_n(A) &= \sum_{m=0}^n C_n^m p^m (1 - p)^{n-m} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{1}{\omega}\right)^m \right\} = \\ &= 1 - \left(1 - \frac{p}{\omega}\right)^n. \end{aligned}$$

Для достижения намеченного результата потребуется ровно n опытов, если при n -м опыте он будет достигнут. Вероятность последнего события равна $P_n(A) - P_{n-1}(A)$. Следовательно, $M[X]$ — математическое ожидание случайного числа опытов, необходимых для достижения намеченного результата:

$$\begin{aligned} M[X] &= \sum_{n=1}^{\infty} n [P_n(A) - P_{n-1}(A)] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \left\{ \left(1 - \frac{p}{\omega}\right)^{n-1} - \left(1 - \frac{p}{\omega}\right)^n \right\} = \frac{p}{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(1 - \frac{p}{\omega}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Для вычисления последней суммы воспользуемся равенством

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{1-x} \right] = \frac{1}{(1-x)^2},$$

при $|x| < 1$. Полагая в данном случае получим

$$M[X] = \frac{p}{\omega} \frac{1}{\left[1 - \left(1 - \frac{p}{\omega}\right)\right]^2} = \frac{\omega}{p}$$

Аналогично решаются задачи 12.10—12.15, 12.21 и 12.31.

Пример 12.4. Прибор имеет n предохранителей. В случае перегрузки сгорает один из предохранителей, который заменяется новым. Каково математическое ожидание $M[N]$ числа перегрузок N , после которых в приборе окажутся замененными все первоначально установленные предохранители, если выход из строя в момент перегрузки любого из n предохранителей (как незамененного, так и нового) равновероятен?

Решение. Обозначим $M[N | k]$ математическое ожидание числа перегрузок, после которых все первоначально установленные n предохранителей окажутся замененными, если остались незамененными k предохранителей.

Для вычисления $M[N | k]$ воспользуемся формулой полного математического ожидания. Если остались незамененными k предохранителей ($k < n$), то для повреждения одного из них потребуется очередная перегрузка. В зависимости от результатов очередной перегрузки будут различными средние числа перегрузок, необходимых для сгорания предохранителей, оставшихся из числа первоначально установленных.

При очередной перегрузке могут произойти два события:

A_1 — сгорел один из первоначально установленных предохранителей, вероятность чего $P(A_1) = k/n$;

A_2 — сгорел замененный предохранитель, вероятность чего $P(A_2) = 1 - k/n$.

Если при очередной перегрузке произойдет событие A_1 то математическое ожидание числа перегрузок для замены всех k предохранителей, не замененных до очередной пере-

грузки, будет равно $1 + M[N | k - 1]$. Если же при очередной перегрузке произойдет событие A_2 то это математическое ожидание будет равно $1 + M[N | k]$. На основании формулы полного математического ожидания имеем

$$M[N | k] = \frac{k}{n} \{1 + M[N | k - 1]\} + \left(1 - \frac{k}{n}\right) \{1 + M[N | k]\} = \\ = 1 + \frac{k}{n} M[N | k - 1] + \frac{n - k}{n} M[N | k]$$

или после несложных преобразований,

$$M[N | k] - M[N | k - 1] = \frac{n}{k}.$$

Если $k = 1$, т. е. остался лишь один незамененный предохранитель, то вероятность его замены равна $1/n$. Следовательно, на основании примера 12.3 будем иметь

$$M[N | 1] = n.$$

Итак, имеем цепь равенств:

$$M[N | n] - M[N | n - 1] = \frac{n}{n},$$

$$M[N | n - 1] - M[N | n - 2] = \frac{n}{n - 1},$$

.....

$$M[N | 3] - M[N | 2] = \frac{n}{3},$$

$$M[N | 2] - M[N | 1] = \frac{n}{2},$$

$$M[N | 1] = n.$$

суммируя которые, получим n

$$M[N | n] = \frac{n}{n} + \frac{n}{n - 1} + \frac{n}{n - 2} + \dots + \frac{n}{3} + \frac{n}{2} + n$$

или

$$M[N] = M[N | n] = n \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n - 1} + \frac{1}{n}\right).$$

Аналогично решаются задачи 12.16, 12.20, 12.22 и 12.23.

Пример 12.5. В результате испытания двух приборов (A и B) установлена вероятность наблюдения помех, оцениваемых по трехбалльной системе (табл. 6).

Таблица 6

Уровень помех		1	2	3
Вероятность наблюдения помех данного уровня	Прибор A	0,20	0,06	0,04
	Прибор B	0,06	0,04	0,10

По приведенным данным выбрать лучший прибор, если лучшим является тот, который в среднем имеет меньший уровень помех.

Решение. Обозначим через X случайный уровень помех. Средний уровень помех для прибора A .

$$M_A[X] = 0,20 \cdot 1 + 0,06 \cdot 2 + 0,04 \cdot 3 = 0,44 \text{ балла.}$$

Для прибора B

$$M_B[X] = 0,06 \cdot 1 + 0,04 \cdot 2 + 0,10 \cdot 3 = 0,44 \text{ балла.}$$

Итак, по среднему баллу оба прибора равноценны. В качестве дополнительного критерия сравнения используем среднее квадратическое отклонение уровня помех:

$$\begin{aligned} \sigma_A &= \sqrt{D_A[X]} = \sqrt{M_A[X^2] - (\bar{x}_A)^2} = \\ &= \sqrt{0,80 - 0,44^2} \approx 0,78 \text{ балла,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_B &= \sqrt{D_B[X]} = \sqrt{M_B[X^2] - (\bar{x}_B)^2} = \\ &= \sqrt{1,12 - 0,44^2} \approx 0,96 \text{ балла.} \end{aligned}$$

Таким образом, прибор A дает более устойчивые показания относительно средних, и, следовательно, он лучше прибора B .

Задачи

12.1. Определить математическое ожидание числа приборов, давших отказ за время испытаний на надежность, если испытанию подвергается один прибор, а вероятность его отказа p .

12.2. Считая, что вес тела с одинаковой вероятностью может быть равен любому целому числу граммов от 1 до 10, определить, при какой из трех систем разновесов; а) 1, 2, 2, 5, 10; б) 1, 2, 3, 4, 10; в) 1, 1, 2, 5, 10—среднее число необходимых для взвешивания гирь будет наименьшим, если при взвешивании разрешается гири ставить только на одну чашку, а подбор гирь при взвешивании осуществляется так, чтобы использовать наименьшее возможное число гирь.

12.3. Испытуемый прибор состоит из пяти элементов. Вероятность отказа для элемента с номером i равна $p_i = 0,2 + 0,1(i - 1)$.

Определить математическое ожидание и дисперсию числа отказавших элементов, если отказы элементов независимы.

12.4. Производятся независимые испытания трех приборов. Вероятность отказа каждого прибора соответственно равна p_1 , p_2 и p_3 . Доказать, что математическое ожидание числа отказавших приборов равно $p_1 + p_2 + p_3$.

12.5. Определить математическое ожидание числа приборов, отказавших в работе за время испытаний, если вероятность отказа для всех приборов одна и та же и равна p , а число испытываемых приборов n .

12.6. В лотерее имеется m_1 выигрышей стоимостью k_1 , m_2 стоимостью k_2 , ..., m_n — стоимостью k_n . Всего билетов N . Каковую стоимость билета следует установить, чтобы математическое ожидание выигрыша на один билет равнялось половине его стоимости?

12.7. Первый игрок бросает 3, а второй 2 одинаковых монеты. Выигрывает и получает все 5 монет тот, у которого выпадает большее число гербов. В случае ничьей игра повторяется до получения определенного результата. Каково математическое ожидание выигрыша для каждого из игроков?

12.8. Три игрока A , B , C играют на следующих условиях: в

каждой партии участвуют двое; проигравший уступает место третьему; первую партию играют A с B . Вероятность выигрыша в каждой партии для каждого игрока равна $\frac{1}{2}$. Игра продолжается до тех пор, пока один из игроков не выиграет подряд 2 раза. При этом он получает сумму m рублей. Каково математическое ожидание выигрыша для каждого игрока: а) после первой партии при условии, что A ее выиграл; б) в начале игры?

12.9. Три игрока A , B , C играют на следующих условиях: в каждой партии участвуют двое; проигравший уступает место третьему; первую партию играют A с B . Вероятность выигрыша в каждой партии для каждого игрока равна $\frac{1}{2}$. Игра продолжается до тех пор, пока один из игроков не выиграет подряд 2 раза; при этом он получает сумму выигрыша, равную числу всех сыгранных партий. Каково математическое ожидание выигрыша для игроков A и C до начала игры?

12.10. Автоматическая линия при нормальной настройке может выпускать бракованное изделие с вероятностью p . Переналадка линии производится сразу после первого же бракованного изделия. Найти среднее число всех изделий, изготовленных между двумя переналадками линии.

12.11. Вероятность приема позывного сигнала одной радиостанции другой радиостанцией равна $0,2$ при каждой посылке. Позывные подаются каждые 5 сек. до тех пор пока не будет получен ответный сигнал. Общее время прохождения позывного и ответного сигналов равно 16 сек. Найти среднее число подаваемых позывных сигналов до установления двусторонней связи.

12.12. Найти математическое ожидание и дисперсию числа изделий, изготавливаемых на поточной линии при нормальной настройке за период между двумя переналадками, если при нормальной настройке вероятность изготовления бракованного изделия равна p , а переналадка производится после изготовления k -го бракованного изделия.

12.13. Условная вероятность отказа прибора, вычисленная в предположении о неработоспособности m элементов, имеет вид:

а) для прибора A

$$P(m) = 1 - e^{-\alpha m} \quad (\alpha > 0; m = 0, 1, 2, \dots);$$

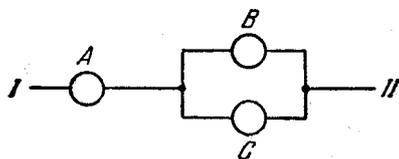
б) для прибора B

$$P(m) = \begin{cases} 0 & \text{при } m = 0, \\ 1 - e^{-\alpha(m-1)} & \text{при } m = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Найти математическое ожидание числа неработоспособных элементов, приводящих к отказам приборов A и B .

12.14. Блокировочная схема, состоящая из реле A , включенного последовательно с двумя реле B и C , соединенными параллельно, должна обеспечить замыкание цепи между,

клеммами I и II (рис. 12). Вследствие неисправности реле A может не сработать с вероятностью 0,18, а реле B и C — с одинаковыми вероятностями, равными 0,22. Определить среднее число включений схемы до первого отказа блокировочной схемы. рис. 12



12.15. Прибор имеет элементы A , B и C , уязвимые к космическому излучению и дающие отказ при попадании в них хотя бы одной частицы. Отказ прибора наступает в случае отказа элемента A или совместного отказа элементов B и C . Определить математическое ожидание числа частиц, попадание которых в прибор приводит к его отказу, если условные вероятности попадания в элементы A , B и C частицы, уже попавшей в прибор, соответственно равны 0,1; 0,2; 0,2.

12.16. Прибор имеет n элементов типа A и m элементов типа B . В случае отказа элементов типа A они не заменяются, а работа прибора продолжается до тех пор, пока в схеме есть хотя бы один исправный элемент типа B . Элементы типа B в случае отказа вводятся в действие повторным включением так, что число исправных элементов типа B в схеме остается постоянным. Отказ любого из исправных элементов прибора равновозможен. Определить среднее число отказов элементов, приводящих к полному отказу прибора, т. е. к выходу из строя всех n элементов типа A .

12.17. Доказать, что дисперсия числа появлений события при однократном производстве опыта не превосходит $1/4$.

12.18. Определить условия, для которых третий центральный момент биномиального распределения равен нулю.

12.19. Функция распределения случайной величины X задана равенством

$$F(x) = \sum_{m < x} C_n^m p^m (1-p)^{n-m}.$$

Доказать, что если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} np = a, \text{ то } \lim_{n \rightarrow \infty} D[X] = a.$$

12.20. Из урны, содержащей весьма большое число белых и черных шаров, смешанных в равной пропорции, вынимаются последовательно 10 шаров. Шары, вынутые до первого появления черного шара, возвращаются в урну; первый появившийся черный шар и все последующие перекладываются во вторую, первоначально пустую, урну. Определить математическое ожидание числа белых и черных шаров во второй урне.

Решить ту же задачу в предположении, что число вынутых шаров является случайным и подчиняется закону Пуассона с параметром $a = 10$, т. е.

$$P(n = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}.$$

12.21. Игра заключается в том, что монету бросают до появления герба. Если герб выпал при k -м бросании монеты, то игрок A получает k рублей от игрока B . Сколько рублей должен

уплатить игрок Л игроку В перед началом игры для того, чтобы математические ожидания проигрыша для каждого игрока равнялись нулю (чтобы игра была «безобидной»)?

12.22. Автоколонна может прибыть на станцию обслуживания в любой момент времени. При организации дежурства n ремонтных рабочих способом А среднее число обслуживаемых машин равно $n p$. При организации дежурства способом В будет обслужено: $n[1 - (1 - p)^2]$ машин, если автоколонна прибывает в первые две четверти суток; $n p$ машин, если автоколонна прибывает в третью четверть суток; $0,5 n p$ машин, если автоколонна прибывает в четвертую четверть суток.

При каких значениях p следует предпочесть организацию дежурства способом В?

12.23. Рабочий обслуживает n однотипных станков, расположенных в ряд с равными промежутками a . Закончив обслуживание какого-либо станка, рабочий переходит к тому станку, который раньше других потребовал обслуживания. Предполагая, что неполадка в любом из n станков равновероятна, вычислить среднее значение длины перехода рабочего.

12.24. Случайная величина X может получать целые положительные значения с вероятностями, убывающими в геометрической прогрессии. Выбрать первый член и знаменатель прогрессии q так, чтобы математическое ожидание величины X было равно 10, и вычислить при этом условии вероятность P_{10} того, что $X \leq 10$.

12.25. Случайная величина X может иметь любое целое положительное значение n с вероятностью, пропорциональной $1/3^n$. Найти математическое ожидание X .

12.26. Опыт организован таким образом, что случайная величина X принимает значение $1/n$ с вероятностью $1/n$, где n — любое целое положительное число. Найти $M[X]$.

12.27. Игра состоит в том, что повторяются независимые опыты, в каждом из которых событие A может произойти с вероятностью p . Если событие A произошло в $n > 0$ опытах подряд, а в $(n + 1)$ -м опыте не произошло, то первый игрок получает от второго игрока y^n рублей. Если же $n = 0$, то первый игрок платит второму игроку 1 рубль. Требуется найти величину y при условии, что игра будет «безобидной», т. е. математическое ожидание выигрыша для обоих игроков равно 0. Рассмотреть пример $p = 1/13$.

12.28. Из сосуда, содержащего m белых и n черных шаров, извлекаются шары до тех пор, пока не появится белый шар. Найти математическое ожидание числа вынутых черных шаров и его дисперсию, если каждый шар после извлечения возвращался.

12.29. Даны два ящика с белыми и черными шарами; в первом ящике при общем числе шаров N находится M белых шаров, а во втором ящике имеется M_1 белых шаров при общем числе N_1 шаров. Опыт состоит в том, что из обоих ящиков вынимается одновременно наудачу по одному шару, который кладется в другой ящик, после чего шары перемешиваются. Определить математическое ожидание числа белых шаров в первом ящике по окончании указанных k опытов. Рассмотреть

случай $k > 5$:

12.30. Связь с дрейфующей станцией могут поддерживать n радиостанций. Вступает в двустороннюю связь та, которая первой примет позывные дрейфующей станции, причем это событие равновероятно для всех n радиостанций

($p = 1/n$) Дрейфующая станция будет устанавливать связь m раз. Определить вероятность того, что радиостанция № 1 вступит в двустороннюю связь k раз. Найти для нее же математическое ожидание и дисперсию числа вступлений в двустороннюю связь.

12.31. Независимые испытания аппаратуры повторяются до тех пор, пока она не даст отказ. Вероятность отказа от испытания к испытанию не меняется и равна p . Найти математическое ожидание и дисперсию числа безотказных испытаний.

12.32. Двое поочередно бросают монету до тех пор, пока у обоих не выпадает одинаковое число гербов. Вероятность того, что после $2n$ бросаний у обоих будет одинаковое количество гербов, равна

$$P_n = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1} n! (n-1)!}.$$

Определить математическое ожидание числа бросаний.

§ 13. Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Основные формулы

Математическое ожидание $\bar{x} = M[X]$ и дисперсия $D[X]$ случайной величины X , имеющей плотность вероятности $f(x)$, вычисляются по формулам

$$\bar{x} = M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx,$$

$$D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx.$$

В первом случае предполагается, что интеграл сходится абсолютно.

Математические ожидания и дисперсии непрерывных случайных величин обладают такими же свойствами, что и аналогичные вероятностные характеристики дискретных случайных величин. Среднее квадратическое отклонение σ определяется формулой

$$\sigma = +\sqrt{D[X]}.$$

Для симметричного закона распределения характеристикой рассеивания случайной величины может служить среднее отклонение E , определяемое из условия

$$P(|X - \bar{x}| < E) = \frac{1}{2}.$$

Начальный момент k -го порядка m_k и центральный момент k -го порядка μ_k вычисляются по формулам

$$m_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx,$$

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^k f(x) dx.$$

Решение типовых примеров

Пример 13.1. Плотность вероятности случайных амплитуд боковой качки корабля имеет вид (закон Рэлея)

$$f(x) = \frac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \quad (x \geq 0).$$

Определить: а) математическое ожидание $M[X]$; б) дисперсию $D[X]$ и среднее квадратическое отклонение σ ; в) центральные моменты третьего и четвертого порядков μ_3 и μ_4

Решение. Вычисление моментов сводится к вычислению интегралов вида

$$J_n = \int_0^{\infty} t^n e^{-t^2} dt \quad (n > 0 \text{ целое}),$$

которые равны при n четном

$$J_{2k} = \frac{1}{2} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}} \sqrt{\pi},$$

где

$(2k-1)!! = (2k-1)(2k-3)(2k-5)\dots 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$, и при n нечетном

$$J_{2k+1} = \frac{1}{2} \Gamma(k+1) = \frac{k!}{2}.$$

а) Математическое ожидание случайной амплитуды боковой качки равно

$$\bar{x} = M[X] = \int_0^{\infty} x f(x) dx = \frac{1}{a^2} \int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx.$$

Произведя замену переменных $\frac{x}{a\sqrt{2}} = t$, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[X] &= 2\sqrt{2}a \int_0^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt = 2\sqrt{2}a J_2 = \\ &= 2\sqrt{2} \frac{\sqrt{\pi}}{4} a = a \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\bar{x} = \mathbf{M}[X] = a \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

б) Так как

$$\sigma_x^2 = \mathbf{D}[X] = \mathbf{M}[X^2] - (\bar{x})^2 = 4a^2 J_3 - \frac{\pi}{2} a^2 = a^2 \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{то } \sigma_x = a \sqrt{2 - \frac{\pi}{2}}.$$

$$\text{в) } \mu_3 = \mathbf{M}[(X - \bar{x})^3] = m_3 - 3\bar{x}m_2 + 2(\bar{x})^3,$$

где

$$m_3 = 4\sqrt{2}a^3 J_4 = 3a^3 \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Следовательно,

$$\mu_3 = a^3 (\pi - 3) \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\mu_4 = \mathbf{M}[(X - \bar{x})^4] = m_4 - 4\bar{x}m_3 + 6\bar{x}^2 m_2 - 3\bar{x}^4,$$

$$\text{где } m_4 = 8a^4 J_5 = 8a^4. \text{ Следовательно, } \mu_4 = a^4 \left(8 - \frac{3}{4} \pi^2\right)$$

Аналогично решаются задачи 13.1—13.13 и 13.22—13.23.

Пример 13.2. Найти среднее отклонение случайной величины, плотность вероятности которой имеет вид (распределение Лапласа.)

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}.$$

Решение. Так как плотность, вероятности симметрична относительно нуля, то $\bar{x} = 0$. Среднее отклонение E вычисляется по формуле

$$\frac{1}{2} = \mathbf{P}(|X - \bar{x}| < E) = \int_{-E}^E \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = \int_0^E e^{-x} dx = 1 - e^{-E}.$$

Отсюда $E = \ln 2 = 0,6931$. Аналогично решаются задачи 13.1 и 13.4.

Задачи

13.1. Плотность вероятности случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2l} & \text{при } |x - a| \leq l, \\ 0 & \text{при } |x - a| > l. \end{cases}$$

Определить: а) $M[X]$; б) $D[X]$; в) найти связь между средним квадратическим и средним отклонениями случайной величины X .

13.2. Функция распределения случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -1, \\ a + b \arcsin x & \text{при } -1 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{при } 1 \leq x. \end{cases}$$

Определить постоянные a и b . Найти $M[X]$ и $D[X]$.

13.3. Определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины X , если плотность вероятности

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2\rho}{E\sqrt{\pi}} e^{-\rho^2 \frac{x^2}{E^2}} & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

13.4. Плотность вероятности случайной величины X имеет вид (закон арксинуса)

$$f(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \quad (-a \leq x \leq a).$$

Определить дисперсию и среднее отклонение.

13.6. Плотность вероятности случайных амплитуд A боковой качки корабля определяется формулой (закон Рэлея)

$$f(a) = \frac{a}{\sigma^2} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}},$$

где σ^2 - дисперсия угла крена.

Одинаково ли часто встречаются амплитуды, меньшие и большие средней?

13.6. Скорость молекул газа имеет плотность вероятности (закон Максвелла)

$$f(v) = Av^2 e^{-h^2 v^2} \quad (v \geq 0).$$

Найти математическое ожидание и дисперсию скорости молекул, а также величину A при заданном h .

13.7. Плотность вероятности случайной величины X задана в виде

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \frac{x^m}{m!} e^{-x} & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Определить $M[X]$ и $D[X]$.

13.8. Функция распределения случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x_0^3}{x^3} & \text{при } x \geq x_0, \\ 0 & \text{при } x \leq x_0 \end{cases} \quad (x_0 > 0).$$

Найти $M[X]$ и $D[X]$.

13.9. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, плотность вероятности которой имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \quad (\text{распределение Лапласа}).$$

13.10. Случайная величина X имеет плотность вероятности (гамма-распределение)

$$f(x) = \begin{cases} Ax^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}} & \text{при } x \geq 0 \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (\alpha > -1; \beta > 0).$$

Определить параметр A , математическое ожидание и дисперсию случайной величины X .

13.11. Случайная величина X имеет плотность вероятности (бета-распределение)

$$f(x) = \begin{cases} Ax^{a-1}(1-x)^{b-1} & \text{при } 0 \leq x \leq 1 \quad (a > 0; b > 0), \\ 0 & \text{при } x < 0 \text{ и } x > 1. \end{cases}$$

Определить параметр A , математическое ожидание и дисперсию случайной величины X .

13.12. Случайная величина X имеет плотность вероятности

$$f(x) = A(1 + x^2)^{-\frac{n+1}{2}},$$

где $n > 1$ — целое положительное число. Определить постоянную A , математическое ожидание и дисперсию случайной величины X .

13.13. Плотность вероятности неотрицательной случайной величины X имеет вид

$$f(x) = Ax^{n-2}e^{-\frac{x^2}{2}},$$

Определить A , математическое ожидание и дисперсию случайной величины X .

13.14. Доказать, что при выполнении условий

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [xF(x)] = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \{x[1 - F(x)]\} = 0$$

для математического ожидания случайной величины справедливо равенство

$$M[X] = \int_0^{\infty} [1 - F(x)] dx = \int_{-\infty}^0 F(x) dx.$$

13.15. Вероятность обнаружения затонувшего судна за время поиска t задается формулой

$$p(t) = 1 - e^{-\gamma t} \quad (\gamma > 0).$$

Определить среднее время поиска, необходимое для обнаружения судна.

13.16. Определить математическое ожидание $m(t)$ массы радиоактивного вещества спустя время t , если в начальный момент масса вещества была m_0 , а вероятность распада ядра любого атома в единицу времени постоянна и равна p .

13.17. Определить время полураспада радиоактивного вещества, если вероятность распада ядра любого атома в единицу времени постоянна и равна p . (Время полураспада T_n определяется моментом, когда масса радиоактивного вещества в среднем уменьшается вдвое.)

13.18. Обработка результатов одной переписи показала, что дифференциальный закон распределения возраста лиц,

занимающихся научной работой, может быть представлен формулой

$$f(t) = k(t - 22,5)(97,5 - t)^5$$

(t - время в годах, $22,5 \leq t \leq 97,5$).

Определить, во сколько раз число научных работников в возрасте ниже среднего превышает число научных работников в возрасте выше среднего.

13.19. Найти для распределения Стьюдента, задаваемого плотностью вероятности

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},$$

начальные моменты m_k при $k < n$.

13.20. Случайная величина X подчиняется бета - распределению, т. е. имеет плотность вероятности

$$f(x) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1}$$

($0 < x < 1$; $p > 0$; $q > 0$).

Найти начальный момент k -го порядка.

13.21. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, имеющей в интервале $(-\pi/2 ; \pi/2)$ плотность вероятности $2/\pi \cos^2 x$.

13.22. Выразить центральный момент μ_k через начальные моменты.

13.23. Выразить начальный момент m_k через центральные моменты и математическое ожидание \bar{x} .

§ 14. Закон Пуассона

Основные формулы

Законом распределения Пуассона называется ряд распределения случайной величины X вида

$$P(X = m) = P_m = P(m, a) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$$

где

$$a = M[X].$$

Законом Пуассона может быть приближенно заменено биномиальное распределение, когда вероятность p появления события A в каждом отдельном опыте мала, а число n производимых опытов велико. В этом случае имеет место приближенное равенство

$$P_{n,m} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \approx \frac{a^m}{m!} e^{-a},$$

Где $a = np$.

Решение типовых примеров

Пример 14.1. Радиоаппаратура состоит из 1000 электроэлементов. Вероятность отказа одного элемента в течение одного года работы равна 0,001 и не зависит от состояния других элементов. Какова вероятность отказа двух и не менее двух электроэлементов за год?

Решение. Считая случайное число X отказавших элементов подчиняющимся закону Пуассона $P(X = m) = P_m =$

$$= \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \text{ где } a = np = 1000 \cdot 0,001 = 1, \text{ получим:}$$

1) вероятность отказа ровно двух элементов

$$P(X = 2) = P_2 = \frac{a^2}{2!} e^{-a} = \frac{1}{2e} \approx 0,184;$$

2) вероятность отказа не менее двух элементов

$$P(X \geq 2) = \sum_{m=2}^{\infty} P_m = 1 - P_0 - P_1 = 1 - e^{-a}(1 + a) =$$

$$= 1 - \frac{2}{e} \approx 0,264.$$

Аналогично решаются задачи 14.1—14.7.

Пример 14.2. При разрыве баллона в процессе испытания на прочность образовалось 100 осколков, распределившихся в конусе разлета, ограниченном углами 30° и 60° (рис. 13), равномерно. Найти математическое ожидание и дисперсию числа осколков, приходящихся на 1 м^2 части поверхности сферы, находящейся внутри конуса разлета, если радиус сферы 50 м , а центр ее совпадает с точкой разрыва.

Решение. Пересечем конус разлета осколков сферой радиуса 50 м и определим математическое ожидание числа осколков, приходящихся на единицу площади поверхности шарового пояса, образовавшегося в результате пересечения конуса разлета со сферой. Обозначим через S площадь поверхности шарового пояса:

$$S = 50^2 \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = 5000\pi \left(\cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{3} \right) = \\ = 2500\pi(\sqrt{3} - 1) \approx 5725 \text{ м}^2.$$

Так как общее число осколков $N = 100$, то математическое ожидание числа их a , приходящегося на единицу площади поверхности шарового пояса, будет

$$a = \frac{N}{S} = \frac{100}{5725} = 0,01745 \text{ осколка.}$$

Вероятность попадания данного осколка в данную площадку $S_0 = 1 \text{ м}^2$ мала (она равна $S_0/S = 1,75 \cdot 10^{-4}$) поэтому можно считать, что случайное число осколков X ,

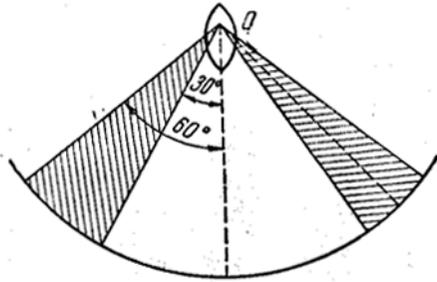


Рис. 13.

приходящееся на 1 м^2 поверхности сферы, распределено по закону Пуассона и, следовательно, имеет место равенство

$\mathbf{D}[X] = \mathbf{M}[X] = a = 0,01745$. Аналогично решаются задачи 14.10 и 14.12.

Задачи

14.1. Математическое ожидание числа отказов радиоаппаратуры за 10000 часов работы равно 10. Определить вероятность отказа радиоаппаратуры за 100 часов работы.

14.2. Вероятность любому абоненту позвонить на коммутатор в течение часа равна 0,01. Телефонная станция обслуживает 300 абонентов. Какова вероятность, что в течение часа позвонят 4 абонента?

14.3. Аппаратура содержит 2000 одинаково надежных элементов, вероятность отказа для каждого из которых равна $p = 0,0005$. Какова вероятность отказа аппаратуры, если он наступает при отказе хотя бы одного из элементов?

14.4. В течение часа коммутатор получает в среднем 60 вызовов. Какова вероятность того, что за время 30 сек., в течение которых телефонистка отлучилась, не будет ни одного вызова?

14.5. Вероятность того, что изделие не выдержит испытания, равна 0,001. Найти вероятность того, что из 5000 изделий более чем одно не выдержит испытания. Сравнить результаты расчетов, полученных с использованием распределения Пуассона и с использованием биномиального распределения. В последнем случае расчет производить с помощью семизначных таблиц логарифмов.

14.6. За рассматриваемый период времени среднее число ошибочных соединений, приходящееся на одного телефонного абонента, равно 8. Какова вероятность, что для данного абонента число ошибочных соединений будет больше 4?

14.7. Найти вероятность того, что среди 200 изделий окажется более трех бракованных, если в среднем бракованные изделия составляют 1 %.

14.8. Корректурa в 500 страниц содержит 500 опечаток. Найти вероятность того, что на странице не меньше трех опечаток.

14.9. В наблюдениях Резерфорда и Гейгера радиоактивное вещество за промежуток времени 7,5 сек. испускало в среднем 3,87 α -частицы. Найти вероятность того, что за 1 сек. это вещество испустит хотя бы одну α -частицу. **14.10.**

Определить коэффициент асимметрии случайной величины, распределенной по закону Пуассона. (Коэффициентом асимметрии называется отношение $S_k = \mu_3/\sigma^3$.)

14.11. В аппаратный отсек космической ракеты за время ее полета с вероятностью

$$P(r, \lambda) = \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda}$$

попадает r элементарных частиц. Условная вероятность для каждой из них попасть при этом в уязвимый блок равна p . Найти вероятность попадания в блок: а) ровно k частиц; б) хотя бы одной частицы.

14.12¹⁾. Определить дисперсию числа атомов радиоактивного вещества, распадающегося в единицу времени, если даны масса вещества M , период полураспада $T_{\text{п}}$, атомный вес вещества A , число атомов в грамм-атоме N_0 .

14.13¹⁾. Определить вероятность того, что в экран площадью $S = 0,12 \text{ см}^2$, поставленный на расстоянии $r = 5 \text{ см}$ перпендикулярно потоку от α - радиоактивного вещества, попадает в течение секунды: а) ровно десять α - частиц; б) не менее двух α - частиц, если период полураспада вещества $T_{\text{п}} = 4,4 \cdot 10^9$ лет, масса вещества $M = 0,1 \text{ г}$, атомный вес вещества $A = 238$.

14.14. Доказать, что полиномиальное распределение

$$P_n(k_1, k_2, \dots, k_m, k_{m+1}) = C_n^{k_1, k_2, \dots, k_m} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m} p_{m+1}^{k_{m+1}}$$

где

$$\begin{aligned} \text{а) } p_1 + p_2 + \dots + p_m + p_{m+1} &= 1, \\ k_1 + k_2 + \dots + k_m + k_{m+1} &= n, \end{aligned}$$

можно аппроксимировать многомерным законом Пуассона

$$e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m)} \frac{\lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \dots \lambda_m^{k_m}}{k_1! k_2! \dots k_m!},$$

где $\lambda_i = np_i$. если все вероятности p_i за исключением p_{m+1} малы, а n велико.

- 1) 1. Рассеиванием и поглощением частиц пренебречь.
2. Число Авогадро $N_0 = 6,02 \cdot 10^{23}$ — число атомов в грамм-атоме, т. е. в количестве вещества, вес которого в граммах равен атомному весу.
3. Периодом полураспада вещества $T_{\text{п}}$ называется время, в течение которого масса радиоактивного вещества уменьшается в среднем вдвое.

§ 15. Закон нормального распределения

Основные формулы

Плотность вероятности нормально распределенной случайной величины имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

или

$$f(x) = \frac{\rho}{E\sqrt{\pi}} e^{-\rho^2 \frac{(x-\bar{x})^2}{E^2}}$$

где σ - среднее квадратическое отклонение, $E = \rho\sqrt{2}\sigma$ - срединное отклонение (иногда называемое и «вероятным отклонением»), $\rho = 0,476936 \dots$

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X в интервал (x_1, x_2) вычисляется по одной из следующих формул:

$$1) P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{x_2 - \bar{x}}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \bar{x}}{\sigma}\right) \right],$$

где $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — функция Лапласа (интеграл вероятности);

$$2) P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{2} \left[\hat{\Phi}\left(\frac{x_2 - \bar{x}}{E}\right) - \hat{\Phi}\left(\frac{x_1 - \bar{x}}{E}\right) \right],$$

где $\hat{\Phi}(x) = \frac{2\rho}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\rho^2 t^2} dt$ — приведенная функция Лапласа.

Значения функций $\Phi(x)$ и $\hat{\Phi}(x)$ даны в таблицах [8Т] и [11Т].

Решение типовых примеров

Пример 15.1. Измерение дальности до объекта сопровождается систематическими и случайными ошибками. Систематическая ошибка равна 50 м в сторону занижения дальности. Случайные ошибки подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 100$ м. Найти:

1) вероятность измерения дальности с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 150 м; 2) вероятность того, что измеренная дальность не превзойдет истинной.

Решение. Обозначим через X суммарную ошибку измерения дальности. Ее систематическая составляющая $\bar{x} = -50$ м. Следовательно, плотность вероятности суммарных ошибок имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{100\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+50)^2}{20000}}$$

1. Согласно общей формуле имеем $P(|X| < 150) = P(-150 < X < 150) = \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{150+50}{100}\right) - \Phi\left(\frac{-150+50}{100}\right) \right] = \frac{1}{2} [\Phi(2) - \Phi(-1)]$.

Интеграл вероятности является функцией нечетной, поэтому $\Phi(-1) = -\Phi(1)$.

Отсюда

$$P(|X| < 150) = 1/2[\Phi(2) + \Phi(1)]$$

Из таблицы [ВТ] находим

$$\Phi(2) = 0,9545, \Phi(1) = 0,6827;$$

окончательно

$$P(|X| < 150) = 0,8186.$$

2. Вероятность того, что измеренная дальность не превзойдет истинной,

$$P(-\infty < X < 0) = 1/2 [\Phi(0,5) + \Phi(\infty)].$$

Так как $\Phi(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x) = 1$, а из таблицы [8Т] находим $\Phi(0,5) = 0,3829$, то

$$P(-\infty < X < 0) = 0,6914.$$

Аналогично решаются задачи 15.1—15.4 и 15.10—15.14.

Пример 15.2. Определить срединную ошибку прибора, если систематических ошибок он не имеет, а случайные распределены по нормальному закону и с вероятностью 0,8 не выходят за пределы ± 20 м.

Решение. Из условия задачи следует, что

$$P(|X| < 20) = 0,8.$$

Так как плотность вероятности случайных ошибок нормальная, а $\bar{x} = 0$ (систематические ошибки отсутствуют), то,

$$P(|X| \leq 20) = \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{20}{E}\right) - \Phi\left(-\frac{20}{E}\right) \right] = \Phi\left(\frac{20}{E}\right)$$

Неизвестное значение срединной ошибки находим как решение трансцендентного уравнения

$$\Phi\left(\frac{20}{E}\right) = 0,8.$$

С помощью таблицы [11 Т] получим.

$$\Phi(20/E) = 0,8.$$

Откуда

$$E = 20/1,90 = 10,5 \text{ м}$$

Аналогично решаются задачи 15.8 и 15.18.

Задачи

15.1. Измерительный прибор имеет систематическую ошибку 5 м и срединную ошибку 50 м. Какова вероятность того, что ошибка измерения не превзойдет по абсолютной величине 5 м?

15.2. Систематическая ошибка удержания высоты самолетом + 20 м, а случайная ошибка характеризуется срединным отклонением, равным 50 м. Для полета самолета отведен коридор высотой 100 м. Какова вероятность, что самолет будет лететь ниже, внутри и выше коридора, если самолету задана высота, соответствующая середине коридора?

15.3. Срединная ошибка измерения дальности радиолокатором равна 25 м. Определить: а) дисперсию ошибок измерения дальности; б) вероятность получения ошибки измерения дальности, по абсолютной величине не превосходящей 20 м.

15.4. Измерительный прибор имеет срединную ошибку 40 м, систематические ошибки отсутствуют. Сколько необходимо произвести измерений, чтобы с вероятностью более 0,9 ошибка хотя бы одного из них не превосходила по абсолютной величине 7,5 м?

15.5. Даны две случайные величины X и Y , имеющие одинаковые дисперсии, но первая распределена нормально, а вторая равномерно. Определить связь между их средними отклонениями.

15.6. Нормально распределенная случайная величина X имеет математическое ожидание $\bar{x} = -15$ м и среднее отклонение 10 м. Вычислить таблицу функции распределения для значений аргумента через каждые 10 м и построить график.

15.7. Высотомер имеет случайные и систематические ошибки. Систематическая ошибка равна +20 м. Случайные ошибки распределены по нормальному закону. Какую среднюю ошибку должен иметь прибор, чтобы с вероятностью 0,9 ошибка измерения высоты была меньше 100 м?

15.8. Найти связь между средним арифметическим отклонением

$$E_1 = M[|X - \bar{x}|]$$

нормально распределенной случайной величины и ее средним квадратическим отклонением.

15.9. Определить для нормально распределенной случайной величины X , имеющей $M[X] = 0$,

1) $P(X \geq k\sigma)$ и 2) $P(|X| \geq k\sigma)$ (при $k = 1, 2, 3$).

15.10. Заряд охотничьего пороха отвешивается на весах, имеющих среднюю ошибку взвешивания 100 мг.

Номинальный вес порохового заряда 2,3 г. Определить вероятность повреждения ружья, если максимально допустимый вес порохового заряда 2,5 г.

15.11. Производятся два независимых измерения прибором, имеющим среднюю ошибку 20 м и систематическую ошибку +10 м. Какова вероятность того, что обе ошибки измерений, имея разные знаки, по абсолютной величине превзойдут 10 м?

15.12. На плоскости проведены две параллельные прямые, расстояние между ними L . На эту же плоскость бросается круг радиуса R . Центр рассеивания расположен на расстоянии b от одной из линий во внешнюю сторону. Среднее отклонение центра круга в направлении, перпендикулярном линии, равно E .

Определить при одном бросании: а) вероятность накрытия кругом хотя бы одной прямой; б) вероятность накрытия обеих прямых, если $Z = 10$ м, $R = 8$ м, $b = 5$ м,

$$E = 10 \text{ м.}$$

15.13. Изделие считается Высшего качества, если отклонение его размеров от номинала не превосходит по абсолютной величине 3,45 мм. Случайные отклонения размера изделия от номинала подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 3 мм, а систематические отклонения отсутствуют. Определить среднее число изделий высшего сорта, если изготавливаются четыре изделия.

15.14. Какой ширины должно быть поле допуска, чтобы с вероятностью не более 0,0027 получалась деталь с контролируемым размером вне поля допуска, если случайные отклонения размера от середины поля допуска подчиняются закону нормального распределения с параметрами $\bar{x} = 0$ и $\sigma = 5$ мк?

15.15. Какое расстояние должно быть между двумя рыболовецкими судами, идущими параллельными курсами, чтобы вероятность обнаружения косяка рыбы, идущего посередине между ними тем же курсом, равнялась 0,5, если ширина полосы обнаружения косяка для каждого судна является нормально распределенной случайной величиной с параметрами $\bar{x} = 3,7$ км и $E = 0,74$ км и для разных судов эти величины независимы?

15.16. При большом числе измерений установлено, что 75% ошибок: а) не превосходят +1,25мм; б) не превосходят по абсолютной величине 1,25 мм. Заменяя частоты появления ошибок их вероятностями, определить в обоих случаях срединное отклонение закона распределения ошибок измерения, считая его нормальным с нулевым математическим ожиданием.

15.17. Случайное отклонение X размера детали от номинала распределено по нормальному закону с математическим ожиданием x и средним квадратическим отклонением σ . Годными деталями являются те, для которых $a < X < b$. Детальными, подлежащими переделке, являются те, для которых $X > b$.

Найти: а) функцию распределения случайных отклонений размеров деталей, подлежащих переделке; б) функцию распределения случайных отклонений размеров годных деталей.

15.18. Нормально распределенная случайная величина X имеет математическое ожидание, равное нулю. Определить срединное отклонение E , при котором вероятность $P(a < X < b)$ была бы наибольшей ($0 < a < b$).

§ 16. Характеристические функции

Основные формулы

Характеристической функцией $E(u)$ случайной величины X называется математическое ожидание функции e^{iuX} (где u -

вещественная величина, а $i = \sqrt{-1}$):
 $E(u) = M[e^{iuX}]$.

Для непрерывной случайной величины

$$E(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} f(x) dx,$$

где $f(x)$ - плотность вероятности случайной величины X . Для дискретной случайной величины (и только для дискретной)

$$E(u) = \sum_{k=1}^n p_k e^{iux_k},$$

где x_k - частные значения случайной величины, $p_k = P(X = x_k)$

- соответствующие им вероятности. Если начальный момент m_k существует, то

$$m_k = M[X^k] = \frac{1}{i^k} \left. \frac{d^k E(u)}{du^k} \right|_{u=0}$$

Плотность вероятности $f(x)$ однозначно выражается через характеристическую функцию:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux} E(u) du.$$

Последняя формула для дискретных случайных величин Дает плотность вероятности в виде суммы дельта-функций. Между функцией распределения и характеристической функцией существует взаимно однозначное соответствие.

Решение типовых примеров

Пример 16.1. В партии, состоящей из n изделий, от изделий дефектных. Для проверки качества произведена бесповторная выборка r изделий ($m, < r < n - m$). Найти характеристическую функцию числа дефектных изделий, содержащихся в выборке.

Решение. Случайная величина X —число дефектных изделий, содержащихся в выборке, — может принимать все целочисленные значения в интервале $(0, m)$. Обозначим

$p_k = P(X = k)$, где $k = 0, 1, 2, \dots, m$.

Находя p_k , как отношение числа равновозможных, единственно возможных несовместных исходов опыта к общему числу таких исходов, получим

$$p_k = \frac{C_m^k C_{n-m}^{r-k}}{C_n^r}.$$

Следовательно, характеристическая функция

$$E(u) = \sum_{k=0}^m \frac{C_m^k C_{n-m}^{r-k}}{C_n^r} e^{iku}.$$

Аналогично решаются задачи 16.1—16.5. Пример 16.2. Найти характеристическую функцию случайной величины X , плотность вероятности которой

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}.$$

Решение. Так как характеристическая функция

$$E(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} f(x) dx,$$

то

$$\begin{aligned} E(u) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux - |x|} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{(iu-1)x} dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^{(iu+1)x} dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-iu} - \frac{1}{1+iu} \right) = \frac{1}{1+u^2}. \end{aligned}$$

т. е.

$$E(u) = \frac{1}{1+u^2}.$$

Аналогично решаются задачи 16.6—16.12. Пример 16.3.

Случайная величина X имеет характеристическую функцию

$$E(u) = \frac{1}{1+u^2}.$$

Найти плотность вероятности этой случайной величины.

Решение. Плотность вероятности $f(x)$ связана с характеристической функцией $E(u)$ соотношением

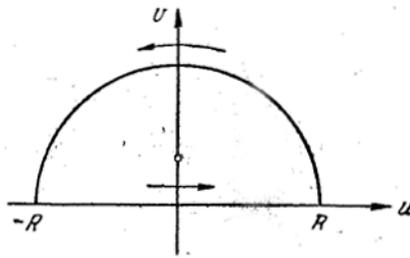


Рис. 14.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-lux} E(u) du.$$

Подставив значение $E(u)$, получим

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-lux}}{1+u^2} du.$$

Будем рассматривать u как вещественную часть комплексного переменного $w = u + iv$.

При $x < 0$ интеграл по вещественной оси равен интегралу по замкнутому контуру, состоящему из вещественной оси и полуокружности бесконечно большого радиуса, лежащей в верхней полуплоскости (рис. 14), т. е.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-lux}}{1+u^2} du = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{e^{-lxw}}{1+w^2} dw.$$

На основании теоремы о вычетах

$$\oint \frac{e^{-lxw}}{1+w^2} dw = 2\pi i \left(\frac{e^{-lxw}}{2w} \right)_{w=i} = \pi e^x,$$

или учитывая, что $x < 0$, имеем

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}.$$

Аналогичным образом при $x > 0$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-iux}}{1+u^2} du =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iu_1x}}{1+u_1^2} du_1 = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{e^{ixw}}{1+w^2} dw,$$

где интегрирование ведется по тому же контуру (рис. 14). На основании теоремы о вычетах

$$\oint \frac{e^{ixw}}{1+w^2} dw = 2\pi i \left(\frac{e^{ixw}}{2w} \right)_{w=i} = \pi e^{-x},$$

или, учитывая, что $x > 0$, имеем

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-1 \cdot x}.$$

Таким образом, для любого значения x

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}.$$

Аналогично решаются задачи 16.15 и 16.16.

Пример 16.4. Найти начальные моменты случайной величины

X , характеристическая функция которой $E(u) =$

$$= 1/(1+u^2)$$

Решение. Начальные моменты существуют до любого порядка, так как все производные от $E(u)$ непрерывны в нуле. Следовательно,

$$m_k = \frac{1}{i^k} \left. \frac{d^k E(u)}{du^k} \right|_{u=0}.$$

Найдем производные $\left. \frac{d^k E(u)}{du^k} \right|_{u=0}$ как коэффициенты при $u^k/k!$

в разложении функции $\frac{1}{1+u^2}$ в ряд Маклорена, т. е; используем

равенство

$$\frac{1}{1+u^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \left. \frac{d^k E(u)}{du^k} \right|_{u=0} \frac{u^k}{k!}.$$

С другой стороны, функция $\frac{1}{1+u^2}$ при $|u| < 1$ является суммой геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{1+u^2} = \frac{1}{1-(iu)^2} = \sum_{m=0}^{\infty} (iu)^{2m} = \sum_{m=0}^{\infty} i^{2m} \frac{(2m)!}{(2m)!} u^{2m}.$$

Итак, ряд Маклорена для функции $\frac{1}{1+u^2}$ содержит только четные степени u . Отсюда следует, что

$$\left. \frac{d^k E(u)}{du^k} \right|_{u=0} = \begin{cases} i^k k! & \text{при } k \text{ четном,} \\ 0 & \text{при } k \text{ нечетном,} \end{cases}$$

а начальные моменты

$$m_k = \begin{cases} k! & \text{при } k \text{ четном,} \\ 0 & \text{при } k \text{ нечетном.} \end{cases}$$

Аналогично решаются задачи 16.3, 16.7, 16.8, 16.10, 16.14.
Задачи

16.1. Найти характеристическую функцию числа появлений события при одном испытании, если вероятность появления события при одном испытании равна p .

16.2. Найти характеристическую функцию числа появлений события A при n независимых испытаниях, если вероятность появления события A от испытания к испытанию меняется и для k -го испытания равна p_k ($k = 1, 2, \dots, n$).

16.3. Определить характеристическую функцию случайной величины X , имеющей биномиальное распределение, и по ней найти $M[X]$ и $D[X]$.

16.4. Найти характеристическую функцию дискретной случайной величины X , подчиняющейся закону распределения Паскаля

$$P(X = m) = \frac{a^m}{(1+a)^{m+1}} \quad (a > 0),$$

по ней найти $M[X]$ и $D[X]$.

16.6. Случайная величина X дискретного типа подчиняется закону Пуассона

$$P(X = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}.$$

Найти: а) характеристическую функцию $E(u)$ б) используя $E(u)$, найти $M[X]$ и $D[X]$.

16.6. Найти характеристическую функцию нормально распределенной случайной величины с математическим ожиданием \bar{x} и дисперсией σ^2 .

16.7. Найти характеристическую функцию и начальные моменты случайной величины, плотность вероятности которой

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{для } x \geq 0, \\ 0 & \text{для } x < 0. \end{cases}$$

16.8. Найти характеристическую функцию равномерно распределенной в интервале (a, b) случайной величины и все ее начальные моменты.

16.9. Случайная величина X имеет плотность вероятности

$$f(x) = 2h^2 x e^{-h^2 x^2} \quad (x \geq 0).$$

Найти ее характеристическую функцию.

16.10. Случайная величина X имеет плотность вероятности

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases} \quad (\alpha, \lambda > 0).$$

Найти ее характеристическую функцию и начальные моменты.

16.11. Найти характеристическую функцию случайной величины X , плотность вероятности которой (закон арксинуса)

$$f(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \quad (|x| \leq a).$$

16.12. Случайная величина X подчиняется закону Коши 1

$$f(x) = \frac{a}{\pi} \frac{1}{(x - \bar{x})^2 + a^2}.$$

Найти ее характеристическую функцию.

16.13. Пользуясь выражением

$$E(u) = \exp\left\{iu\bar{x} - \frac{u^2\sigma^2}{2}\right\}$$

для характеристической функции нормального закона распределения, найти характеристическую функцию для случайной величины: а) $Y = aX + b$. б) $\hat{X} = X - \bar{x}$.

16.14. Пользуясь выражением

$$E(u) = e^{-\frac{u^2 \sigma^2}{2}}$$

для характеристической функции центрированной случайной величины \hat{X} , подчиняющейся нормальному закону распределения, определить все центральные моменты.

16.15. Характеристическая функция случайной величины X задана в виде

$$E(u) = e^{-a|u|} \quad (a > 0).$$

Определить плотность вероятности X .

16.16. Даны характеристические функции

$$E_1(u) = \frac{1 + iu}{1 + u^2}, \quad E_2(u) = \frac{1 - iu}{1 + u^2}.$$

Определить соответствующие им плотности вероятностей.

16.17. Дана характеристическая функция

$$E(u) = \frac{1}{2e^{-iu} - 1}.$$

Показать, что она соответствует случайной величине дискретного типа. Найти ряд распределения этой величины.

§ 17. Вычисление полной вероятности и условной плотности вероятности после опыта для гипотез, являющихся возможными значениями непрерывных случайных величин

Основные формулы

Полная вероятность события A вычисляется по формуле

$$P(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) P(A|x) dx,$$

где $f(x)$ —плотность вероятности случайной величины X , от значений которой зависит вероятность появления собы-

тия A ; $P(A|x)$ —вероятность появления события A , вычисленная в предположении, что случайная величина X приняла значение x .

Условная плотность вероятности $f(x|A)$ случайной величины X , т. е. плотность вероятности при условии, что событие A имело место, определяется формулой

$$f(x|A) = \frac{f(x)P(A|x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)P(A|x)dx}$$

(обобщенная формула Байеса)

где $f(x)$ —плотность вероятности случайной величины X до опыта.

Решение типовых примеров

Пример 17.1. Вероятность события зависит от случайной величины X и выражается следующей формулой:

$$P(A|x) = \begin{cases} 1 - e^{-kx} & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases} \quad (k > 0).$$

Найти полную вероятность события A , если X является нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием \bar{x} и дисперсией σ^2 .

Решение. Полная вероятность события A

$$P(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)P(A|x)dx.$$

Подставляя сюда заданную плотность вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}},$$

получим

$$\begin{aligned} P(A) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} (1 - e^{-kx}) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[1 + \Phi\left(\frac{\bar{x}}{\sigma}\right) \right] - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2} - kx} dx. \end{aligned}$$

Показатель степени у e в последнем интеграле можно привести к виду

$$-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2} - kx = -\frac{(x-\bar{x}+k\sigma^2)^2}{2\sigma^2} - k\left(\bar{x} - \frac{k\sigma^2}{2}\right).$$

Следовательно,

$$P(A) = \frac{1}{2} \left[1 + \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) \right] - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-k\left(\bar{x} - \frac{k\sigma^2}{2}\right)} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(x-\bar{x}+k\sigma^2)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Так как

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(x-\bar{x}+k\sigma^2)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{2} \left[1 + \Phi\left(\frac{\bar{x}-k\sigma^2}{\sigma}\right) \right],$$

то

$$P(A) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \left[1 + \Phi\left(\frac{\bar{x}-k\sigma^2}{\sigma}\right) \right] \exp\left[-k\left(\bar{x} - \frac{k\sigma^2}{2}\right)\right] \right\}.$$

Аналогично решаются задачи 17.1—17.10.

Пример 17.2. Отклонение размера детали от середины поля допуска шириной $2d$ равно сумме двух случайных величин X и Y , имеющих плотности вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}$$

и

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}}.$$

Определить плотность вероятности случайных величин X для годных деталей, если распределение $\omega(y)$ не зависит от того, какое значение приняла случайная величина X .

Решение. Пусть A —событие, состоящее в том, что изготовленная деталь оказалась годной. Условная вероятность $P(A|x)$ получения годной детали, вычисленная в предположении, что случайная величина X приняла значение x , равна

$$P(A|x) = \int_{-x-d}^{-x+d} \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}} dy = \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{x+d}{\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{x-d}{\sigma_y}\right) \right].$$

Пусть $f(x|A)$ —условная плотность вероятности случайной величины X для годных деталей, тогда

$$f(x|A) = \frac{f(x) P(A|x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) P(A|x) dx}.$$

Подставляя значения $f(x)$ и $P(A|x)$, получим

$$f(x|A) = \frac{\frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{x+d}{\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{x-d}{\sigma_y}\right) \right]}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{x+d}{\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{x-d}{\sigma_y}\right) \right] dx}$$

или

$$f(x|A) = \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \left[\Phi\left(\frac{x+d}{\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{x-d}{\sigma_y}\right) \right]}{\Phi\left(\frac{d}{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}}\right)}.$$

Задачи

17.1. На плоскости проведена прямая, на которой с равным интервалом l отмечены точки. Определить вероятность того, что хотя бы одна точка попадает в центр круга диаметром b , перемещающегося в той же плоскости таким образом, что центр круга движется по прямой, пересекающей проведенную прямую линию под углом Y , равновозможным в интервале (Y_1, Y_2) . (Углы Y_1 и Y_2 удовлетворяют условиям $\sin Y_1 < b/l$ и $\sin Y_2 > b/l$.)

17.2. На каждой из двух параллельных прямых независимо отмечены точки с постоянным интервалом $l = 100$ м. Определить вероятность того, что хотя бы одна точка попадет внутрь бесконечной полосы шириной $D = 25$ м, которая расположена в той же плоскости, что и прямые, таким обра-

зом, что ограничивающие ее прямые перпендикулярны данным прямым.

17.3. Найти вероятность попадания одним выстрелом в мишень, если расстояние D до мишени в момент выстрела—случайная величина, равномерно распределенная в интервале от 100 до 200 м, а условная вероятность попадания в цель равна $3000/D^2$ где D выражено в м.

17.4. На берегу пролива шириной $L = 30$ км установлена наблюдательная станция, дальность обнаружения которой является нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием $\bar{x} = 20$ км и средним отклонением $E = 1$ км. Судно с равной вероятностью может проходить через пролив, идя вдоль берега на любом расстоянии от берега. Найти вероятность того, что наблюдательная станция обнаружит судно.

17.5. На правую чашку весов положен груз, вес которого подчинен нормальному закону распределения с параметрами $\bar{x} = 20$ кг и $E = 1$ кг. На левой чашке весов находится другой груз, вес которого равновероятен в пределах от 0 до 50 кг. Определить вероятность того, что правая чашка перевесит левую. Сравнить полученный результат с тем, который получился бы в предположении, что груз правой чашки не случаен, а в точности равен 20 кг.

17.6. Произведено n независимых измерений нормальной случайной величины X , математическое ожидание которой совпадает с началом отсчета, а среднее отклонение равно R . Найти вероятность того, что результат хотя бы одного измерения отклонится от случайной величины Z не более чем на $\pm r$, если Z равномерно распределена в интервале $(-l, l)$.

17.7. Дан ряд независимых случайных величин X_1, X_2, \dots, X_n имеющих одну и ту же плотность вероятности $f(x)$. Размахом ряда случайных величин называется случайная величина

$$W_n = X_{max} - X_{min}$$

где X_{max} наибольшее, а X_{min} - наименьшее из полученных значений X_j ($j = 1, 2, \dots, n$).

Найти функцию распределения размаха

$$F(w) = P(W_n < w).$$

17.8. Какова вероятность того, что две точки, наудачу выбранные в круге, будут лежать по одну сторону от хорды, проведенной параллельно заданному направлению, расстояние которой от центра является равномерно распределенной случайной величиной?

17.9. Координаты X_i случайных точек A_1, A_2, \dots, A_n имеют плотности вероятностей

$$f_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Одна из этих n точек совпадает с некоторой отметкой A_0 , отклонение координаты которой от заданного числа имеет плотность вероятности $f(x)$. Определить вероятность того, что с точкой A_0 совпала точка A_i .

17.10. Случайная величина X подчиняется закону Пуассона

$$P(X = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a},$$

параметр которого неизвестен, но имеет до опыта плотность вероятности

$$f(a) = ae^{-a} \quad (a > 0).$$

Произведен опыт, в результате которого случайная величина X приняла значение m_0 . Найти плотность вероятности a после опыта.

ГЛАВА III СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

§ 18. Законы распределения и числовые характеристики систем случайных величин

Основные формулы

Функция распределения (интегральный закон распределения) $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ системы n случайных величин (X_1, X_2, \dots, X_n) определяется формулой

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n)$$

Для системы непрерывных случайных величин существует плотность вероятности (дифференциальный закон распределения), определяемая формулой

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}.$$

Система дискретных случайных величин характеризуется совокупностью вероятностей $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)$, которые могут быть сведены в таблицу с n входами (по числу случайных величин).

Функция распределения для непрерывных случайных величин выражается в виде кратного интеграла

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

для дискретных случайных величин — в виде кратной суммы

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i_1 < x_1} \sum_{i_2 < x_2} \dots \sum_{i_n < x_n} P(X_1 = i_1, X_2 = i_2, \dots, X_n = i_n),$$

где суммирование производится по всем возможным значениям каждой из случайных величин, для которых

$$i_1 < x_1, i_2 < x_2, \dots, i_n < x_n$$

При $n = 2$ система непрерывных случайных величин может интерпретироваться как случайная точка на плоскости, а при $n = 3$ — как случайная точка в пространстве.

Вероятность попадания случайной точки в область S равна интегралу от плотности вероятности по этой области.

Основными числовыми характеристиками системы n случайных величин являются математические ожидания

$$M[X_i] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_i f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

дисперсии

$$D[X_i] = k_{ii} = \sigma_i^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \bar{x}_i)^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

и
корреляционные моменты

$$M[(X_i - \bar{x}_i)(X_j - \bar{x}_j)] = k_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j) \times f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Аналогичным образом вычисляются моменты для дискретных случайных величин, где интегрирование заменяется суммированием по всем возможным значениям случайных величин.

Вторые центральные моменты составляют корреляционную матрицу

$$\|k_{ij}\| = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \dots & k_{2n} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & \dots & k_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} & \dots & k_{nn} \end{vmatrix},$$

где $k_{ij} = k_{ji}$. Иногда оказывается удобной формула

$$k_{ij} = M[X_i X_j] - M[X_i] \cdot M[X_j].$$

Случайные величины X_1, X_2, \dots, X_n , входящие в систему, не коррелированы (не связаны), если недиагональные элементы корреляционной матрицы равны нулю.

Безразмерной характеристикой связи между случайными величинами X_i и X_j служит коэффициент корреляции

$$r_{ij} = \frac{k_{ij}}{\sqrt{D[X_i] D[X_j]}}.$$

Коэффициенты корреляции составляют нормированную корреляционную матрицу

$$\|r_{ij}\| = \begin{vmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & r_{23} & \dots & r_{2n} \\ r_{31} & r_{32} & 1 & \dots & r_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & r_{n3} & \dots & 1 \end{vmatrix},$$

Непрерывные случайные величины X_1, X_2, \dots, X_n , входящие в систему, независимы, если

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \dots f_n(x_n)$$

и зависимы, если

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq f_1(x_1) f_2(x_2) \dots f_n(x_n)$$

где $f_i(x_i)$ — плотность вероятности случайной величины X_i (см. § 20).

Дискретные случайные величины X_1, X_2, \dots, X_n
 независимы, если

$$P(X_1 = i_1, X_2 = i_2, \dots, X_n = i_n)$$

Решение типовых примеров

Пример 18.1. В результате испытания изделие может быть либо отнесено к первому сорту с вероятностью p_1 , либо ко второму сорту с вероятностью p_2 либо забраковано с вероятностью $p_3 = 1 - p_1 - p_2$. Испытано n изделий. Определить распределение вероятностей различных чисел изделий первого и второго сорта, их математические ожидания, дисперсии и корреляционный момент.

Решение. Обозначим число изделий первого сорта через X , а число изделий второго сорта через Y . Так как испытания независимы, то вероятность того, что k изделий будет отнесено к первому сорту, s изделий — ко второму сорту, а остальные $n - k - s$ изделий будут забракованы (с учетом числа всевозможных сочетаний трех слагаемых k, s и $n - k - s$, из которых может быть составлена сумма n),

равна

$$P(X = k, Y = s) = \frac{n!}{k! s! (n - k - s)!} p_1^k p_2^s p_3^{n - k - s},$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1.$$

Значения этой вероятности при $k = 0, 1, \dots, n, s = 0, 1, \dots, n$ и $k + s \leq n$ составляют искомую совокупность вероятностей различных чисел изделий первого и второго сорта.

Математическое ожидание числа изделий первого сорта

$$M[X] = \bar{x} = \sum_{k=0}^n \sum_{s=0}^{n-k} k \frac{n!}{k! s! (n - k - s)!} p_1^k p_2^s p_3^{n - k - s} =$$

$$= p_1 \frac{\partial}{\partial p_1} \left\{ \sum_{k=0}^n \sum_{s=0}^{n-k} \frac{n!}{k! s! (n - k - s)!} p_1^k p_2^s p_3^{n - k - s} \right\} =$$

$$= p_1 \frac{\partial}{\partial p_1} (p_1 + p_2 + p_3)^n = n p_1 (p_1 + p_2 + p_3)^{n-1} = n p_1.$$

Дисперсия числа изделий первого сорта

$$\begin{aligned}
 D[X] &= \sum_{k=0}^n \sum_{s=0}^{n-k} k^2 \frac{n!}{k!s!(n-k-s)!} p_1^k p_2^s p_3^{n-k-s} - \bar{x}^2 = \\
 &= p_1 \frac{\partial}{\partial p_1} \left\{ \sum_{k=0}^n \sum_{s=0}^{n-k} k \frac{n!}{k!s!(n-k-s)!} p_1^k p_2^s p_3^{n-k-s} \right\} - \bar{x}^2 = \\
 &= p_1 \frac{\partial}{\partial p_1} \{ n p_1 (p_1 + p_2 + p_3)^{n-1} \} - \bar{x}^2 = \\
 &= n p_1 + n(n-1) p_1^2 - n^2 p_1^2 = n p_1 (1 - p_1).
 \end{aligned}$$

Аналогично находим

$$M[Y] = n p_2, \quad D[Y] = n p_2 (1 - p_2).$$

Корреляционный момент между числом изделий первого и второго сорта равен

$$\begin{aligned}
 k_{xy} &= \sum_{k=0}^n \sum_{s=0}^{n-k} k s \frac{n!}{k!s!(n-k-s)!} p_1^k p_2^s p_3^{n-k-s} - \bar{x} \bar{y} = \\
 &= p_1 \frac{\partial}{\partial p_1} p_2 \frac{\partial}{\partial p_2} \{ (p_1 + p_2 + p_3)^n \} - n^2 p_1 p_2 = \\
 &= p_1 \frac{\partial}{\partial p_1} \{ n p_2 (p_1 + p_2 + p_3)^{n-1} \} - n^2 p_1 p_2 = \\
 &= n(n-1) p_1 p_2 - n^2 p_1 p_2 = -n p_1 p_2.
 \end{aligned}$$

Пример 18.2. Дана плотность вероятности системы случайных величин (X, Y) :

$$f(x, y) = 0,5 \sin(x+y) \quad (0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \pi/2).$$

Определить: а) функцию распределения системы; б) математические ожидания X и Y ; в) корреляционную матрицу. Решение. Находим функцию распределения

(при $0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \pi/2$):

$$\begin{aligned}
 F(x, y) &= P(X < x, Y < y) = \int_0^x \int_0^y 0,5 \sin(x+y) dx dy = \\
 &= 0,5 [\sin x + \sin y - \sin(x+y)].
 \end{aligned}$$

Математическое ожидание случайной величины X

$$\begin{aligned} M[X] &= 0,5 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} x \sin(x+y) dx dy = \\ &= 0,5 \int_0^{\pi/2} x \left[-\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos x \right] dx = \frac{\pi}{4} = 0,785. \end{aligned}$$

Дисперсия случайной величины X

$$\begin{aligned} D[X] &= 0,5 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} x^2 \sin(x+y) dx dy - \frac{\pi^2}{16} = \\ &= 0,5 \int_0^{\pi/2} x^2 \left[-\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos x \right] dx - \frac{\pi^2}{16} = \\ &= \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2 = 0,188. \end{aligned}$$

Из симметрии плотности вероятности относительно X и Y следует, что

$$M[Y] = M[X], D[Y] = D[X].$$

Корреляционный момент

$$\begin{aligned} k_{xy} &= 0,5 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} xy \sin(x+y) dx dy - \frac{\pi^2}{16} = \\ &= 0,5 \int_0^{\pi/2} x \left[\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin x - \frac{\pi}{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right] dx - \frac{\pi^2}{16} = \\ &= \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{\pi^2}{16} = -0,046. \end{aligned}$$

Таким образом, корреляционная матрица имеет вид

$$\|k_{ij}\| = \begin{vmatrix} 0,188 & -0,046 \\ -0,046 & 0,188 \end{vmatrix}.$$

Аналогично решаются задачи 18.18 и 18.19.

Пример 18.3. Иглу длиной l бросают на плоскость, на которой на расстоянии L друг от друга проведены параллельные линии. Определить вероятность пересечения иглой одной из линий, если $l < L$ (задача Бюффона).

Решение. Введем систему случайных величин (X, Φ) , где X — расстояние от середины иглы до ближайшей линии, а Φ — острый угол между иглой и линией (рис. 15). Очевидно, что X может с равной вероятностью принимать значения от 0 до $L/2$, а Φ — также с равной вероятностью значения от 0 до $\pi/2$. Поэтому $f(x, \omega), (p) = (2/L)(2/\pi) = 4/\pi L$ при $0 \leq x \leq L/2, 0 \leq \omega \leq \pi/2$;

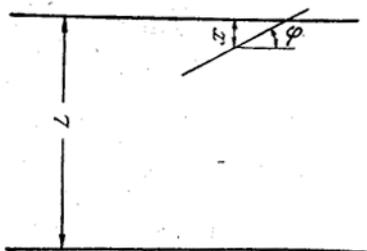


Рис. 15.

Пересечение иглой одной из линий происходит при заданном ω , если $0 \leq x \leq l \sin \omega / 2$. Отсюда

$$P = \frac{4}{\pi L} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\frac{l \sin \varphi}{2}} dx = \frac{2l}{\pi L}.$$

Аналогично решаются задачи 18.20 и 18.21.

Задачи

18.1. Координаты X, Y случайной точки распределены равномерно внутри прямоугольника, ограниченного абсциссами $x = a, x = b$ и ординатами $y = c, y = d$

($b > a, d > c$). Найти плотность вероятности и функцию распределения системы величин X, Y .

18.2. Система случайных величин (X, Y) имеет плотность вероятности

$$f(x, y) = \frac{A}{\pi^2 (16 + x^2)(25 + y^2)}.$$

Требуется: а) определить величину A ; б) найти функцию распределения $F(x, y)$.

18.3. Определить плотность вероятности системы трех положительных случайных величин (X, Y, Z) по заданной функции распределения

$$F(x, y, z) = (1 - e^{-ax})(1 - e^{-by})(1 - e^{-cz})$$

$$(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0).$$

18.4. В условиях предыдущей задачи определить геометрическое место точек, обладающих одинаковой плотностью вероятности $f(x, y, z) = f_0$, $f_0 \leq abc$.

18.6. Из отобранных $n = 6$ изделий X оказались кондиционными, среди которых Y ($Y \leq 3$) — высшего сорта. Система (X, Y) задана следующей двумерной таблицей (матрицей) распределения вероятностей (табл. 7):

Таблица 7

		P(X = i, Y = j)						
j \ i	0	1	2	3	4	5	6	
0	0,202	0,174	0,113	0,062	0,049	0,023	0,004	
1	0	0,099	0,064	0,040	0,031	0,020	0,006	
2	0	0	0,031	0,025	0,018	0,013	0,008	
3	0	0	0	0,001	0,002	0,004	0,011	

Требуется: а) составить функцию распределения; б) определить вероятность получения не менее двух изделий высшего сорта; в) определить $M[X]$, $M[Y]$ и корреляционную матрицу.

18.6. Система независимых случайных величин X_1, X_2, \dots, X_n задана плотностями вероятностей $f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_n(x_n)$. Определить функцию распределения этой системы случайных величин.

18.7. Задана плотность вероятности $f(x_1, x_2)$ системы двух случайных величин, которые могут быть реализованы лишь совместно. Наблюдены значения величин u и v . Определить вероятность того, что u является реализацией случайной величины X_1 ? а v — случайной величины X_2

18.8. Задана плотность вероятности системы трех случайных величин $f(x_1, x_2, x_3)$, которые могут быть реализованы

лишь совместно. Наблюдены значения этих величин u, v, w , причем неизвестно, реализацией какой из случайных величин является каждое из этих значений. Определить вероятность того, что u является реализацией X_1 , а w - реализацией X_2

18.9. Определить вероятность попадания случайной точки в указанную на рис. 16 заштрихованную область, если задана функция распределения $F(x, y)$.

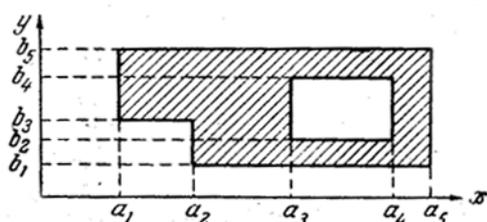


Рис. 16.

18.10. Определить вероятность попадания точки с координатами (X, Y) в область, определяемую неравенствами

$(1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2)$, если функция распределения $(a > 0)$
 $F(x, y) =$

$$= \begin{cases} 1 - a^{-x^2} - a^{-2y^2} + a^{-x^2 - 2y^2} & \text{при } x \geq 0, y \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0 \text{ или } y < 0. \end{cases}$$

18.11. Координаты случайной точки (X, Y) распределены равномерно внутри прямоугольника, ограниченного абсциссами $(0, a)$ и ординатами $(0, b)$. Определить вероятность попадания случайной точки в круг радиуса R если $a > b$, а центр круга совпадает с началом координат.

18.12. Плотность вероятности системы случайных величин равна

$$f(x, y) = c(R - \sqrt{x^2 + y^2}) \text{ при } x^2 + y^2 \leq R^2.$$

Определить: а) постоянную c ; б) вероятность попадания в круг радиуса $a < R$, если центры обоих кругов совпадают с началом координат.

18.13. Случайные величины X и Y связаны соотношением $mX + nY = c$, где m , n и c - неслучайные величины

$$(m \neq 0, n \neq 0).$$

Найти; а) коэффициент корреляции r_{xy} б) отношение среднеквадратических отклонений σ_x/σ_y .

18.14. Доказать, что коэффициент корреляции по абсолютной величине не превосходит единицы.

18.15. Показать, что

$$\begin{aligned} k_{xyz} &= \mathbf{M}[(X - \bar{x})(Y - \bar{y})(Z - \bar{z})] = \\ &= \mathbf{M}[XYZ] - \bar{x}k_{yz} - \bar{y}k_{xz} - \bar{z}k_{xy} - \bar{x}\bar{y}\bar{z}. \end{aligned}$$

18.16. Дана корреляционная матрица системы случайных величин (X_1, X_2, X_3)

$$\|k_{ij}\| = \begin{vmatrix} 16 & -14 & 12 \\ -14 & 49 & -21 \\ 12 & -21 & 36 \end{vmatrix}$$

Составить нормированную корреляционную матрицу $\|r_{ij}\|$.

18.17. Однотипные детали в зависимости от точности изготовления различаются по форме на круглые и овальные, а по весу—на легкие и тяжелые. Вероятности того, что взятая наудачу деталь окажется круглой и легкой, овальной и легкой, круглой и тяжелой, овальной и тяжелой, соответственно равны α , β , γ и $\delta = \alpha - \beta - \gamma$. Взята одна деталь. Найти математические ожидания и дисперсии числа круглых деталей X и числа легких деталей Y , а также корреляционный момент k_{xy} между числом круглых и числом легких деталей, если $\alpha = 0,40$,

$$\beta = 0,05, \gamma = 0,10.$$

18.18. Определить математические ожидания и корреляционную матрицу системы случайных величин (X, Y) , если плотность вероятности

$$f(x, y) = \frac{2}{\pi(x^2 + y^2 + 1)^2}.$$

18.19. Определить плотность вероятности, математические ожидания и корреляционную матрицу системы случайных величин (X, Y) , заданных в интервалах $(0 \leq x \leq \pi/2)$ и $(0 \leq y \leq \pi/2)$

если функция распределения системы $F(x, y) = \sin x \sin y$.

18.20. Решить задачу Бюффона о вероятности пересечения иглой хотя бы одной из прямых для случая $l > L$ (см. пример 18.3).

18.21. Иглу длины l бросают на плоскость, состоящую из прямоугольников со сторонами, a и b , Определить вероятность пересечения иглой хотя бы одной из сторон, если $a < l$, $b < l$.

§ 19. Закон нормального распределения , на плоскости и в пространстве. Многомерное нормальное распределение

Основные формулы

Плотность вероятности для системы двух нормальных случайных величин (X, Y) (для нормального закона распределения координат точки на плоскости)

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma_x^2} - \frac{2r(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\bar{y})^2}{\sigma_y^2} \right]}$$

где \bar{x} , \bar{y} — математические ожидания X и Y , $\sigma_x\sigma_y$ — средние квадратические отклонения, r — коэффициент корреляции X и Y .

Геометрическое место точек, имеющих равную плотность вероятности, есть эллипс (эллипс рассеивания), определяемый уравнением

$$\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma_x^2} - \frac{2r(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\bar{y})^2}{\sigma_y^2} = h^2.$$

Если $r = 0$, то оси симметрии эллипса рассеивания параллельны координатным осям Ox и Oy , случайные величины

X и Y не связаны и независимы, а плотность вероятности

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-\bar{y})^2}{\sigma_y^2} \right]} = \frac{\rho^2}{\pi E_x E_y} e^{-\rho^2 \left[\frac{(x-\bar{x})^2}{E_x^2} + \frac{(y-\bar{y})^2}{E_y^2} \right]}$$

где $E_x = \sigma_x \rho \sqrt{2}$, $E_y = \sigma_y \rho \sqrt{2}$ — средние отклонения X и соответственно Y , а $\rho = 0,4769 \dots$

Эллипс, определяемый равенством

$$\frac{(x-\bar{x})^2}{E_x^2} + \frac{(y-\bar{y})^2}{E_y^2} = 1,$$

называется единичным.

Плотность вероятности для системы n нормальных случайных величин (для многомерного нормального распределения)

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\Delta}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n k_{ij}^{(-1)} (x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j)},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{vmatrix}$$

— определитель, составленный из элементов корреляционной матрицы; $k_{ij}^{(-1)}$ — элементы обратной матрицы, равные

$$k_{ij}^{(-1)} = \frac{1}{\Delta} A_{ji} = \frac{1}{\Delta} A_{ij};$$

A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента k_{ij} .

В частном случае трех независимых нормальных случайных величин X, Y, Z имеем $k_{xy} = k_{yz} = k_{xz} = 0$ и

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sigma_x \sigma_y \sigma_z} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-\bar{y})^2}{\sigma_y^2} + \frac{(z-\bar{z})^2}{\sigma_z^2} \right]} = \frac{\rho^3}{\pi^{3/2} E_x E_y E_z} e^{-\rho^2 \left[\frac{(x-\bar{x})^2}{E_x^2} + \frac{(y-\bar{y})^2}{E_y^2} + \frac{(z-\bar{z})^2}{E_z^2} \right]}$$

где E_x, E_y, E_z — средние отклонения X, Y, Z соответственно. Этому частному случаю соответствует параллельность осей симметрии эллипсоида рассеивания координатным осям O_x, O_y и O_z .

Решение типовых примеров

Пример 19.1. Дана корреляционная матрица системы четырех нормальных случайных величин (X_1, X_2, X_3, X_4)

$$\|k_{ij}\| = \begin{vmatrix} 15 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 16 & 6 & -2 \\ 1 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Определить плотность вероятности $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, если $\bar{x}_1 = 10, \bar{x}_2 = 0, \bar{x}_3 = -10, \bar{x}_4 = 1$.

Решение. Вычисляем алгебраические дополнения определителя $\Delta = |k_{ij}|$:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 16 & 6 & -2 \\ 6 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 28; & A_{12} &= - \begin{vmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -13; \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} 3 & 16 & -2 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 16; & A_{14} &= - \begin{vmatrix} 3 & 16 & 6 \\ 1 & 6 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -14; \\ A_{22} &= \begin{vmatrix} 15 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 162; & A_{23} &= - \begin{vmatrix} 15 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -291; \\ A_{24} &= \begin{vmatrix} 15 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 205; & A_{33} &= \begin{vmatrix} 15 & 3 & 0 \\ 3 & 16 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 633; \\ A_{34} &= - \begin{vmatrix} 15 & 3 & 1 \\ 3 & 16 & 6 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -405; & A_{44} &= \begin{vmatrix} 15 & 3 & 1 \\ 3 & 16 & 6 \\ 1 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 404. \end{aligned}$$

Находим величину определителя;

$$\Delta = \begin{vmatrix} 15 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 16 & 6 & -2 \\ 1 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 15A_{11} + 3A_{12} + A_{13} = 397.$$

При составлении формулы плотности вероятности учитываем, что при $i \neq j$ в показателе степени содержатся равные слагаемые

$$k_{ij}^{(-1)}(x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j) = k_{ji}^{(-1)}(x_j - \bar{x}_j)(x_i - \bar{x}_i).$$

Плотность вероятности

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{4\pi^2 \sqrt{397}} \exp \left\{ -\frac{1}{794} [28(x_1 - 10)^2 - 26(x_1 - 10)x_2 + 32(x_1 - 10)(x_3 + 10) - 28(x_1 - 10)(x_4 - 1) + 162x_2^2 - 582x_2(x_3 + 10) + 410x_2(x_4 - 1) + 633(x_3 + 10)^2 - 810(x_3 + 10)(x_4 - 1) + 404(x_4 - 1)^2] \right\}.$$

Пример 19.2. Случайная точка в пространстве задана тремя прямоугольными координатами, составляющими систему нормальных случайных величин с плотностью вероятности

$$f(x, y, z) = \frac{\sqrt{3}}{16\pi^{3/2}} e^{-\frac{1}{8} [2x^2 + 4y^2 - 2y(z+5) + (z+5)^2]}$$

Требуется: а) составить корреляционную матрицу; б) определить геометрическое место точек, в которых плотность вероятности равна 0,01.

Р е ш е н и е. а) Так как

$$f(x, y, z) = f_1(x) f_2(y, z),$$

где

$$f_1(x) = c_1 e^{-\frac{x^2}{4}}, \quad f_2(y, z) = c_2 e^{-\frac{1}{2} \left[y^2 - \frac{2y(z+5)}{4} + \frac{(z+5)^2}{4} \right]}$$

то

$$k_{xy} = k_{xz} = 0.$$

Отсюда следует, что $D[X] = \sigma_x^2 = 2$; $D[Y] = \sigma_y^2 = \frac{1}{1-r^2}$;

$$D[Z] = \sigma_z^2 = \frac{4}{1-r^2}; \quad \frac{r}{\sigma_y \sigma_z (1-r^2)} = \frac{1}{4}; \quad r = \frac{k_{yz}}{\sigma_y \sigma_z} = 0,5;$$

$$k_{yz} = \frac{4}{3};$$

$$\|k_{ij}\| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{16}{3} \end{vmatrix}$$

Пример 19.3. Определить вероятность попадания точки (X, Y, Z) в область, представляющую собой полый параллелепипед, внешняя поверхность которого задана плоскостями

$$x=a_1, x=b_1, y=c_1, y=d_1, z=m_1, z=n_1$$

а внутренняя поверхность — плоскостями

$$x=a_2, x=b_2, y=c_2, y=d_2, z=m_2, z=n_2$$

Рассеивание точек (X, Y, Z) подчинено нормальному закону с главными осями, параллельными координатным осям, центром рассеивания в точке $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ и средними отклонениями E_x, E_y, E_z .

Решение. Так как главные оси рассеивания параллельны координатным осям, то событие, состоящее в том, что одна из координат, например x , примет значение в пределах от a до b , не зависит от того, какие значения примут остальные координаты. Поэтому

$$P(a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, m \leq z \leq n) =$$

$$P(a \leq x \leq b) P(c \leq y \leq d) P(m \leq z \leq n).$$

где

$$P(a \leq x \leq b) = \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{b-\bar{x}}{E_x}\right) - \Phi\left(\frac{a-\bar{x}}{E_x}\right) \right].$$

Аналогично определяются вероятности других неравенств. Искомая вероятность попадания в полный параллелепипед определится как разность вероятностей попадания в параллелепипеды, ограниченные внешней и внутренней поверхностями, т. е.

$$P = \frac{1}{8} \left[\Phi\left(\frac{b_1-\bar{x}}{E_x}\right) - \Phi\left(\frac{a_1-\bar{x}}{E_x}\right) \right] \left[\Phi\left(\frac{d_1-\bar{y}}{E_y}\right) - \Phi\left(\frac{c_1-\bar{y}}{E_y}\right) \right] \times \\ \times \left[\Phi\left(\frac{n_1-\bar{z}}{E_z}\right) - \Phi\left(\frac{m_1-\bar{z}}{E_z}\right) \right] - \frac{1}{8} \left[\Phi\left(\frac{b_2-\bar{x}}{E_x}\right) - \Phi\left(\frac{a_2-\bar{x}}{E_x}\right) \right] \times \\ \times \left[\Phi\left(\frac{d_2-\bar{y}}{E_y}\right) - \Phi\left(\frac{c_2-\bar{y}}{E_y}\right) \right] \left[\Phi\left(\frac{n_2-\bar{z}}{E_z}\right) - \Phi\left(\frac{m_2-\bar{z}}{E_z}\right) \right].$$

Задачи

19.1. Известно, что X и Y —независимые нормальные случайные величины с математическими ожиданиями \bar{x} и \bar{y} , средними отклонениями E_x и E_y соответственно. Выразить функцию распределения системы (X, Y) через приведенные функции Лапласа.

19.2. Даны математические ожидания двух нормальных случайных величин $M[X]=26$, $M[Y] = -12$ и их корреляционная матрица

$$\|k_{ij}\| = \begin{vmatrix} 196 & -91 \\ -91 & 169 \end{vmatrix}$$

Определить плотность вероятности системы (X, Y) . **19.3.** Дана плотность вероятности координат случайной точки на плоскости

$$f(x, y) = ce^{-[4(x-5)^2 + 2(x-5)(y-3) + 5(y-3)^2]}.$$

Требуется: а) определить c ; б) определить корреляционную матрицу; в) вычислить площадь $S_{эл}$ единичного эллипса.

19.4. Определить в точке $x_1=2$, $x_2=2$ плотность вероятности системы двух нормальных случайных величин, для которых

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0 \text{ и } \|k_{ij}\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

19.6. Дана корреляционная матрица системы трех нормальных случайных величин (X, Y, Z) :

$$\|k_{ij}\| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & 3 \\ -2 & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

Математические ожидания $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 0$. Найти плотность вероятности $f(x, y, z)$ и ее максимальное значение.

19.6. Система n нормальных случайных величин имеет корреляционную матрицу

$$\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & & 1 & & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & & 2 & & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 & & 3 & & 3 \\ \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & & n-2 & & n-2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & & n-1 & & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & & n-1 & & n \end{matrix} \|$$

а) Вычислить обратную матрицу, б) Найти плотность вероятности $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, если $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \dots = \bar{x}_n = 0$

19.7. Координаты (X_1, Y_1) и (X_2, Y_2) случайных точек на плоскости подчинены нормальному закону распределения, причем математические ожидания всех координат равны нулю, дисперсии всех координат одинаковы и равны 10; корреляционные моменты между одноименными координатами $M[X_1 X_2] = M[Y_1 Y_2]$ остальные пары координат не коррелированы. Найти плотность вероятности $f(x_1, y_1, x_2, y_2)$.

19.8. Координаты (X, Y) случайной точки A на плоскости подчинены нормальному закону

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi ab} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)}$$

Определить вероятность того, что точка A окажется внутри эллипса с главными полу диаметрами ka и kb , совпадающими с координатными осями Ox и Oy .

19.9. Координаты случайной точки A в пространстве (X, Y, Z) подчинены нормальному закону

$$f(x, y, z) = \frac{\rho^3}{\pi^{3/2} E_1 E_2 E_3} e^{-\rho^2 \left(\frac{x^2}{E_1^2} + \frac{y^2}{E_2^2} + \frac{z^2}{E_3^2} \right)}$$

Определить вероятность того, что точка A окажется внутри эллипсоида с главными полуосями kE_1, kE_2 и kE_3 совпадающими с координатными осями O_x, O_y, O_z .

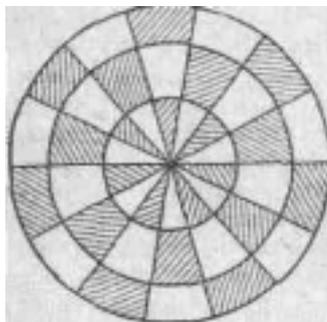
19.10. Определение координат точки на плоскости сопровождается систематической ошибкой d в одной из ее прямоугольных координат и случайной ошибкой, подчиненной нормальному круговому закону распределения со средним отклонением E . Определить вероятность того, что отклонение точки от ее найденного положения не превзойдет величины R .

19.11. Система случайных величин (X, Y) подчинена нормальному закону с числовыми характеристиками $M[X] = M[Y] = 0, E_x = E_y = 10, k_{xy} = 0$. Определить вероятность того, что а) $X < Y$; б) $X > 0, Y < 0$.

19.12. Вычислить вероятность попадания случайной точки A , координаты X, Y которой подчинены нормальному закону, в прямоугольник со сторонами, параллельными главным осям рассеивания, если координаты вершин прямоугольника будут $(a, b), (a, d), (c, b), (c, d)$ при $a = -5, b = 10, c = 5,$

$d = 20, \bar{x} = 0, \bar{y} = 10, E_x = 20, E_y = 10$.

19.13. Случайная точка распределена по нормальному круговому закону со средним отклонением $E = 10$ м. Сравнить вероятность попадания в фигуру, Рис. 17. площадь которой 314 м^2 , если она имеет форму: а) круга; б) квадрата; в) прямоугольника с отношением сторон 10:1. Центр рассеивания совпадает с геометрическим центром фигуры.



19.14. Найти вероятность попадания случайной точки в заштрихованную (на рис. 17) фигуру, ограниченную тремя concentric окружностями и лучами, выходящими из

центра окружностей, если радиус: внешней окружности R .
 рассеивание случайной точки на плоскости нормальное круговое со срединным отклонением E . Центр рассеивания совпадает с центром окружностей.

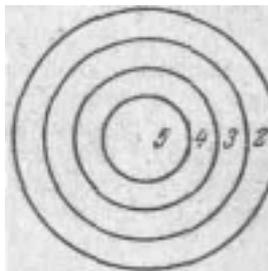
19.15. Найти вероятность попадания в фигуру, ограниченную концентрическими дугами, проведенными радиусами R_1 и R_2 и лучами, выходящими из общего центра O , если рассеивание случайной точки на плоскости нормальное круговое со срединным отклонением E , а угол между лучами равен α . Центр рассеивания совпадает с точкой O ($R_1 < R_2$).

19.16. Для вероятности попадания в прямоугольник со сторонами $2d$ и $2k$, параллельными главным осям рассеивания, имеет место приближенная формула

$$P(\bar{x}, \bar{z}) = \frac{1}{4} \left[\hat{\Phi} \left(\frac{\bar{x}+d}{E_x} \right) - \hat{\Phi} \left(\frac{\bar{x}-d}{E_x} \right) \right] \left[\hat{\Phi} \left(\frac{\bar{z}+k}{E_z} \right) - \hat{\Phi} \left(\frac{\bar{z}-k}{E_z} \right) \right] \approx A \frac{\rho^2}{\pi \alpha \beta} e^{-\rho^2 \left(\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{z}^2}{b^2} \right)}$$

которой рекомендуется пользоваться при значениях d/E_x и k/E_z не превосходящих 1,5. Приравняв нулевые и вторые моменты левой и правой частей равенства, определить значения A , α и β .

19.17. Пользуясь приближенной формулой предыдущей задачи, определить вероятность попадания в прямоугольник со сторонами $2d$ и $2k$, параллельными главным осям рассеивания, если координаты центра рассеивания распределены равномерно внутри данного прямоугольника, а E_x и E_z даны. Сравнить полученный результат с вероятностью попадания в ту же область при совпадении центра рассеивания с центром области.



19.18. Мишень состоит из четырех концентрических окружностей радиусов 10, 20, 30 и 40 см (рис. 18). Попадание в «яблочко» оценивается в 5 баллов, в каждое из трех колец— соответственно в 4, 3 и 2 балла. Задание итается выполненным, если после трех выстрелов получено

не менее 7 баллов, и оценивается на отлично, если получено более 12 баллов. Какова вероятность выполнить задание при круговом рассеивании со срединным отклонением 20 см. Какова вероятность получить при этом отличную оценку? Центр рассеивания совпадает с центром мишени.

19.19. Определить вероятность попадания в прямоугольный треугольник ABC с катетами $BC = a$ и $AC = b$, параллельными главным осям рассеивания ($AC \parallel Oy$, $BC \parallel Ox$), если центр рассеивания совпадает с точкой A , а

$$\frac{a}{E_x} = \frac{b}{E_y} = k.$$

19.20. Чему равна вероятность попадания точки с координатами X, Y, Z в область, представляющую собой шар радиуса R , из которого вырезан куб с ребром a (диагональ куба меньше диаметра шара)? Центр рассеивания совпадает с общим центром шара и куба. Рассеивание нормальное шаровое со срединным отклонением E .

19.21. Рассчитать вероятность попадания точки $A(X, Y, Z)$ в прямой круговой цилиндр с радиусом основания R и высотой h , если рассеивание в плоскости XY , параллельной основанию, подчинено нормальному круговому закону со срединным отклонением E , а рассеивание по образующей независимо от X, Y и подчинено: а) нормальному закону со срединным отклонением B (центр рассеивания находится на оси цилиндра и делит ее в отношении $m: n$); б) равномерному закону распределения в интервале $(-H, H)$ при $H > h$.

19.22. Определить вероятность попадания случайной точки $A(X, Y, Z)$ в прямой круговой конус, вершина которого совпадает с центром рассеивания; высота конуса h , радиус основания R ; рассеивание в плоскости XY , параллельной основанию, подчинено нормальному круговому закону со срединным отклонением E , а рассеивание по высоте независимо от X, Y и подчинено нормальному закону со срединным отклонением a .

19.23. Нормальный закон распределения на плоскости задан математическими ожиданиями случайных величин $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 10$ и корреляционной матрицей

$$\|k_{ij}\| = \begin{vmatrix} 36 & -18 \\ -18 & 25 \end{vmatrix}$$

Определить геометрическое место точек, в которых плотность вероятности равна 10^{-5}

19.24. Нормальный закон распределения в пространстве задан математическими ожиданиями случайных величин

$\bar{x}_1 = 2$, $\bar{x}_2 = 0$, $\bar{x}_3 = -2$ и корреляционной матрицей

$$\|k_{ij}\| = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Определить геометрическое место точек, в которых плотность вероятности равна 10^{-5} .

19.25. Для многомерного нормального распределения, приведенного в задаче 19.6, определить геометрическое место точек, в которых плотность вероятности равна 10^{-5} . При каких n задача не имеет решений?

§ 20. Законы распределения подсистем непрерывных случайных величин и условные законы распределения

Основные формулы

Если $F(x, y)$ —функция распределения системы двух случайных величин, то функция распределения случайной величины X ,

$$F_x(x) = F(x, \infty) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx.$$

Аналогично для функции распределения Y

$$F_y(y) = F(\infty, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy.$$

Плотности вероятности случайных величин, входящих в систему, равны

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy,$$

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

Если $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - функция распределения системы n случайных величин, то функция распределения части этих случайных величин (подсистемы случайных величин), например X_1, X_2, \dots, X_k , равна

$$F_{1,2,\dots,k}(x_1, x_2, \dots, x_k) = F(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, \dots).$$

а соответствующая плотность вероятности

$$f_{1,2,\dots,k}(x_1, x_2, \dots, x_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_{k+1} \dots dx_n$$

Плотности вероятности одной из двух случайных величин, входящих в систему, вычисленные при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение (условные плотности вероятности), равны

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_y(y)}, \quad f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_x(x)}.$$

Плотность вероятности подсистемы случайных величин (X_1, X_2, \dots, X_k), вычисленная при условии, что остальные случайные величины $X_{k+1}, X_{k+2}, \dots, X_n$, приняли определенное значение, равна

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k | x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{f_{k+1, \dots, n}(x_{k+1}, \dots, x_n)}$$

Плотность вероятности системы выражается через условные плотности вероятности по формуле

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2 | x_1) f_3(x_3 | x_1, x_2) \dots f_n(x_n | x_1, x_2, \dots, x_{n-1}).$$

Решение типовых примеров

Пример 20,1. Положение случайной точки $A(X, Y)$ равновероятно в любом месте эллипса с главными полуосями a и b , совпадающими с осями координат Ox и Oy соответственно.

Требуется: а) определить плотности вероятности каждой из прямоугольных координат и их взаимные условные плот-

нести вероятности; б) исследовать зависимость и коррелированность случайных величин, входящих, в систему.

Решение, а) Так как

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi ab} & \text{при } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \\ 0 & \text{при } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1, \end{cases}$$

то при заданном x в интервале $(-a, a)$ плотность $f(x, y)$ отлична от нуля лишь тогда, когда

$$-b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \leq y \leq b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}};$$

значит

$$f_x(x) = \int_{-b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}^{b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \frac{dy}{\pi ab} = \frac{2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}{\pi a}.$$

При $|x| > a$ $f(x) = 0$. Отсюда

$$f(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{2b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} & \text{при } |x| < a, |y| \leq b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \\ 0 & \text{при } |x| > a \text{ или } |y| > b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}. \end{cases}$$

Аналогично

$$f_y(y) = \frac{2}{\pi b} \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}, \quad y \leq b,$$

$$f(x|y) = \frac{1}{2a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}} \quad \text{при } |y| < b, |x| \leq a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$$

и

$$f_y(y) = f(x|y) = 0 \quad \text{при } |y| > b \text{ или } |x| > a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}.$$

б) корреляционный момент между X и Y

$$k_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y) dx dy,$$

причем функция под знаком интеграла отлична от нуля внутри эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Производя замену переменных

$$x = ar \cos \omega, \quad y = br \sin \omega,$$

получим

$$k_{xy} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 arbr \cos \varphi \sin \varphi \frac{1}{\pi ab} ab r dr d\varphi = 0.$$

Таким образом, случайные величины X и Y являются не коррелированными ($k_{xy} = 0$), но зависимыми, поскольку $f_x(x)f_y(y) \neq f(x, y)$

Пример 20.2. Координаты случайной точки на плоскости подчиняются нормальному закону распределения

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma_1^2} - \frac{2r(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\bar{y})^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}$$

Определить: а) плотность вероятности координат X и Y ; б) условные плотности вероятности $f(y | x)$ и $f(x | y)$; в) условные математические ожидания; г) условные дисперсии.
Решение, а) Для определения плотности вероятности координаты X находим

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy.$$

Производя замену переменных

$$\frac{x-\bar{x}}{\sigma_1} = u, \quad \frac{y-\bar{y}}{\sigma_2} = v$$

учитывая, что

$$\frac{1}{1-r^2} [u^2 - 2ruv + v^2] = u^2 + \frac{(v-ru)^2}{1-r^2},$$

получим

$$f_x(x) = e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{1}{\sigma_1 2\pi \sqrt{1-r^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(v-ru)^2}{2(1-r^2)}} dv = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}},$$

или

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_1^2}}$$

Аналогично находим

$$f_y(y) = \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\bar{y})^2}{2\sigma_2^2}}$$

б) Деля $f(x, y)$ на $f_x(x)$ получим

$$f(y|x) = \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi} \sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{[y-\bar{y}-r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\bar{x})]^2}{2(1-r^2)\sigma_2^2}}$$

и аналогично

$$f(x|y) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi} \sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{[x-\bar{x}-r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\bar{y})]^2}{2(1-r^2)\sigma_1^2}}$$

в) Из выражений для условных плотностей вероятности следует, что условное математическое ожидание случайной величины Y при фиксированном значении $X = x$ равно

$$\bar{y}_x = M[Y|x] = \bar{y} + r \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x - \bar{x}).$$

Аналогично

$$\bar{x}_y = M[X|y] = \bar{x} + r \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (y - \bar{y}).$$

Эти уравнения, выражающие линейную зависимость условного математического ожидания одной из случайных величин от фиксированного значения другой случайной величины, называются уравнениями регрессии.

г) Из выражений для условных плотностей распределения следует, что условные дисперсии равны

$$D[Y|x] = \sigma_{y|x}^2 = \sigma_2^2(1-r^2),$$

$$D[X|y] = \sigma_{x|y}^2 = \sigma_1^2(1-r^2).$$

Пример 20.3. Определить плотность вероятности длины радиуса-вектора, если координаты его конца A подчинены нормальному круговому закону

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi a^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2a^2}}$$

Решение. Переходим от прямоугольных координат точки A к полярным (r, ω) . Вероятность попадания значения радиуса-вектора в интервал $(r, r + dr)$, равная $f_r(r)dr$,

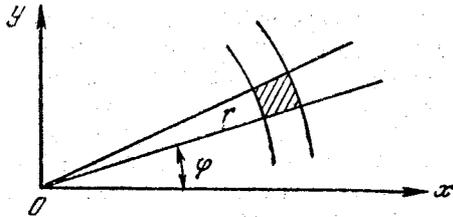


Рис. 19.

может быть найдена как вероятность попадания случайной точки A в бесконечно узкое кольцо, показанное на рис. 19.

Следовательно,

$$f_r(r) dr = \int \int_{r^2 \leq x^2+y^2 < (r+dr)^2} f(x, y) dx dy.$$

Переходя к переменным интегрирования r, ω и учитывая выражение для $f(x, y)$, получим

$$f_r(r) = \int_0^{2\pi} \frac{r}{2\pi a^2} e^{-\frac{r^2}{2a^2}} d\varphi = \frac{r}{a^2} e^{-\frac{r^2}{2a^2}}$$

(распределение Рэлея).

Задачи

20.1. Система случайных величин (X, Y, Z) равномерно распределена внутри прямоугольного параллелепипеда, образованного плоскостями $x = a_1, x = a_2, y = b_1, y = b_2, z = c_1, z = c_2$. Определить плотности вероятности системы (X, Y, Z) , подсистемы (Y, Z) и случайной величины Z .

Проверить зависимость случайных величин, входящих, в систему.

20.2. Положение случайной точки (X, Y) равновероятно в любом месте круга радиуса R , центр которого совпадает с началом координат. Определить плотность вероятности и функцию распределения каждой из прямоугольных координат. Являются ли случайные величины X и Y зависимыми?

20.3. В условиях предыдущей задачи определить условную плотность вероятности $f(y|x)$ при $|x| < R$, $|x| = R$ и $|x| > R$.

20.4. В условиях задачи 20.2 вычислить корреляционную матрицу системы случайных величин X и Y . Являются ли случайные величины X и Y коррелированными?

20.5. Система случайных величин X, Y подчинена равномерному закону распределения внутри квадрата со стороной a . Диагонали квадрата совпадают с осями координат.

Требуется: а) определить плотность вероятности системы (X, Y) ; б) определить плотность вероятности каждой из прямоугольных координат; в) определить условные плотности вероятности; г) вычислить корреляционную матрицу системы случайных величин (X, Y) ; д) проверить их зависимость и коррелированность.

20.6. Случайные величины (X, Y, Z) равномерно распределены внутри сферы радиуса R . Определить для точек, лежащих внутри сферы, плотность вероятности прямоугольной координаты Z и условную плотность вероятности $f(x, y|z)$

20.7. Дан дифференциальный закон распределения системы неотрицательных случайных величин

$$f(x, y) = kxye^{-(x^2+y^2)} \quad (x \geq 0, y \geq 0).$$

Определить $k, f_x(x), f_y(y), f(x|y), f(y|x)$, первые и вторые моменты распределения.

20.8. Для системы случайных величин (X, Y) известны $f_y(y), M[X|y]$ и $D[X|y]$. Определить $M[X]$ и $D[X]$.

20.9. Система двух случайных величин (X, Y) подчиняется нормальному закону распределения

$$f(x, y) = k \exp \left\{ -\frac{1}{0,72\sigma^2} [(x-5)^2 + 0,8(x-5)(y+2) + 0,25(y+2)^2] \right\}.$$

Определить: а) условные математические ожидания и дисперсии; б) плотность вероятности каждой из случайных величин, входящих в систему; в) условные плотности вероятности $f(y | x)$ и $f(x | y)$.

20.10. Плотность вероятности системы двух случайных величин (X, Y) задана в виде

$$f(x, y) = Ae^{-ax^2+bxу-cy^2} \quad (a > 0, c > 0).$$

Определить закон распределения $f_x(x)$ и $f_y(y)$. При каких условиях X и Y являются независимыми случайными величинами?

20.11. Дана плотность вероятности системы двух случайных величин

$$f(x, y) = ke^{-4x^2-6xy-9y^2}.$$

Определить постоянную k , корреляционный момент между X и Y и условные законы распределения $f(x | y)$ и

$$f(y | x)$$

20.12. Положение ориентира на плоскости распределено по нормальному закону при $\bar{x} = 125$ м, $\bar{y} = -30$ м, $\sigma_x = 40$ м, $\sigma_y = 30$ м, $r_{xy} = 0,6$. Координата X определяет отклонение ориентира «по дальности», т. е. по направлению, параллельному линии наблюдения. Координата Y определяет отклонение ориентира «по боковому направлению», перпендикулярному линии наблюдения. Отклонения отсчитываются от начала координат.

Определить: а) плотность вероятности отклонений ориентира по дальности; б) плотность вероятности отклонений ориентира по боковому направлению; в) условную плотность вероятности отклонений ориентира по дальности при отсутствии боковых отклонений; г) условную плотность вероятности отклонений ориентира по боковому направлению при отклонении по дальности +25 м.

20.13. В условиях предыдущей задачи найти уравнения регрессии Y на X и X на Y .

20.14. Определить плотность вероятности длины радиус-вектора случайной точки и его математическое ожидание, если координаты точки (X, Y, Z) подчинены нормальному закону распределения

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} a^3} e^{-\frac{1}{2a^2}(x^2+y^2+z^2)}.$$

20.15. Координаты случайной точки A на плоскости xOy подчинены нормальному закону распределения

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi ab} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)}$$

Определить плотность вероятности полярных координат этой точки $f_r(r)$ и $f_\omega(\omega)$.

20.16. В условиях предыдущей задачи найти условные плотности вероятности $f(r | \omega)$ и $f(\omega | r)$.

20.17. Случайная точка в пространстве подчинена нормальному закону распределения

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} abc} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)}$$

Определить: а) плотность вероятности сферических координат этой точки (R, Θ, Φ) , если $x = r \cos \nu \cos \omega$, $y = r \cos \nu \sin \omega$, $z = r \sin \nu$; б) плотность вероятности подсистем случайных величин (R, Θ) и (Θ, Φ) ; в) условные плотности вероятности $f(r | \nu, \omega)$ и $f(\omega | r, \nu)$.

20.18. Для системы случайных "величин X_1, Y_1, X_2, Y_2 задачи 19.7 найти плотности вероятности подсистем

$$f_{x_1, x_2}(x_1, x_2) \text{ и } f_{y_1, y_2}(y_1, y_2).$$

20.19. В условиях предыдущей задачи определить условную плотность вероятности $f(x_2, y_2 | x_1, y_1)$, условные математические ожидания и условные дисперсии

$$M[X_2 | x_1, y_1], \quad M[Y_2 | x_1, y_1], \quad D[X_2 | x_1, y_1], \quad D[Y_2 | x_1, y_1]$$

$$\text{при } x_1 = 0, y_1 = 10$$

ГЛАВА IV
ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И ЗАКОНЫ
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ СЛУЧАЙНЫХ
ВЕЛИЧИН

§ 21. Числовые характеристики функций случайных
величин

Основные формулы

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины Y , связанной заданной функциональной зависимостью $Y = \omega(X)$ со случайной величиной X , плотность вероятности $f(x)$ которой известна, определяются формулами

$$\bar{y} = M[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx,$$

$$D[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x)]^2 f(x) dx - \bar{y}^2.$$

Аналогичным образом находятся начальные и центральные моменты любого порядка:

$$m_k[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x)]^k f(x) dx,$$

$$\mu_k[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x) - \bar{y}]^k f(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

Данные формулы обобщаются на любое количество случайных аргументов: если $Y = \omega(X_1, X_2, \dots, X_n)$, то

$$m_k[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)]^k \times \\ \times f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

$$\mu_k[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) - \bar{y}]^k \times \\ \times f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

где $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — плотность вероятности системы случайных величин X_1, X_2, \dots, X_n .

Для дискретных случайных величин интегралы в приведенных выше формулах заменяются соответствующими суммами, а плотности — вероятностями соответствующих наборов значений случайных величин X_1, X_2, \dots, X_n .

Если функция $\omega(X_1, X_2, \dots, X_n)$ линейная, т. е.

$$Y = \sum_{j=1}^n a_j X_j + b, \text{ то}$$

$$M[Y] = \sum_{j=1}^n a_j M[X_j] + b,$$

$$D[Y] = \sum_{j=1}^n a_j^2 D[X_j] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j k_{ij},$$

где k_{ij} — корреляционный момент между случайными величинами X_i, X_j .

Знание закона распределения случайных аргументов для нахождения моментов функции не является необходимым также и в некоторых других частных случаях. Пусть $Z = XY$. тогда $M[Z] = M[X]M[Y] + k_{xy}$ — кроме того, случайные величины X и Y не связаны, т. е. корреляционный момент связи k_{xy} равен нулю, то

$$D[Z] = D[X]D[Y] + \bar{x}^2 D[Y] + \bar{y}^2 D[X],$$

$$M[Z] = M[X]M[Y].$$

Последняя формула может быть обобщена на любое число независимых случайных величин:

$$\mathbf{M} \left[\prod_{j=1}^n X_j \right] = \prod_{j=1}^n \mathbf{M} [X_j].$$

Если начальный момент линейной функции

$$Y = \sum_{j=1}^n a_j X_j + b$$

независимых случайных величин существует, то он определяется формулой

$$m_k [Y] = \frac{1}{i^k} \frac{d^k}{dt^k} e^{ibt} \prod_{j=1}^n E_{x_j}(a_j t) \Big|_{t=0}, \quad k = 1, 2, \dots$$

где

$$E_{x_j}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_j(x) e^{itx} dx$$

— характеристическая функция

случайной величины X_j .

Коэффициент асимметрии и эксцесс случайной величины Y в этом случае определяются формулами

$$\text{Sk} [Y] = \frac{\psi'''(t)}{[\psi''(t)]^{3/2}} \Big|_{t=0}, \quad \text{Ex} [Y] = \frac{\psi^{IV}(t)}{[\psi''(t)]^2} \Big|_{t=0}$$

$$\text{где } \psi(t) = \ln \left\{ e^{ibt} \prod_{j=1}^n E_{x_j}(a_j t) \right\}.$$

Решение типовых примеров

Пример 21.1. Случайная величина X подчиняется биномиальному закону распределения. Определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = e^{aX}$.

Решение. Случайная величина X может принимать значения $0, 1, 2, \dots, n$. Вероятность того, что она примет значение m , определяется формулой $P_{n,m} = C_n^m p^m q^{n-m}$.

Поэтому

$$\mathbf{M} [Y] = \sum_{m=0}^n y_m P_{n,m} = \sum_{m=0}^n e^{am} C_n^m p^m q^{n-m} = (q + pe^a)^n,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D} [Y] &= \sum_{m=0}^n y_m^2 P_{n,m} - \bar{y}^2 = \sum_{m=0}^n C_n^m (pe^{2a})^m q^{n-m} - \bar{y}^2 = \\ &= (q + pe^{2a})^n - (q + pe^a)^{2n}. \end{aligned}$$

Пример 21.2. Индикатор кругового обзора навигационной станции представляет собой круг радиуса a . Вследствие помех может появиться пятно с центром в любой точке этого круга. Определить математическое ожидание и дисперсию расстояния центра пятна от центра круга.

Решение. Случайное расстояние R от центра круга до пятна может быть выражено через прямоугольные координаты X и Y :

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

Плотность вероятности системы случайных величин

(X, Y) задана и определяется формулой

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi a^2} & \text{при } x^2 + y^2 \leq a^2, \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 > a^2. \end{cases}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} M[R] &= \frac{1}{\pi a^2} \int \int_{x^2 + y^2 \leq a^2} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \\ &= \frac{1}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 dr = \frac{2}{3} a. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D[R] &= \frac{1}{\pi a^2} \int \int_{x^2 + y^2 \leq a^2} (x^2 + y^2) dx dy - \bar{r}^2 = \\ &= \frac{1}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^3 dr - \frac{4}{9} a^2 = \frac{a^2}{18}. \end{aligned}$$

Аналогично примерам 21.1 и 21.2 решаются задачи 21.1—21.14, 21.20—21.24, 21.26, 21.27, 21.29, 21.30.

Пример 21.3. Из партии в N изделий, в которой имеется $T = Np$ дефектных, произведен выбор без возвращения n изделий. Определить математическое ожидание и дисперсию числа полученных дефектных изделий.

Решение. Обозначим через X случайное число полученных дефектных изделий.

Случайная величина X может быть представлена как

$$X = \sum_{j=1}^n X_j \quad \text{где случайная величина } X_j, \text{ равна } 1, \text{ если } j\text{-е}$$

выбранное изделие оказалось дефектным, и 0 в противоположном случае. Вероятность первого, значения равна p , следовательно, $\bar{x}_j = M[X_j] = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p$ (так же, как при решении примера 6.1, можно показать, что вероятность получения дефектного изделия не зависит от j). Тогда

$$M[X] = M\left[\sum_{j=1}^n X_j\right] = \sum_{j=1}^n M[X_j] = np.$$

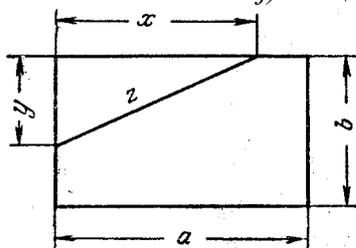


Рис. 20.

При выборе из партии изделий без возвращения, елучайные величины X_j зависимы, поэтому

$$D[X] = D\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n D[X_i] + \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^n \sum_{j=1}^n k_{ij}.$$

где

$$D[X_i] = (1 - \bar{x}_i)^2 p + (0 - \bar{x}_i)^2 (1 - p) = (1 - p)^2 p + p^2 (1 - p) = pq,$$

$$k_{ij} = M[(X_i - \bar{x}_i)(X_j - \bar{x}_j)] = M[X_i X_j] - \{M[X_i]\}^2 =$$

$$= P(X_i=1)P(X_j=1|X_i=1) - p^2 = p \frac{Np-1}{N-1} - p^2 = -\frac{pq}{N-1}.$$

Окончательно

$$D[X] = npq \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right).$$

Аналогично решаются задачи 21.15—21.17, 21.25, 21.28.

Пример 21.4. Определить математическое ожидание квадрата расстояния между двумя точками, выбранными наудачу на любой из сторон прямоугольника.

Решение. При выборе двух точек наугад на любой из сторон прямоугольника возможны следующие единственно возможные и несовместные события (гипотезы) (рис. 20):

H_1 —точки выбраны на одной и той же стороне a ; H_2 —точки выбраны на одной и той же стороне b . H_3 —точки выбраны на смежных сторонах прямоугольника; H_4 —точки выбраны на противоположных сторонах a ; H_5 —точки выбраны на противоположных сторонах b .

Для вероятностей этих гипотез имеем

$$P(H_1) = 2 \left(\frac{a}{2p} \cdot \frac{a}{2p} \right) = \frac{a^2}{2p^2},$$

$$P(H_2) = 2 \left(\frac{b}{2p} \cdot \frac{b}{2p} \right) = \frac{b^2}{2p^2},$$

$$P(H_3) = 8 \left(\frac{a}{2p} \cdot \frac{b}{2p} \right) = 2 \frac{ab}{p^2}$$

$$P(H_4) = 2 \left(\frac{a}{2p} \cdot \frac{a}{2p} \right) = \frac{a^2}{2p^2},$$

$$P(H_5) = 2 \left(\frac{b}{2p} \cdot \frac{b}{2p} \right) = \frac{b^2}{2p^2},$$

где $2p$ — периметр прямоугольника.

Определим условное математическое ожидание (т. е. математическое ожидание при условии, что имела место гипотеза H_i) квадрата расстояния между двумя точками:

$$\begin{aligned} M[Z^2 | H_1] &= \int_0^a \int_0^a f(x, y)(x-y)^2 dx dy = \\ &= \frac{1}{a^2} \int_0^a \int_0^a (x-y)^2 dx dy = \frac{a^2}{6}. \end{aligned}$$

$$M[Z^2 | H_2] = \frac{1}{b^2} \int_0^b \int_0^b (x-y)^2 dx dy = \frac{b^2}{6}.$$

$$M[Z^2 | H_3] = \frac{1}{ab} \int_0^a \int_0^b (x^2 + y^2) dx dy = \frac{1}{3} (a^2 + b^2).$$

$$M[Z^2 | H_4] = M[b^2 + (X-Y)^2] = b^2 + M[(X-Y)^2] = b^2 + \frac{a^2}{6}.$$

$$M[Z^2 | H_5] = M[a^2 + (X-Y)^2] = a^2 + M[(X-Y)^2] = a^2 + \frac{b^2}{6}.$$

Находим полное математическое ожидание случайной величины Z^2 :

$$\begin{aligned} M[Z^2] &= \sum_{j=1}^5 P(H_j) M[Z^2 | H_j] = \\ &= \frac{1}{6p^2} (a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4) = \frac{(a+b)^4}{6p^2} = \frac{p^2}{6}. \end{aligned}$$

Аналогично решаются задачи 21.18, 21.19.

Задачи

21.1. Определить математическое ожидание длины хорды, соединяющей заданную точку окружности радиуса a с произвольной точкой этой окружности.

21.2. Найти математическое ожидание длины хорды, проведенной в круге радиуса a перпендикулярно выбранному диаметру и пересекающей этот диаметр в произвольной точке?

21.3. При сортировке стальных шариков по их размеру в группу с номинальным размером шарика 10 мм попадают шарики, проходящие через круглое отверстие диаметром 10,1 мм и не проходящие через отверстие диаметром 9,9 мм.

Шарики изготовлены из стали с удельным весом $7,8 \text{ г/см}^3$. Найти математическое ожидание и дисперсию веса шарика данной группы, считая распределение радиуса шарика в поле допуска равномерным.

21.4. Неподвижная точка O находится на высоте h над концом A горизонтального отрезка AK длины l . На отрезке AK наудачу выбрана точка B . Найти математическое ожидание угла α между линиями OA и OB .

21.5. Ножки циркуля, каждая длиной 10 см , раздвинуты на случайный угол ω , значения которого равномерно распределены в интервале $[0, 180^\circ]$. Найти математическое ожидание расстояния между остриями ножек.

21.6. Случайная величина X подчиняется нормальному закону распределения. Определить математическое ожидание случайной величины Y , если

$$Y = e^{\frac{\bar{x}^2 - 2\bar{x}X}{2\sigma^2}}.$$

21.7. Вершина C прямого угла прямоугольного равнобедренного треугольника соединяется отрезком прямой с произвольной точкой M основания; длина основания 2 м. Найти математическое ожидание длины отрезка CM .

21.8. На окружности радиуса a с центром в начале координат наудачу выбрана точка. Найти математическое ожидание площади квадрата со стороной, равной абсциссе этой точки.

21.9. В урне черные и белые шары; вероятность извлечь белый шар равна p , а черный - q . Из урны извлекается n шаров, причем вынутый шар каждый раз возвращается обратно в урну. Каково математическое ожидание числа случаев, при которых до и после белого шара извлекается черный шар?

21.10. Система случайных величин X Y подчинена закону нормального распределения

$$f(x, y) = \frac{\rho^2}{\pi E^2} e^{-\rho^2 \frac{x^2 + y^2}{E^2}}.$$

Определить математическое ожидание случайной величины

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

21.11. В полукруге радиуса a произвольно выбраны две точки X и Y , которые вместе с одним из концов ограничивающего диаметра образуют треугольник. Требуется определить математическое ожидание площади этого треугольника.

21.12. На окружность единичного радиуса наудачу ставятся три точки A , B и C . Найти математическое ожидание площади треугольника ABC .

21.13. Число космических частиц, попадающих на данную площадку за время t , подчиняется закону Пуассона

$$P_m = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t}.$$

Энергия каждой частицы является случайной и характеризуется средним значением \bar{w} . Найти среднюю энергию, получаемую площадкой в единицу времени.

21.14. Радиоэлектронный комплекс содержит n элементов. Вероятность повреждения (выхода из строя) k -го элемента равна p_k ($k=1, 2, \dots, n$). Определить математическое ожидание числа поврежденных элементов.

21.15. Комплекс, состоящий из n однотипных блоков, прекращает работу при выходе из строя хотя бы одного из этих блоков, что происходит с одинаковой вероятностью

для любого из них. Вероятность прекращения работы комплекса за некоторый цикл работы равна p . Новый цикл начинается после завершения предыдущего или после ремонта поврежденного блока, если предыдущий цикл не был завершен. Определить математическое ожидание числа блоков, подвергавшихся ремонту хотя бы один раз при m циклах.

21.16. Имеется n блоков, действующих независимо один от другого и совершающих ряд последовательных циклов. Вероятность выхода из строя любого блока за время одного цикла равна p . Новый цикл начинается после завершения предыдущего (отдельно для каждого блока) или после ремонта, если предыдущий цикл для данного блока не был завершен. Определить математическое ожидание числа блоков, подвергавшихся ремонту хотя бы один раз, если каждый блок работал в течение m циклов.

21.17. Число элементов электронной машины, выходящих из строя за некоторый промежуток времени, подчинено закону Пуассона с параметром a . Длительность ремонта машины зависит от числа m вышедших из строя элементов и определяется формулой $t_m = T(1 - e^{-am})$. Определить математическое ожидание длительности ремонта и ущерба, причиненного простоем машины, если ущерб пропорционален квадрату длительности ремонта:

$$S_m = kt_m^2.$$

21.18. Приборный комплекс включает n блоков, действия которых независимы. Для выхода из строя комплекса достаточно повреждения хотя бы одного из блоков. Вероятность выхода из строя комплекса за некоторый период времени равна p , а повреждение любого из его блоков равновероятно. Новый цикл начинается после завершения предыдущего или после ремонта поврежденного блока, если предыдущий цикл не был завершен.

По условию комплекс должен сделать $2m$ циклов, причем после первых m циклов ($m < n/2$) все блоки, подвергшиеся ремонту хотя бы один раз, удаляются, а с оставшимися при прежних условиях повторяется ещё m циклов. Определить математическое ожидание числа блоков, подвергшихся ремонту хотя бы один раз после двух серий по m циклов.

21.19. По n мишеням стрелок производит две серии выстрелов по m в каждой. Стрельба организована так, что

выстрелы делаются последовательно по каждой мишени и наблюдения за результатами внутри каждой серии не производятся. Пуля с вероятностью p может попасть только в мишень, в которую прицелился стрелок. Мишень считается пораженной, если хотя бы одна пуля попала в нее. Вторая серия выстрелов производится после наблюдения результатов первой серии и в тех же условиях, но по пораженным в первой серии мишеням стрельба уже не ведется. Определить математическое ожидание числа пораженных мишеней в двух сериях для случаев $n = m = 8$ и $n/2m$.

21.20. Две точки выбраны наудачу на смежных сторонах прямоугольника со сторонами a и b . Найти математическое ожидание расстояния между этими точками.

21.21. Найти математическое ожидание расстояния между точками, выбранными наудачу на противоположных сторонах прямоугольника со сторонами a, b .

21.22. Получить формулы для математического ожидания и дисперсии числа появлений события при n независимых опытах, если вероятность его появления от опыта к опыту изменяется и в k -м опыте равна $p_k (k=1, 2, \dots, n)$.

21.23. При взвешивании на чашку весов положено 10 разновесов. Точность изготовления каждого из разновесов характеризуется средней ошибкой в 0,1 г. Точность процесса взвешивания характеризуется средней ошибкой в 0,02 г. Найти срединную ошибку в определении веса взвешиваемого тела.

21.24. На отрезке длиной l наудачу выбраны две точки. Найти математическое ожидание и дисперсию расстояния между ними.

21.25. Плотность вероятности для системы случайных величин (X, Y) задана формулой

$$f(x, y) = \frac{1}{300\pi \sqrt{0,75}} e^{-\frac{1}{1,5} \left[\frac{(x-5)^2}{100} + \frac{y(x-5)}{150} + \frac{y^2}{225} \right]}.$$

Определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = aX + bY$.

21.26. Случайная величина X подчиняется нормальному закону распределения

$$f(x) = \frac{\rho}{E_x \sqrt{\pi}} e^{-\rho^2 \frac{x^2}{E_x^2}}.$$

Определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = |X|$.

21.27. Случайная величина X подчиняется закону Пуассона.

Определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = \cos bX$.

21.28. Дальность до маяка определяется как среднее арифметическое из трех измерений. Связь между ошибками измерения зависит от темпа измерений и характеризуется следующими значениями коэффициентов корреляции;

а) при темпе 3 сек. $r_{12} = r_{23} = 0.9, r_{13} = 0.7$;

б) при темпе 5 сек. $r_{12} = r_{23} = 0.7, r_{13} = 0.4$;

в) при темпе измерения 12 сек. $r_{ij} = 0, j \neq i$

Определить значения дисперсии для среднего арифметического результата при измерениях с различным темпом, если ошибки отдельного измерения характеризуются дисперсией, равной 30 м^2 .

21.29. Случайная величина X подчиняется закону распределения, плотность вероятности для которого

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{a^3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

Плотность вероятности случайной величины Y задана формулой

$$f(y) = \begin{cases} \frac{2\rho^2}{E^2} y e^{-\frac{\rho^2 y^2}{E^2}} & \text{при } y \geq 0, \\ 0 & \text{при } y \leq 0. \end{cases}$$

Определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = X - Y$, если случайные величины X и Y независимы.

21.30. Дана случайная точка на плоскости с координатами

(X, Y) , причем $\bar{x} = 10, \bar{y} = -10, \sigma_x = 100, \sigma_y = 20, k_{xy} = 0$

Определить математическое ожидание и дисперсию расстояния Z от начала координат до проекции точки на ось OZ , образующую с осью OX угол $\alpha = 30^\circ$.

21.31. Определить коэффициент корреляции для случайных величин X и Y , если X — центрированная нормальная случайная величина, а $Y = X^n$, где n — целое положительное число.

21.32. Определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = X(Y - \bar{y})$, если плотность вероятности системы (X, Y) задана формулой

$$f(x, y) = \frac{x^2}{\sigma^3 \Delta \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 \Delta^2} [(y - \bar{y})^2 + \Delta^2]}$$

21.33. Колесу придается вращение, которое затухает вследствие трения; фиксированный радиус a , останавливаясь, образует с горизонтом случайный угол ω , который равномерно распределен в пределах от 0 до 360° . Найти математическое ожидание и дисперсию расстояния конца радиуса a от горизонтального диаметра.

21.34. Материальная точка под действием центральной силы описывает эллиптическую траекторию. Известны большая полуось a эллипса и его эксцентриситет e . Предполагая, что с одинаковой вероятностью возможно наблюдение за движущейся точкой в любой момент времени, определить математическое ожидание и дисперсию дальности в момент наблюдения, если наблюдатель находится в притягивающем центре, расположенном в одном из фокусов эллипса, а

дальность R до точки определяется формулой $R = \frac{a(1 - e^2)}{1 - \cos u}$, где u - угол, составленный радиусом-вектором R с большой осью эллипса a . (При движении в центральном поле секторная скорость $R^2 \frac{du}{dt} = \text{const.}$)

§ 22. Законы распределения функций случайных величин

Основные формулы

Плотность вероятности $f_y(y)$ случайной величины Y , где $Y = \omega(X)$ — монотонная функция (т. е. обратная функция $X = \chi(Y)$ однозначная), определяется формулой

$$f_y(y) = f_x[\psi(y)] |\psi'(y)|.$$

Если обратная функция $X = \chi(Y)$ неоднозначна, т. е. одному значению Y соответствует несколько значений $X: \chi_1(y)$.

$\chi_2(y), \chi_3(y), \dots, \chi_k(y)$ (рис 21), то плотность вероятности случайной величины Y определяется формулой

$$f_y(y) = \sum_{j=1}^k f_x[\psi_j(y)] |\psi_j'(y)|.$$

Для функции нескольких случайных аргументов удобнее исходить из формулы для функции распределения $F_y(y)$.

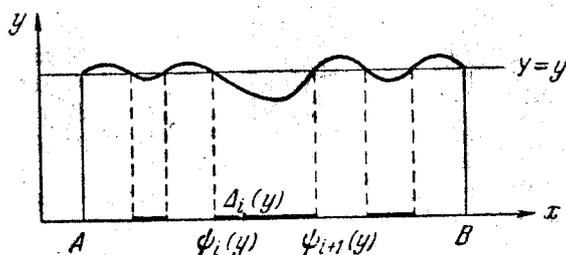


Рис. 21.

Пусть, например, $Y = \omega(X_1, X_2)$ и задана плотность вероятности $f_x(x_1, x_2)$ системы случайных величин (X_1, X_2) . Если D_y - область на плоскости $X_1 O X_2$ для которой $Y < y$, то функция распределения

$$F_y(y) = \iint_{D_y} f_x(x_1, x_2) dx_1 dx_2,$$

а плотность вероятности случайной величины Y $f_y(y) = \frac{d}{dy} F_y(y)$. В общем случае, если известен определитель

Остроградского—Якоби преобразования от случайных величин (X_1, X_2, \dots, X_n) к случайным величинам (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)

$$D = \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

и если это преобразование взаимно однозначно, то

$$f_y(y_1, y_2, \dots, y_n) = |D| f_x(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

величины x_1, \dots, x_n выражены через y_1, \dots, y_n .

Решение типовых примеров

Пример 22.1. Через точку $(0, l)$ наугад проведена прямая (рис. 22). Найти плотность вероятности случайной величины $\eta = l \cos \omega$.

Решение. Угол ω является случайной величиной, равномерно распределенной в интервале $(0, \pi)$ (рис. 22).

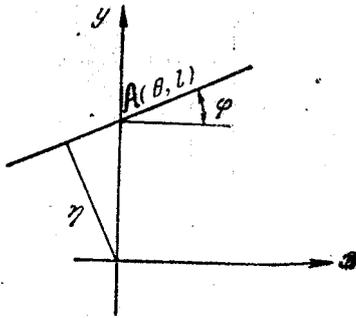


рис 22

Так как при этом обратная функция $\chi(\eta)$ однозначна (с изменением угла ω от 0 до π функция монотонно убывает), то для определения плотности вероятности случайной величины η применима формула

$$f_{\eta}(\eta) = f_{\varphi}[\psi(\eta)] |\psi'(\eta)|,$$

где

$$\psi(\eta) = \arccos \frac{\eta}{l},$$

$$|\psi'(\eta)| = \frac{1}{l \sqrt{1 - \left(\frac{\eta}{l}\right)^2}}, \quad f_{\varphi}(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{при } 0 \leq \varphi \leq \pi, \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

окончательно имеем

$$f_{\eta}(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{l^2 - \eta^2}} & \text{при } |\eta| \leq l, \\ 0 & \text{при } |\eta| > l. \end{cases}$$

Аналогично решаются задачи 22.2, 22.5—22.7, 22.9—22.13, 22.19.

Пример 22.2. Случайная величина Y задана формулой

$$Y = \begin{cases} +\sqrt{X} & \text{при } X \geq 0, \\ +\sqrt{-X} & \text{при } X < 0. \end{cases}$$

Определить плотность вероятности случайной величины Y , если X — нормальная случайная величина с параметрами $\bar{x} = 0$, $D[X] = 1$.

Решение. В рассматриваемом примере обратная функция двузначна (рис. 23); так как одному и тому же значению Y соответствует два значения X :

$$X_1 = -Y^2 \equiv \psi_1(Y)$$

и

$$X_2 = Y^2 \equiv \psi_2(Y),$$

то по общей формуле имеем

$$f_y(y) = f_x(-y^2) \left| -\frac{dy^2}{dy} \right| + f_x(y^2) \left| \frac{dy^2}{dy} \right| =$$

$$= \begin{cases} \frac{4y}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^4}{2}} & \text{при } 0 \leq y < \infty, \\ 0 & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

Аналогично решаются задачи 22.3, 22.4, 22.8.

Пример 22.3. Положение случайной точки с координатами (X, Y)

равновероятно внутри квадрата, сторона

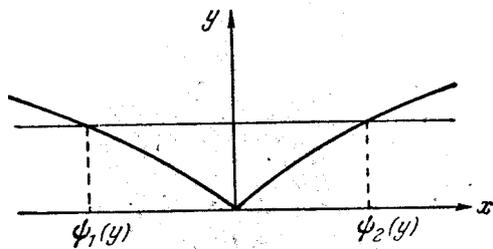
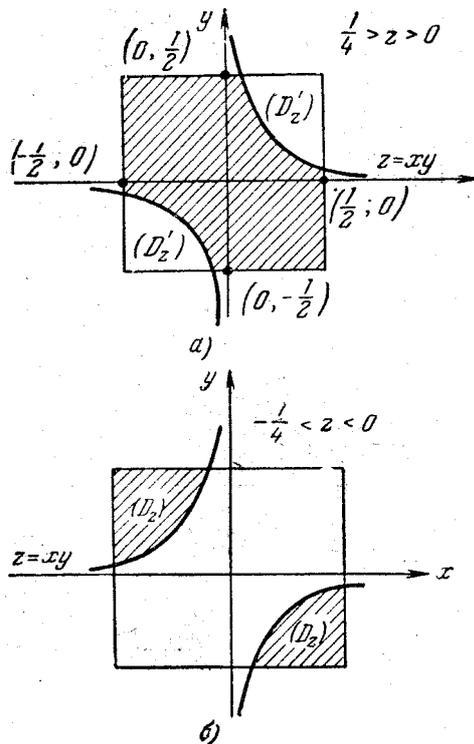


Рис. 23.

которого 1, а центр совпадает с началом координат. Определить плотность вероятности случайной величины $Z = XY$.

Решение. Рассмотрим отдельно два случая: а) $0 < z < 1/4$ и б) $-1/4 < z < 0$. Для этих двух случаев построим на плоскости гиперболы, уравнения которых $z = xy$.

На рис. 24, а, б заштрихована область, внутри которой выполняется условие $Z < z$.



Функция распределения случайной величины Z определяется при $0 < z < 1/4$

$$F_z(z) = P(Z < z) = 1 - P(Z > z) = 1 - 2S_{D'_z} =$$

$$= 1 - 2 \int_{2z}^{1/2} dy \int_{z/y}^{1/2} dx = \frac{1}{2} + 2z - 2z \ln 4z.$$

где $S_{D'_z}$ — площадь области D'_z ;

при $-1/4 < z < 0$

$$F_z(z) = 2S_{D_z} = 2 \int_{-2z}^{1/2} dy \int_{-1/2}^{z/y} dx = \frac{1}{2} + 2z - 2z \ln(-4z).$$

Дифференцируя эти выражения по z , получим плотность вероятности:

при $0 < z < 1/4$

$$f_z(z) = \frac{d}{dz} F_z(z) = -2 \ln 4z;$$

при $-1/4 < z < 0$

$$f_z(z) = \frac{d}{dz} F_z(z) = -2 \ln(-4z).$$

Окончательно плотность вероятности для случайной величины $Z = XY$ может быть записана в таком виде:

$$f_z(z) = \begin{cases} -2 \ln 4|z| & \text{при } |z| < \frac{1}{4}, \\ 0 & \text{при } |z| \geq \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Аналогично решаются задачи 22.16—22.19, 22.21.

Пример 22.4. Система случайных величин (X, Y) распределена нормально с плотностью вероятности

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}.$$

Найти плотность вероятности системы (R, Φ) , если

$$X = R \cos \Phi,$$

$$Y = R \sin \Phi.$$

Решение. Для определения плотности вероятности системы (R, Φ) применяем формулу

$$f(r, \varphi) = f[x(r, \varphi), y(r, \varphi)] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} \right|,$$

где $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)}$ определитель Остроградского — Якоби преобразования от заданной системы к системе (R, Φ) :

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = r.$$

Поэтому

$$f(r, \varphi) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi}{2\sigma^2}} = \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}.$$

Случайные величины R и Φ независимы, так как

$$f(r, \varphi) = f_r(r) f_\varphi(\varphi),$$

где $f_r(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$ — закон Рэлея, $f_\varphi(\varphi)$ — закон равномерного распределения.

Аналогично решаются задачи 22.22, 22.23, 22.25—22.27.

Задачи

22.1. Функция распределения случайной величины X есть $F_x(x)$. Найти функцию распределения случайной величины $Y = aX + b$.

22.2. Дана плотность вероятности $f(x)$ случайной величины X ($0 < x < \infty$). Найти плотность вероятности случайной величины $Y = \ln X$.

22.3. Найти плотность вероятности случайной величины $Z = aX^2$, если X — нормальная случайная величина, $\bar{x} = 0$, $D[X] = \sigma^2$, $a > 0$.

22.4. Определить плотность вероятности случайной величины $Y = |X|$, если X — нормальная случайная величина, Y которой $\bar{x} = 0$, а среднее отклонение E дано. **22.5.** Случайная величина X равномерно распределена в интервале $(0, 1)$ и связана с Y функциональной зависи-

мостью $\operatorname{tg} \frac{\pi Y}{2} = e^X$. Найти плотность вероятности случайной величины Y .

22.6. Найти плотность вероятности объема куба, ребро которого X — случайная величина, равномерно распределенная в интервале $(0, a)$.

22.7. Через точку $(0, l)$ проведена наугад прямая. Найти плотность вероятности абсциссы точки пересечения этой прямой с осью Ox .

22.8. Случайная величина X равномерно распределена в интервале $(-T/2; T/2)$. Определить плотность вероятности случайной величины $Y = a \sin (2\pi/T) X$.

22.9. Случайная величина A подчиняется закону распределения Коши

$$f_x(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Найти плотность вероятности случайной величины Y , если:

а) $Y = 1 - X^2$; б) $Y = aX^2$; в) $F = \operatorname{arctg} X$.

22.10. Определить плотность вероятности случайной величины $Y = X^n$, где n — целое положительное число, если плотность вероятности

$$f_x(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2}.$$

22.11. Случайная величина X распределена в интервале

$(0, \infty)$ с плотностью вероятности $f_x(x) = e^{-x}$. Определить плотность вероятности случайной величины Y , если: а) $Y^2 = X$, а знак у Y равновероятен; б) $Y = \sqrt{X}$.

22.12. Случайная величина X подчиняется закону распределения Пирсона

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(k+1,5)}{\sqrt{\pi} \Gamma(k+1)} (1-x^2)^k & \text{при } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

Найти плотность вероятности случайной величины

$$Y = \arcsin X.$$

22.13. Случайная величина X равномерно распределена в интервале $(0, 1)$. Определить плотность вероятности случайной величины Y , если:

$$a) X = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^Y e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right];$$

$$б) X = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{Y-\bar{y}}{\sigma_y}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right].$$

22.14. Случайные величины X и Y связаны функциональной зависимостью $Y = F_X(X)$. Случайная величина X равномерно распределена в интервале (a, b) , а $F_X(X)$ функция распределения. Найти плотность вероятности случайной величины Y ,

22.15. Случайная величина X равномерно распределена в интервале $(0, 1)$. Задана функция $f_t(t) / 0$, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_t(t) dt = 1.$$

Случайные величины X и Y связаны функциональной зависимостью

$$X = \int_{-\infty}^Y f_t(t) dt.$$

Доказать, что $f_t(y)$ есть плотность вероятности случайной величины Y .

22.16. Система случайных величин (X, Y) подчинена закону нормального распределения

$$f(x, y) = \frac{1}{\sigma_x \sigma_y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} \right)}$$

Какому закону распределения подчиняется случайная величина $Z = X - Y$.

22.17. Определить плотность вероятности случайной величины $Z = XY$, если:

а) задана плотность вероятности $f(x, y)$ системы случайных величин (X, Y) ;

б) X и Y —независимые случайные величины, плотности вероятности которых

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (-\infty < x < \infty),$$

$$f_y(y) = \begin{cases} ye^{-\frac{y^2}{2}} & \text{при } 0 \leq y < \infty, \\ 0 & \text{при } y \leq 0; \end{cases}$$

в) X и Y —независимые нормальные случайные величины с $\bar{x} = \bar{y} = 0$ и дисперсиями σ_x^2 и σ_y^2 соответственно;

г) X и Y —независимые случайные величины, плотности вероятности которых

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}} & \text{при } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{при } |x| > 1, \end{cases}$$

$$f_y(y) = \begin{cases} ye^{-\frac{y^2}{2}} & \text{при } 0 \leq y < \infty, \\ 0 & \text{при } y \leq 0. \end{cases}$$

22.18. Найти плотность вероятности случайной величины $Z = X/Y$, если:

а) задана плотность вероятности $f(x,y)$ системы случайных величин (X, Y) ;

б) X и Y —независимые случайные величины, подчиняющиеся закону распределения Рэлея:

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0, \end{cases}$$

$$f_y(y) = \begin{cases} \frac{y}{a^2} e^{-\frac{y^2}{2a^2}} & \text{при } y \geq 0, \\ 0 & \text{при } y \leq 0; \end{cases}$$

в) X и Y - независимые случайные величины, плотность вероятности которых

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi}{n}}} e^{-\frac{nx^2}{2}} \quad (-\infty < x < \infty),$$

$$f_y(y) = \begin{cases} 2 \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{y^{n-1} e^{-\frac{ny^2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} & \text{при } y \geq 0, \\ 0 & \text{при } y < 0; \end{cases}$$

г) система случайных величин (X, Y) подчиняется нормальному закону распределения

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} - 2r\frac{xy}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)}.$$

22.19. Найти плотность вероятности модуля радиуса-вектора

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}, \text{ если:}$$

а) плотность вероятности $f(x, y)$ для системы случайных величин (X, Y) задана;

б) случайные величины X и Y независимы и подчиняются одному и тому же закону нормального распределения с математическим ожиданием, равным нулю, и средним отклонением E ;

в) плотность вероятности для системы случайных величин (X, Y) задана формулой

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi a^2} & \text{при } x^2 + y^2 \leq R^2, \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 > R^2. \end{cases}$$

г) X и Y — независимые нормальные случайные величины, плотность вероятности которых

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x-h)^2 + y^2}{2\sigma^2}};$$

д) случайные величины X и Y независимы и подчиняются закону нормального распределения с $\bar{x} = \bar{y} = 0$ и дисперсиями σ_x^2 и σ_y^2 соответственно.

22.20. Система случайных величин (X, Y) имеет плотность вероятности

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y-\bar{y}}{\sigma_y}\right)^2 - 2r \frac{(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sigma_x\sigma_y} \right]}.$$

Найти линейное преобразование случайных величин X, Y независимым случайным величинам U и V . Определить средние квадратические отклонения новых случайных величин.

22.21. Оба корня квадратного уравнения $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ с равной вероятностью могут принимать любое значение от -1 до $+1$. Определить плотность вероятности для коэффициентов α и β .

22.22. Прямоугольные координаты (X, Y) случайной точки — зависимые нормальные случайные величины, $\bar{x}, \bar{y}, \sigma_x, \sigma_y, r_{xy}$ Даны. Найти плотность вероятности полярных координат (T, Φ) этой точки, если

$$\frac{X-\bar{x}}{\sigma_x} = T \cos \Phi, \quad \frac{Y-\bar{y}}{\sigma_y} = T \sin \Phi.$$

Каким законам распределения подчиняются T и Φ , если $r_{xy} = 0$

22.23. Пусть $S = S_0 + V_0 t + \frac{At^2}{2}$, где S_0, V_0 и A — нормальные случайные величины, математические ожидания и корреляционная матрица которых известны. Определить плотность вероятности $f(s | t)$.

22.24. Найти плотность вероятности неотрицательного квадратного корня из среднего арифметического квадратов нормальных центрированных случайных величин $Y =$

$$= \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^2}, \quad \text{если дисперсия } D[X_j] = \sigma^2 \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

22.25. Прямоугольные координаты случайной точки

(X_1, X_2, \dots, X_n) имеют плотность вероятности

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n x_j^2}.$$

Для непрерывных случайных величин

$$E_{x_1, x_2, \dots, x_n}(u_1, u_2, \dots, u_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \sum_{k=1}^n u_k x_k} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Характеристическая функция системы независимых случайных величин равняется произведению характеристических функций случайных величин, входящих в систему:

$$E_{x_1, x_2, \dots, x_n}(u_1, u_2, \dots, u_n) = \prod_{j=1}^n E_{x_j}(u_j).$$

Для многомерного нормального распределения с математическими ожиданиями $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ и корреляционной матрицей

$$\|k_{rs}\| = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{vmatrix}$$

$$E(u_1, u_2, \dots, u_n) = \exp \left\{ i \sum_{r=1}^n u_r \bar{x}_r - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n k_{rs} u_r u_s \right\}.$$

В том случае, когда начальные моменты системы случайных величин соответствующего порядка существуют,

$$M[X_1^{r_1} X_2^{r_2} \dots X_n^{r_n}] = i^{-\sum_{k=1}^n r_k} \frac{\partial^{r_1+r_2+\dots+r_n} E_{x_1, x_2, \dots, x_n}(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial u_1^{r_1} \partial u_2^{r_2} \dots \partial u_n^{r_n}} \Big|_{u_1=u_2=\dots=u_n=0}.$$

Если случайная величина $Y = \omega(X)$, то

$$E_y(u) = M[e^{iuY}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iu\omega(x)} f(x) dx.$$

Характеристическая функция системы случайных величин $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)'$ каждая из которых является функцией других случайных величин

$$Y_1 = \varphi_1(X_1, X_2, \dots, X_m),$$

$$Y_2 = \varphi_2(X_1, X_2, \dots, X_m),$$

$$Y_n = \varphi_n(X_1, X_2, \dots, X_m),$$

равна

$$E_{y_1, \dots, y_n}(u_1, \dots, u_n) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \sum_{k=1}^n u_k \varphi_k(x_1, \dots, x_m)} f(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m.$$

Характеристическая функция подсистемы случайных величин может быть получена из характеристической функций системы, если переменные u_k , относящиеся к величинам, не входящим в подсистему, заменить нулями,

Решение типовых примеров

Пример 23.1. Частица начинает движение из начала координат и перемещается в некотором направлении на расстояние l_1 . Затем она мгновенно меняет направление движения и в новом произвольном направлении перемещается на величину l_1 . Траектория блуждающей таким образом частицы состоит из отрезков длиной l_1, l_2, \dots, l_n направление каждого из которых определяется углом α_k , с осью Ox , равномерно распределенным в интервале $(0, 2\pi)$. Случайные величины $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ независимы. Найти характеристическую функцию координаты X конечной точки траектории и соответствующую ей плотность вероятности.

Решение. Координата X определяется как сумма проекций отрезков l_k на ось Ox :

$$X = \sum_{k=1}^n l_k \cos \alpha_k.$$

Вследствие независимости α_k

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \prod_{k=1}^n f(\alpha_k),$$

причем

$$f(\alpha_k) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{при } 0 \leq \alpha_k \leq 2\pi, \\ 0 & \text{при } \alpha_k < 0, \alpha_k > 2\pi. \end{cases}$$

поэтому

$$\begin{aligned} E_x(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{iu \sum_{k=1}^n l_k \cos \alpha_k} f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) d\alpha_1 \dots d\alpha_n = \\ &= \prod_{k=1}^n \int_0^{2\pi} e^{iul_k \cos \alpha_k} \frac{d\alpha_k}{2\pi} = \prod_{k=1}^n J_0(l_k u), \end{aligned}$$

где J_0 - функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Отсюда

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} \prod_{k=1}^n J_0(l_k u) du,$$

или

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos ux \prod_{k=1}^n J_0(l_k u) du.$$

Пример 23.2. Задана корреляционная матрица $\|k_{rs}\|$ системы шести нормальных случайных величин X_1, X_2, \dots, X_6 , математические ожидания которых равны нулю. Пользуясь методом характеристических функций, определить математическое ожидание произведения $X_3^2 X_2 X_4$.

Решение. Математическое ожидание $M[X_3^2 X_2 X_4]$ определяется распределением подсистемы случайных величин (X_2, X_3, X_4) . Соответствующая этой подсистеме характеристическая функция имеет вид

$$E_{x_2, x_3, x_4}(u_2, u_3, u_4) = e^{-\frac{1}{2} \sum_{r=2}^4 \sum_{s=2}^4 k_{rs} u_r u_s}.$$

Искомое математическое ожидание может быть получено путем четырехкратного дифференцирования характеристической функции

$$M[X_3^2 X_2 X_4] = \left. \frac{\partial^4 E_{x_2, x_3, x_4}(u_2, u_3, u_4)}{\partial u_3^2 \partial u_2 \partial u_4} \right|_{u_2=u_3=u_4=0}.$$

Первый способ. Если разложить характеристическую функцию в ряд по степеням ее показателя степени, то обнаружится, что при нахождении интересующей нас смешанной производной при $u_2 = u_3 = u_4 = 0$ только один член разложения дает результат, отличный от нуля:

$$M[X_3^2 X_2 X_4] = \frac{1}{8} \frac{\partial^4 \left(\sum_{r=2}^4 \sum_{s=2}^4 k_{rs} u_r u_s \right)^2}{\partial u_3^2 \partial u_2 \partial u_4} \Big|_{u_2=u_3=u_4=0}$$

Смешанная производная от квадрата многочлена при $u_2 = u_3 = u_4 = 0$ будет в свою очередь иметь отличными от нуля только те члены, которые до дифференцирования были пропорциональны $u_3^2 u_2 u_4$, т.е.

$$M[X_3^2 X_2 X_4] = \frac{1}{4} \frac{\partial^4 (2k_{33}k_{24}u_3^2 u_2 u_4 + 4k_{23}k_{34}u_3^2 u_2 u_4)}{\partial u_3^2 \partial u_2 \partial u_4} = k_{33}k_{24} + 2k_{23}k_{34}.$$

Второй способ. Для удобства введем обозначение

$$\tau_r = \sum_{s=1}^n k_{rs} u_s.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial u_3} &= \frac{\partial}{\partial u_3} e^{-\frac{1}{2} \sum_{r=1}^6 \sum_{s=1}^6 k_{rs} u_r u_s} = -E \tau_3, \\ \frac{\partial^2 E}{\partial u_3^2} &= E \tau_3^2 - E \frac{\partial \tau_3}{\partial u_3} = E \tau_3^2 - E k_{33}, \\ \frac{\partial^3 E}{\partial u_3^2 \partial u_2} &= -E \tau_3^2 \tau_2 + 2E \tau_3 k_{23} + E \tau_2 k_{33}, \\ \frac{\partial^4 E}{\partial u_3^2 \partial u_2 \partial u_4} &= E \tau_3^2 \tau_2 \tau_4 - 2E \tau_3 \tau_2 k_{34} - E \tau_3^2 k_{24} - 2E \tau_3 \tau_4 k_{23} + \\ &\quad + 2E k_{34} k_{23} - E \tau_2 \tau_4 k_{33} + E k_{24} k_{33}. \end{aligned}$$

При $u_1 = u_2 = \dots = u_6 = 0$ имеем

$$E = 1, \quad \tau_r = 0,$$

вследствие чего

$$M[X_3^2 X_2 X_4] = k_{33}k_{24} + 2k_{23}k_{34}.$$

Аналогично решаются задачи 23.11—23.14.

Задачи

23.1. Доказать, что характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению характеристических функций слагаемых.

23.2. Задана $E_{x_1, \dots, x_n}(u_1, \dots, u_n)$ — характеристическая функция системы случайных величин (X_1, X_2, \dots, X_n) . Найти характеристическую функцию суммы $Z = X_1 + X_2 + \dots$

$$\dots + X_n$$

23.3. Найти характеристическую функцию линейной

функции $Y = \sum_{k=1}^n a_k X_k + c$ независимых случайных величин X_1, X_2, \dots, X_n , характеристические функции которых заданы.

23.4. Найти характеристическую функцию квадрата отклонения нормальной случайной величины от ее математического ожидания $Y = (X - \bar{x})^2$ и начальные моменты распределения Y .

23.5. Найти характеристическую функцию случайной величины $Y = aF(X) + b$, где X — случайная величина, $F(x)$ — ее функция распределения.

23.6. Найти характеристическую функцию случайной величины $Y = \ln F(X)$, где X — случайная величина, а $F(x)$ — ее функция распределения. Определить начальные моменты распределения Y .

23.7. Найти характеристическую функцию проекции отрезка a на ось Ox , если угол между отрезком и осью Ox подчинен закону равной вероятности в пределах от 0 до 2π . Определить плотность вероятности проекции отрезка.

23.8. Найти характеристическую функцию системы двух случайных величин, подчиненных нормальному закону распределения

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma_1^2} - \frac{2r(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\bar{y})^2}{\sigma_2^2} \right]}$$

характеристическую функцию системы n случайных величин (X_1, X_2, \dots, X_n) подчиненных нормальному закону распределения, если заданы математические ожи-

даны случайных величин, входящих в систему, $\overline{x_m} = a$, и их корреляционная матрица

$$||k_{rs}|| = \begin{vmatrix} \sigma^2 & \alpha\sigma^2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha\sigma^2 & \sigma^2 & \alpha\sigma^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\sigma^2 & \sigma^2 & \alpha\sigma^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma^2 & \alpha\sigma^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha\sigma^2 & \sigma^2 \end{vmatrix}$$

($r, s = 1, 2, \dots, n$).

23.10. Найти характеристическую функцию

$$Y = \sum_{m=1}^n X_m,$$

где (X_1, X_2, \dots, X_n) — система нормальных случайных величин.

23.11. Пользуясь методом характеристических функций, определить $\mathbf{M}[(X_1^2 - \sigma^2)(X_2^2 - \sigma^2)]$ если X_1, X_2 — нормальные случайные величины, для которых $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0$.

$$\mathbf{M}[X_1^2] = \mathbf{M}[X_2^2] = \sigma^2, \quad \text{а} \quad \mathbf{M}[X_1 X_2] = k_{12}.$$

23.12. Пользуясь методом характеристических функций, определить: а) $\mathbf{M}[X_1^2 X_2^2 X_3^2]$; б) $\mathbf{M}[(X_1^2 - \sigma^2)(X_2^2 - \sigma^2)(X_3^2 - \sigma^2)]$ если X_1, X_2 и X_3 — нормальные случайные величины, для которых $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}_3 = 0$, $\mathbf{M}[X_1^2] = \mathbf{M}[X_2^2] = \mathbf{M}[X_3^2] = \sigma^2$, а k_{12} , k_{13} и k_{23} — корреляционные моменты между соответствующими случайными величинами.

23.13. Пользуясь методом характеристических функций, определить $\mathbf{M}[X_1, X_2, X_3]$. если X_1, X_2, X_3 — нормальные центрированные случайные величины.

23.14. Пользуясь методом характеристических функций; выразить $\mathbf{M}[X_1, X_2, X_3, X_4]$ через элементы корреляционной матрицы k_{ml} системы нормальных случайных величин X_1, X_2, X_3, X_4 математические ожидания которых равны нулю.

23.15. Доказать, что центральный момент четного порядка системы n нормальных случайных величин определяется формулой

$$\begin{aligned} \mu_{r_1, r_2, \dots, r_n} &= M[(X_1 - \bar{x}_1)^{r_1} (X_2 - \bar{x}_2)^{r_2} \dots (X_n - \bar{x}_n)^{r_n}] = \\ &= \frac{r_1! r_2! \dots r_n!}{2^s s!} \sum k_{m_1 l_1} \dots k_{m_s l_s}, \end{aligned}$$

где $r_1 + r_2 + \dots + r_n = 2s$, а сумма распространена на все возможные различные перестановки $2s$ индексов m_1, m_2, \dots, m_n и l_1, l_2, \dots, l_n , из которых r_1 индексов равны 1, r_2 индексов равны 2, ..., r_n индексов равны n .

23.16. Дана система зависимых нормальных случайных величин (X_1, X_2, \dots, X_n) . Доказать, что случайная величина $Y = \sum_{j=1}^n a_j X_j + b$ также подчиняется нормальному закону распределения.

23.17. Продукция завода состоит из однотипных изделий, каждое из которых в r -м квартале года ($r = 1, 2, 3, 4$) с вероятностью p_r относится к первому сорту и с вероятностью $q_r = 1 - p_r$ — ко второму сорту. Изделие первого сорта оценивается в S_1 , а второго — в S_2 рублей. Определить характеристическую функцию системы случайных величин X и Y , где X — стоимость изделий, выпущенных за первые три квартала, а Y — за последние три квартала года. Определить корреляционный момент X и Y . Число изделий, выпускаемых в r -м квартале, равно N_r .

§ 24. Композиция законов распределения

Основные формулы

Нахождение закона распределения суммы независимых случайных величин по известным законам распределения слагаемых называется композицией законов распределения. Если X и Y — независимые дискретные случайные величины, то ряд распределения случайной величины $Z = X + Y$ определяется формулой

$$\begin{aligned} P(Z = z_i) &= \sum_j P(X = x_j) P(Y = z_i - x_j) = \\ &= \sum_k P(Y = y_k) P(X = z_i - y_k), \end{aligned}$$

где суммирование ведется по всем возможным значениям случайных величин.

Если X и Y — непрерывные случайные величины, то плотность вероятности для случайной величины $Z = X + Y$

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) f_y(z-x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_y(y) f_x(z-y) dy,$$

а функция распределения $F_z(z)$ определяется формулой

$$F_z(z) = \int \int_{x+y < z} f_x(x) f_y(y) dx dy.$$

Плотность вероятности $f_y(y)$ суммы независимых случайных величин X_1, X_2, \dots, X_n ($Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$) определяется или с помощью характеристических функций по формуле

$$f_y(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyt} \left\{ \prod_{j=1}^n E_{x_j}(t) \right\} dt,$$

где

$$E_{x_j}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} f_{x_j}(x) dx,$$

или путем последовательного применения формулы композиции для двух случайных величин.

Решение типовых примеров

Пример 24.1. Найти плотность вероятности суммы двух независимых случайных величин $Z = X + Y$, где X равномерно распределена в интервале $(0, 1)$, а Y имеет распределение Симпсона (рис. 25):

$$f_y(y) = \begin{cases} y & \text{при } 0 \leq y \leq 1, \\ 2-y & \text{при } 1 \leq y \leq 2, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Решение. Так как функция $f_x(x)$ и $f_y(y)$ отличны от нуля только в определенных интервалах изменения своих

аргументов, то удобнее сперва найти функцию распределения случайной величины Z . Имеем

$$F_z(z) = P(Z < z) = \iint_{D_z} f_x(x) f_y(y) dx dy,$$

где D_z — область, внутри которой $x + y < z$ и ни одна из функций $f_x(x)$ и $f_y(y)$ не обращается в нуль (рис. 26).

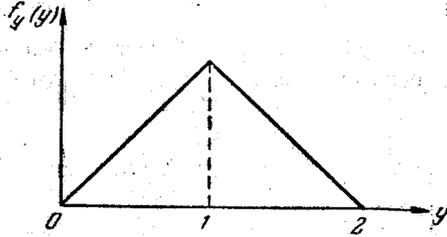


Рис. 25.

Вид области интегрирования будет различен в зависимости от того, в каком из трех интервалов $(0, 1)$, $(1, 2)$ или $(2, 3)$ будет находиться значение z . Вычисляя для этих случаев интегралы, получим

$$F_z(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z < 0, \\ \int_0^z f_y(y) dy \int_0^{z-y} f_x(x) dx = \frac{z^3}{6} & \text{при } 0 \leq z \leq 1, \\ \int_0^{z-1} dx \int_0^1 y dy + \int_0^{z-1} dx \int_1^{z-x} (2-y) dy + \\ + \int_{z-1}^1 dx \int_0^{z-x} y dy = z-1 + \\ + \frac{(2-z)^3}{6} - \frac{(z-1)^3}{6} & \text{при } 1 \leq z \leq 2, \\ 1 - \int_{z-1}^2 (2-y) dy \int_{z-y}^1 dx = 1 - \frac{1}{6}(3-z)^3 & \text{при } 2 \leq z \leq 3, \\ 1 & \text{при } z > 3. \end{cases}$$

Дифференцируя по z , определяем плотность вероятности:

$$f_z(z) = \begin{cases} \frac{z^2}{2} & \text{при } 0 \leq z \leq 1, \\ -z^2 + 3z - \frac{3}{2} & \text{при } 1 \leq z \leq 2, \\ \frac{1}{2}(z^2 - 6z + 9) & \text{при } 2 \leq z \leq 3, \\ 0 & \text{при } z < 0 \text{ или } z > 3. \end{cases}$$

Функции $f_x(x)$, $f_y(y)$ и $f_z(z)$ представлены на рис. 27. Аналогично решаются задачи 24.1, 24.2, 24.4, 24.8.

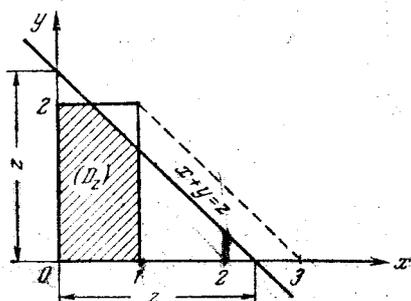


Рис. 26.

Пример 24.2. На отрезке A_1A_2 длиной $2L$ наудачу выбрана точка C . Возможное отклонение центра отрезка $F_1F_2=2B$ от середины отрезка A_1A_2 имеет нормальное

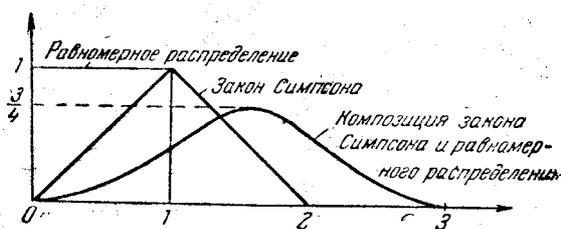


Рис. 27.

распределение со средним отклонением E . Определить вероятность того, что удаление точки C от середины отрезка F_1F_2 не превзойдет заданной величины $(d + B)$.

Решение. Обозначим случайное отклонение точки C от центра отрезка A_1A_2 через X , а отклонение центра отрезка F_1F_2 от середины отрезка A_1A_2 через Y (рис. 28), тогда отклонение точки C от центра отрезка F_1F_2 будет

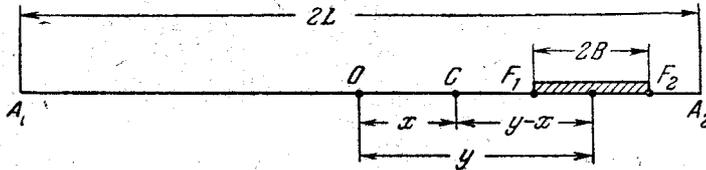


Рис. 28.

равно $Z = Y - X$. Так как функция $f_y(y)$ отлична от нуля на всей числовой оси, то

$$\begin{aligned} f_z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) f_y(z+x) dx = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \frac{\rho}{E\sqrt{\pi}} e^{-\rho^2 \frac{(z+x)^2}{E^2}} dx = \\ &= \frac{1}{2L} \frac{\rho}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{z-L}{E}}^{\frac{L+z}{E}} e^{-\rho^2 t^2} dt = \frac{1}{4L} \left[\hat{\Phi}\left(\frac{L+z}{E}\right) + \hat{\Phi}\left(\frac{L-z}{E}\right) \right]. \end{aligned}$$

Удаление точки C от середины отрезка F_1F_2 не превзойдет величины $d+B$, если $|z| < d+B$. Поэтому вероятность этого события определяется формулой

$$\begin{aligned} P = \mathbf{P}(|z| < d+B) &= \int_{-(d+B)}^{d+B} f_z(z) dz = \\ &= \frac{1}{4L} \int_{-(d+B)}^{d+B} \left[\hat{\Phi}\left(\frac{L+z}{E}\right) + \hat{\Phi}\left(\frac{L-z}{E}\right) \right] dz = \\ &= \frac{E}{4L} \left[\int_{\frac{L-d-B}{E}}^{\frac{L+d+B}{E}} \hat{\Phi}(t) dt - \int_{\frac{L+d+B}{E}}^{\frac{L-d-B}{E}} \hat{\Phi}(t) dt \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{E}{2L} \int_{\frac{L-d-B}{E}}^{\frac{L+d+B}{E}} \hat{\Phi}(t) dt = \frac{1}{2L} \left\{ (L+B+d) \hat{\Phi}\left(\frac{L+B+d}{E}\right) - \right. \\ \left. - (L-B-d) \hat{\Phi}\left(\frac{L-B-d}{E}\right) + \right. \\ \left. + \frac{E}{\rho\sqrt{\pi}} \left[e^{-\frac{\rho^2}{E^2}(L+B+d)^2} - e^{-\frac{\rho^2}{E^2}(L-d-B)^2} \right] \right\}.$$

Аналогично решаются задачи 24.3, 24.5 — 24.7, 24.13 — 24.15.

Пример 24.3. Смешаны две группы однотипных деталей, содержащие n_1 и n_2 деталей каждая. Число бракованных деталей в каждой группе (соответственно X и Y) имеет биномиальное распределение:

$$P(X = m) = C_{n_1}^m p^m q^{n_1-m},$$

$$P(Y = m) = C_{n_2}^m p^m q^{n_2-m}.$$

Найти ряд распределения случайной величины $Z = X + Y$.

Решение. Для того чтобы вероятность $P(Z = z)$ была отличной от нуля, Z должно быть целым и находиться в интервале $(0, n_1 + n_2)$. Применяя общую формулу и учитывая, что $0 \leq x \leq z$, получим

$$P(Z = z) = \sum_{x=0}^z C_{n_1}^x p^x q^{n_1-x} C_{n_2}^{z-x} p^{z-x} q^{n_2-z+x} = \\ = p^z q^{n_1+n_2-z} \sum_{x=0}^z C_{n_1}^x C_{n_2}^{z-x} = C_{n_1+n_2}^z p^z q^{n_1+n_2-z}$$

$$(z = 0, 1, 2, \dots, n_1 + n_2).$$

(Равенство $\sum_{x=0}^z C_{n_1}^x C_{n_2}^{z-x} = C_{n_1+n_2}^z$ может быть доказано, например, по индукции. Сначала доказать для $n_1 = 1$ и любых n_2 .)

Эта задача может быть решена и с помощью характеристических функций. Для случайных величин X и Y имеем

$$E_x(t) = M[e^{tX}] = (pe^{it} + q)^{n_1},$$

$$E_y(t) = M[e^{tY}] = (pe^{it} + q)^{n_2}.$$

Так как случайные величины X и Y по условию независимы, то

$$E_z(t) = E_x(t)E_y(t) = (pe^{it} + q)^{n_1+n_2}.$$

Из этого следует, что случайная величина Z также имеет биномиальное распределение.

Аналогично решаются задачи 24.12, 24.16 — 24.21.

Пример 24.4. Пусть X_1, X_2, \dots, X_n — независимые случайные величины, каждая из которых подчиняется закону Пуассона

$$P(X_j = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$$

с одинаковым параметром a .

Найти ряд распределения случайной величины $Y = \sum_{j=1}^n X_j$ и доказать, что центрированная и нормированная случайная величина $\frac{Y - \bar{y}}{\sigma_y}$ при $n \rightarrow \infty$ имеет нормальное распределение.

Решение. Определяем характеристическую функцию для случайной величины X_j :

$$\begin{aligned} E_{x_j}(t) &= M[e^{itX_j}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ikt} \frac{a^k}{k!} e^{-a} = \\ &= e^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ae^{it})^k}{k!} = e^{-a} e^{ae^{it}} = e^a(e^{it} - 1). \end{aligned}$$

Так как случайные величины X_j независимы, то характеристическая функция случайной величины Y определяется формулой

$$E_y(t) = \prod_{j=1}^n E_{x_j}(t) = e^{na(e^{it} - 1)}.$$

Следовательно, случайная величина Y имеет своим законом распределения закон Пуассона с параметром na . Обозначим $Z = \frac{Y - \bar{y}}{\sigma_y}$. Случайная величина Z получена в результате центрирования и нормирования случайной величины Y . Известно, что для закона Пуассона математическое

ожидаемое и дисперсия численно равны между собой и равны параметру этого закона. Поэтому

$$Z = \frac{Y - na}{\sqrt{na}}.$$

Определим характеристическую функцию для случайной величины Z :

$$\begin{aligned} E_z(t) &= M[e^{itZ}] = M\left[e^{\frac{it(Y-na)}{\sqrt{na}}}\right] = e^{-it\sqrt{na}} E_y\left(\frac{t}{\sqrt{na}}\right) = \\ &= e^{-it\sqrt{na}} e^{na\left(e^{\frac{it}{\sqrt{na}}} - 1\right)} = e^{-na} e^{-it\sqrt{na}} e^{nae^{\frac{it}{\sqrt{na}}}} = \\ &= e^{-na} e^{-it\sqrt{na}} \exp\left[na\left(1 + \frac{it}{\sqrt{na}} - \frac{t^2}{2na} + \dots\right)\right] = \\ &= e^{-na} e^{-it\sqrt{na}} e^{na\left(-\frac{t^2}{2na} + \frac{i^3 t^3}{3!(na)^{3/2}} - \dots\right)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_z(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Предельное значение $E_z(t)$ является характеристической функцией случайной величины, имеющей нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной единице.

Аналогично решаются задачи 24.6, 24.10, 24.19, 24.20.

Задачи

• 24.1. Определить плотность вероятности суммы двух независимых величин, каждая из которых равномерно распределена в интервале (a, b) .

24.2. Найти композицию двух законов равномерного распределения с параметрами a и b ($b > a$), если центры распределения для этих законов совпадают, а параметром закона равномерного распределения называется половина интервала возможных значений случайной величины.

24.3. Случайная величина X подчиняется нормальному закону распределения с параметрами \bar{x} и σ_x , а Y — закону

равномерного распределения с параметром $\frac{b-a}{2}$ и $\bar{y} = \frac{a+b}{2}$.

Найти плотность вероятности случайной величины $Z = X - Y$, если X и Y независимы.

24.4. Найти плотность вероятности суммы трех независимых случайных величин, каждая из которых равномерно распределена в интервале (a, b) .

24.5. Найти композицию нормального закона (математическое ожидание \bar{x} , среднее отклонение E) и закона равномерного распределения, заданного в интервале $(\bar{x} - l, \bar{x} + l)$. Определить относительную ошибку, возникающую от замены суммарного закона нормальным законом, имеющим то же математическое ожидание и ту же дисперсию. (Расчет произвести для $\bar{x} = 0$, $l = E$, $l = 2E$, $l = 3E$ и $l = 4E$ в точке $z = 0$.)

24.6. Найти плотность вероятности случайной величины $Z = X + Y$, если случайные величины X и Y независимы и подчиняются закону Коши:

$$f_x(x) = \frac{1}{\pi} \frac{h}{1+h^2(x-a)^2}, \quad f_y(y) = \frac{1}{\pi} \frac{k}{1+k^2(y-b)^2}.$$

24.7. Найти плотность вероятности суммы двух независимых случайных величин X и Y , подчиняющихся закону гиперболического секанса:

$$f_x(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\operatorname{ch} x}, \quad f_y(y) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\operatorname{ch} y}.$$

• 24.8. Пусть X и Y — независимые случайные величины, плотности вероятности которых заданы формулами

$$f_x(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} \quad (0 \leq x < \infty),$$

$$f_y(y) = \frac{1}{3} e^{-\frac{y}{3}} \quad (0 \leq y < \infty).$$

Найти плотность вероятности случайной величины $Z = X + Y$.

24.9. Найти плотность вероятности расстояния между случайными точками $A_1(X_1, Y_1)$ и $A_2(X_2, Y_2)$, если системы случайных величин (X_1, Y_1) и (X_2, Y_2) независимы и нор-

мально распределены. Единичные эллипсы рассеивания точек A_1 и A_2 имеют главные полу диаметры (a_1, b_1) и (a_2, b_2) . Угол между полу диаметрами a_1 и a_2 равен α . Центры единичных эллипсов совпадают.

24.10. Пусть X_j ($j = 1, 2, \dots, n$) — нормально распределенные независимые случайные величины, $\bar{x}_j = 0$ и $D[X_j] = 1$.

Доказать, что для случайной величины $Y = \sum_{j=1}^n X_j^2$ плотность вероятности определяется формулой

$$f_y(y) = \frac{y^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{y}{2}} \quad (0 \leq y < \infty).$$

24.11. Прибор дает при измерении систематическую ошибку a и случайную ошибку, подчиненную нормальному закону распределения со средним отклонением E . Доказать, что при $E \gg d$ вероятность $p(a)$ получения ошибки в пределах заданного допуска $\pm d$ приближенно определяется формулой

$$p(a) \approx \frac{2\rho d}{E_x \sqrt{\pi}} e^{-\rho^2 \left(\frac{a}{E_x}\right)^2},$$

где

$$E_x = \sqrt{E^2 + \frac{2}{3} \rho^2 d^2}.$$

24.12. Двое независимо один от другого стреляют в тире каждый по своей мишени до первого попадания. Определить математическое ожидание и дисперсию общего числа промахов и найти функцию распределения числа промахов, если вероятность попадания в мишень при каждом выстреле для первого стрелка равна p_1 , а для второго p_2 .

24.13. Какой запас прочности должен иметь образец, чтобы вероятность того, что он выдержит нагрузку, была бы не менее 98%? Ошибки в определении заданной нагрузки и ошибки определения предельной нагрузки подчиняются закону нормального распределения и характеризуются средними отклонениями $E_{q_1} = 10\% \bar{q}_1$ и $E_{q_2} = 5\% \bar{q}_2$, где \bar{q}_1 и \bar{q}_2 — математические ожидания заданной и предельной нагрузок, причем $\bar{q}_1 = 20$ кг.

24.14. Для навигационного обслуживания судов, проходящих через пролив шириной L , на каждом берегу пролива установлено по одному радиомаяку. Максимальные дальности действия этих приборов являются независимыми нормальными случайными величинами, характеризующимися математическим ожиданием \bar{x} и средним отклонением E . Полагая, что удаление курса судна от берегов пролива равновозможно и $2\bar{x} < L$, определить: а) вероятность того, что судно будет обслужено двумя радиомаяками; б) вероятность того, что судно обслужит хотя бы один радиомаяк.

24.15. Наблюдатель A из бесконечности движется по направлению к наблюдателю B . Максимальные дальности обнаружения друг друга для этих наблюдателей являются независимыми нормальными случайными величинами, характеризующимися соответственно математическими ожиданиями x_A, x_B и средними отклонениями E_A, E_B . Найти вероятность того, что наблюдатель A обнаружит наблюдателя B первым.

• 24.16. Найти композицию m показательных законов распределения с одинаковым параметром λ .

24.17. Пусть X и Y — независимые случайные величины, принимающие целые неотрицательные значения i и j с вероятностями $P(X=i) = (1-a)a^i$ и $P(Y=j) = (1-b)b^j$, где a и b — положительные числа, меньшие единицы. Найти функцию распределения случайной величины $Z = X + Y$.

• 24.18. Пусть X и Y — независимые случайные величины; X принимает три возможных значения 0, 1, 3 с вероятностями $1/2, 3/8, 1/8$, а Y — два возможных значения 0 и 1 с вероятностями $1/3, 2/3$. Определить ряд распределения случайной величины $Z = X + Y$.

• 24.19. Пусть X, Y — независимые случайные величины, каждая из которых имеет распределение Пуассона:

$$P(X=m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a},$$

$$P(Y=m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}.$$

Найти ряд распределения случайной величины $Z = X + Y$.

• 24.20. Пусть X_j ($j = 1, 2, \dots, n$) — независимые случайные величины, каждая из которых может принимать

только два значения: единицу с вероятностью p и нуль с вероятностью $q=1-p$. Найти ряд распределения случайной величины $Y = \sum_{j=1}^n X_j$.

24.21. Пусть X и Y — независимые дискретные случайные величины, принимающие целые положительные значения k от 1 до ∞ с вероятностью $(1/2)^k$. Найти функцию распределения случайной величины $Z = X + Y$.

§ 25. Линеаризация функций случайных величин

Основные формулы

Любая непрерывная дифференцируемая функция, производная которой не обращается в данной точке в бесконечность, при достаточно малых пределах изменения аргументов может быть приближенно заменена линейной путем разложения ее в ряд Тейлора с удержанием только линейных членов. Если вероятность того, что аргументы функции примут значения, лежащие вне области, в которой функцию можно считать линейной, мала, то функцию случайных аргументов можно разложить в окрестности точек, соответствующей математическим ожиданиям ее аргументов. Приближенное значение математического ожидания и дисперсии при этом определяется:

а) для функции одного случайного аргумента $Y = \varphi(X)$:

$$\bar{y} \approx \varphi(\bar{x}), \quad D[Y] \approx [\varphi'(\bar{x})]^2 D[X];$$

б) для функции $Y = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ нескольких случайных аргументов:

$$\bar{y} \approx \varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n),$$

$$D[Y] \approx \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_i} \right)^2 D[X_i] + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_j} \right) k_{ij},$$

где k_{ij} — корреляционный момент для случайных величин X_i и X_j , а через $\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_i}$ условно обозначены производные, вычисленные для значений аргументов, равных их математическим ожиданиям.

Если случайные аргументы взаимно не коррелированы, то

$$D[Y] \approx \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_i} \right)^2 D[X_i].$$

Для уточнения результатов, полученных методом линеаризации, в разложении функции сохраняют кроме первых двух и некоторые последующие члены. Если удержаны первые три члена разложения функции в ряд, то математическое ожидание и дисперсия функции приближенно определяются по формулам:

а) для функции одного случайного аргумента $Y = \varphi(X)$:

$$\bar{y} \approx \varphi(\bar{x}) + \frac{1}{2} \varphi''(\bar{x}) D[X],$$

$$D[Y] \approx [\varphi'(\bar{x})]^2 D[X] +$$

$$+ \frac{1}{4} [\varphi''(\bar{x})]^2 [\mu_4[X] - D^2[X]] + \varphi'(\bar{x}) \varphi''(\bar{x}) \mu_3[X];$$

б) для функции нескольких случайных аргументов $Y = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ математическое ожидание определяется формулой

$$\bar{y} \approx \varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x_i^2} D[X_i] + \sum_{i < j} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x_i \partial x_j} k_{ij}$$

в общем случае и формулой

$$\bar{y} \approx \varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x_i^2} D[X_i],$$

когда случайные аргументы взаимно не коррелированы. Если случайные аргументы взаимно независимы, то дисперсия определяется формулой

$$D[Y] \approx \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_i} \right)^2 D[X_i] + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x_i^2} \right)^2 [\mu_4[X_i] - D^2[X_i]] +$$

$$+ \sum_{i < j} \left(\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 D[X_i] D[X_j] + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x_i^2} \right) \mu_3[X_i].$$

Решение типовых примеров

Пример 25.1. Математическое ожидание числа бракованных аппаратов при проверке их на безотказность действия определяется формулой

$$T = N \left[1 - \left(1 - \frac{P}{\Omega N} \right)^m \right],$$

где P — вероятность того, что испытание одного из аппаратов будет признано зачетным; Ω — среднее число зачетных испытаний до получения отказа в действии аппарата; N — число аппаратов, участвующих в проверке; m — число испытаний (зачетных и незачетных), приходящихся на один аппарат.

Пользуясь методом линеаризации, определить зависимость математического ожидания и дисперсии случайной величины T от m , если N , P и Ω — независимые случайные величины, математические ожидания и дисперсии которых соответственно равны:

$$\begin{aligned} M[N] &= 5, & M[P] &= 0,8, & M[\Omega] &= 4, \\ D[N] &= 1, & D[P] &= 0,1, & D[\Omega] &= 0,2. \end{aligned}$$

Решение. Применяя общие формулы метода линеаризации, получим

$$M[T] \approx \bar{n} \left[1 - \left(1 - \frac{\bar{p}}{\bar{\omega} \bar{n}} \right)^m \right] = 5(1 - 0,96^m),$$

$$D[T] \approx \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial n} \right)^2 D[N] + \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial p} \right)^2 D[P] + \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \omega} \right)^2 D[\Omega],$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{T}}{\partial n} &= \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{N=\bar{n}, P=\bar{p}, \Omega=\bar{\omega}} = 1 - \left(1 - \frac{\bar{p}}{\bar{\omega} \bar{n}} \right)^m - \\ &\quad - \frac{m \bar{p}}{\bar{\omega} \bar{n}} \left(1 - \frac{\bar{p}}{\bar{\omega} \bar{n}} \right)^{m-1} = 1 - 0,96^m - 0,04m0,96^{m-1}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial p} = \frac{m}{\bar{\omega}} \left(1 - \frac{\bar{p}}{\bar{\omega} \bar{n}} \right)^{m-1} = 0,25m0,96^{m-1},$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \omega} = -0,05m0,96^{m-1},$$

$$\begin{aligned} D[T] \approx & 0,00835m^2 0,96^{2(m-1)} - \\ & - 0,08m(1 - 0,96^m)0,96^{m-1} + (1 - 0,96^m)^2. \end{aligned}$$

Приближенные значения математического ожидания и дисперсии случайной величины T для различных m приведены в таблице 8.

Таблица 8

m	2	10	30	100
$D[T]$	0,025	0,327	0,684	0,854
$M[T]$	0,390	1,675	3,530	4,915

Аналогично решаются задачи 25.1—25.11, 25.14, 25.17, 25.19—25.22.

Пример 25.2. Максимальная высота полета спутника определяется формулой

$$Y = y_0 + (R + y_0) \left[\frac{1+l}{2(1-\lambda)} - 1 \right],$$

где

$$\lambda = \frac{V^2}{2gR} \left(1 + \frac{y_0}{R} \right), \quad l = \sqrt{1 - 4\lambda(1-\lambda) \cos^2 \Theta}.$$

y_0 — высота активного участка траектории, g — ускорение силы тяжести на поверхности Земли, R — радиус Земли.

Функция Y в области практически возможных значений случайных аргументов линеаризуется. Начальная скорость V и угол бросания Θ — нормальные случайные величины, плотность вероятности которых

$$f(v, \theta) = \frac{1}{2\pi\sigma_v\sigma_\theta \sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\left(\frac{v-\bar{v}}{\sigma_v} \right)^2 + \left(\frac{\theta-\bar{\theta}}{\sigma_\theta} \right)^2 - 2r \frac{(v-\bar{v})(\theta-\bar{\theta})}{\sigma_v\sigma_\theta} \right]}.$$

Найти приближенное значение дисперсии для максимальной высоты полета спутника.

Решение. Так как заданная функция по условию линеаризуема в области практически возможных значений случайных аргументов, то

$$D[Y] \approx \left(\frac{\partial Y}{\partial v} \right)^2 D[V] + \left(\frac{\partial Y}{\partial \theta} \right)^2 D[\Theta] + 2 \left(\frac{\partial Y}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) k_{v\theta}.$$

где $k_{v\theta} = r\sigma_v\sigma_\theta$,

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial v} = \frac{\lambda(R+y_0)[2(1-\lambda)(2\lambda-1)\cos^2\bar{\theta} + l(1+l)]}{vl(1-\lambda)^2},$$

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \theta} = \frac{\lambda(R+y_0)\sin 2\bar{\theta}}{l},$$

а λ и l вычислены при $V = \bar{v}$, $\Theta = \bar{\theta}$.

Аналогично решаются задачи 25.13, 25.23.

Пример 25.3. Пусть X , Y — независимые случайные величины, плотности вероятности которых

$$f_x(x) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}} \quad (0 \leq x \leq 1),$$

$$f_y(y) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}} \quad (0 \leq y \leq 1).$$

Пользуясь методом линеаризации, определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = \arctg \frac{X}{Y}$. Полученные результаты уточнить, используя для этого разложение заданной функции в ряд Тейлора с удержанием в нем первых трех членов.

Решение. Используя общие формулы линеаризации, имеем

$$M[Z] \approx \arctg \frac{\bar{x}}{\bar{y}}, \quad D[Z] \approx \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2 D[X] + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2 D[Y],$$

где

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\pi},$$

$$D[X] = D[Y] = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} - \bar{x}^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2},$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial x} \Big|_{x=\bar{x}, y=\bar{y}} = \frac{\bar{y}}{x^2+y^2} = \frac{\pi}{4},$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = -\frac{\bar{x}}{x^2+y^2} = -\frac{\pi}{4}.$$

Таким образом, метод линеаризации дает

$$M[Z] \approx \operatorname{arctg} \frac{\bar{x}}{y} = \frac{\pi}{4},$$

$$D[Z] \approx 2 \frac{\pi^2}{16} \frac{\pi^2 - 8}{2\pi^2} = \frac{\pi^2 - 8}{16}.$$

Учитывая следующий член разложения в ряд Тейлора, получим

$$M[Z] \approx \operatorname{arctg} \frac{\bar{x}}{y} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \bar{Z}}{\partial x^2} \right) D[X] + \left(\frac{\partial^2 \bar{Z}}{\partial y^2} \right) D[Y] \right\},$$

$$D[Z] \approx \left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial x} \right)^2 D[X] + \left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial y} \right)^2 D[Y] +$$

$$+ \frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \bar{Z}}{\partial x^2} \right)^2 (\mu_4[X] - D^2[X]) + \left(\frac{\partial^2 \bar{Z}}{\partial y^2} \right)^2 (\mu_4[Y] - D^2[Y]) \right\} +$$

$$+ \frac{\partial^2 \bar{Z}}{\partial x \partial y} D[X] D[Y] + \frac{\partial \bar{Z}}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{Z}}{\partial x^2} \mu_3[X] + \frac{\partial \bar{Z}}{\partial y} \frac{\partial^2 \bar{Z}}{\partial y^2} \mu_3[Y],$$

где

$$\frac{\partial^2 \bar{Z}}{\partial x^2} = - \frac{2\bar{x}y}{(x^2 + y^2)^2} = - \frac{\pi^2}{8},$$

$$\frac{\partial^2 \bar{Z}}{\partial y^2} = \frac{2\bar{x}y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

$$\frac{\partial^2 \bar{Z}}{\partial x \partial y} = \frac{\bar{x}^2 - \bar{y}^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{Z}}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{Z}}{\partial x^2} = \frac{\pi}{4} \left(- \frac{\pi^2}{8} \right) = - \frac{\pi^3}{32},$$

$$\frac{\partial \bar{Z}}{\partial y} \frac{\partial^2 \bar{Z}}{\partial y^2} = \left(- \frac{\pi}{4} \right) \frac{\pi^2}{8} = - \frac{\pi^3}{32}.$$

$$\mu_3[X] = \mu_3[Y] = m_3 - 3m_1 m_2 + 2m_1^3 =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} - 3\bar{x} \int_0^1 \frac{2}{\pi} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} + 2\bar{x}^3 =$$

$$= \frac{4}{3\pi} - \frac{3}{\pi} + \frac{16}{\pi^3} = \frac{16}{\pi^3} - \frac{5}{3\pi},$$

$$\mu_4[X] = \mu_4[Y] = m_4 - 4m_1 m_3 + 6m_1^2 m_2 - 3m_1^4 =$$

$$= \frac{3}{8} - 4 \frac{2}{\pi} \cdot \frac{4}{3\pi} + 6 \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{1}{2} - 3 \frac{16}{\pi^4} = \frac{4}{3\pi^2} + \frac{3}{8} - \frac{48}{\pi^4}.$$

Поэтому с учетом квадратичных членов ряда Тейлора получим

$$M[Z] \approx \frac{\pi}{4},$$

$$D[Z] \approx \frac{\pi^2 - 8}{16} + \frac{\pi^4}{8 \cdot 128} + \frac{7\pi^2}{48} - \frac{3}{2}.$$

Аналогично решаются задачи 25.12, 25.15, 25.16, 25.18.

Задачи

25.1. Количество тепла Q в калориях, выделяемое в проводнике с сопротивлением R при прохождении тока I в течение времени T , определяется формулой

$$Q = 0,24I^2RT.$$

Ошибки измерения величин I , R , T являются независимыми нормальными случайными величинами с математическими ожиданиями $\bar{i} = 10a$, $\bar{r} = 30$ ом, $\bar{t} = 10$ мин. и средними отклонениями $E_I = 0,1a$, $E_R = 0,2$ ом, $E_T = 0,5$ сек. Найти приближенное значение среднего отклонения случайной величины Q .

25.2. Частота основного тона струны определяется формулой

$$\Omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{P}{ML}},$$

где P — сила натяжения, M — масса струны, L — длина струны.

Известны математические ожидания \bar{p} , \bar{m} , \bar{l} и средние квадратические отклонения σ_p , σ_m и σ_l . Определить рассеивание частоты основного тона струны из-за разброса силы натяжения, массы и длины струны, если соответствующие коэффициенты корреляции равны r_{pl} , r_{pm} , r_{ml} .

25.3. Сопротивление участка электрической цепи определяется формулой

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2},$$

где R — омическое сопротивление, L — индуктивность проводника тока, C — его емкость, Ω — частота тока.

Определить срединную ошибку в величине сопротивления из-за ошибок при независимых измерениях R , L , C и Ω , если заданы \bar{r} , \bar{l} , \bar{c} , $\bar{\omega}$ и срединные отклонения E_R , E_L , E_C , E_ω .

25.4. При параллельном соединении элементов сила тока в цепи определяется формулой

$$I = \frac{E}{R + \frac{W}{n}}$$

где E — электродвижущая сила элемента, W — его внутреннее сопротивление, n — число элементов, R — сопротивление внешней части цепи.

Пользуясь методом линеаризации, определить математическое ожидание и дисперсию силы тока, если случайные величины E , R и W независимы, \bar{e} , \bar{r} , \bar{w} и σ_E , σ_R , σ_W заданы.

25.5. Используя метод линеаризации, найти срединные отклонения E_x и E_y , характеризующие рассеивание координат материальной точки, движущейся в безвоздушном пространстве, если

$$X = VT \cos \Theta, \quad Y = VT \sin \Theta - \frac{gT^2}{2},$$

где V — начальная скорость материальной точки ($\bar{v} = 800$ м/сек, $E_v = 0,1\%$ от \bar{v}), T — время полета ($\bar{t} = 40$ сек., $E_T = 0,1$ сек.), Θ — угол бросания ($\bar{\theta} = 45^\circ$; $E_\theta = 4'$), g — ускорение силы тяжести.

Случайные величины V , T и Θ независимы и нормальны.

25.6. Найти приближенное значение срединной ошибки определения проекции V_1 скорости судна на заданное направление вследствие ошибок измерения его скорости V и курсового угла q , если $V_1 = -V \cos q$, $E_v = 1$ м/сек, $E_q = 1^\circ$, а наивероятнейшие значения V и q соответственно равны 10 м/сек и 60° (случайные величины V и q независимы и нормальны).

25.7. Применим ли в условиях предыдущей задачи метод линеаризации, если ошибка расчетных формул не должна превосходить 0,2 м/сек?

25.8. Найти приближенное значение средних квадратических отклонений прямоугольных координат случайной точки

$$X = H \operatorname{ctg} \varepsilon \cos \beta,$$

$$Y = H \operatorname{ctg} \varepsilon \sin \beta,$$

$$Z = H.$$

если случайные величины H , ε и β независимы, а математические ожидания и средние квадратические отклонения их соответственно равны: $\bar{h} = 6200$ м, $\bar{\varepsilon} = 45^\circ$, $\bar{\beta} = 30^\circ$, $\sigma_H = 25$ м, $\sigma_\beta = \sigma_\varepsilon = 0,001$ рад.

25.9. Переход от сферических координат к декартовым производится по формулам:

$$X = R \sin \Theta \cos \Phi,$$

$$Y = R \sin \Theta \sin \Phi,$$

$$Z = R \cos \Theta.$$

Ошибки в определении Θ , R и Φ независимы со средними квадратическими отклонениями $\sigma_R = 10$ м, $\sigma_\Theta = \sigma_\Phi = 0,001$ рад. Определить приближенное значение средних квадратических ошибок прямоугольных координат, если $\bar{\theta} = \bar{\varphi} = 45^\circ$, $\bar{r} = 10\,000$ м.

25.10. Приближенное выражение для скорости ракеты в момент окончания работы двигателя определяется формулой К. Э. Циолковского

$$V = U \ln \frac{q + \Omega}{q},$$

где U — эффективная скорость истечения газов, q — вес ракеты без топлива, Ω — вес топлива.

Рассеивание веса топлива характеризуется средним отклонением E_Ω . Определить приближенное значение среднего отклонения скорости из-за разброса веса топлива, если математическое ожидание $M[\Omega] = \bar{\omega}$.

25.11. Высота горной вершины H определяется по наклонной дальности D и углу места ε :

$$H = D \sin \varepsilon.$$

Найти приближенное значение средней ошибки определения высоты, если $E_D = 80$ м, $E_\varepsilon = 0,001$, а наивероятнейшие

значения соответственно равны $\bar{d} = 12\,300$ м и $\bar{\varepsilon} = 31^\circ,2$. (Случайные величины D и ε независимы и нормальны.)

25.12. Пусть $Z = \sin XY$, где X и Y — независимые случайные величины. Найти приближенное значение σ_z , если $\bar{x} = \bar{y} = 0$, $\sigma_x = \sigma_y = 0,001$.

25.13. Высота горной вершины определяется по формуле $H = D \sin \varepsilon$. Плотность вероятности ошибок в определении наклонной дальности D и угла места ε задана формулой

$$f(d, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi\sigma_d\sigma_\varepsilon\sqrt{0,91}} e^{-\frac{1}{1,82} \left[\left(\frac{d-\bar{d}}{\sigma_d} \right)^2 + \left(\frac{\varepsilon-\bar{\varepsilon}}{\sigma_\varepsilon} \right)^2 + 0,6 \frac{(d-\bar{d})(\varepsilon-\bar{\varepsilon})}{\sigma_d\sigma_\varepsilon} \right]}$$

где $\sigma_d = 40$ м, $\sigma_\varepsilon = 0,001$ рад, $\bar{d} = 10\,000$ м, $\bar{\varepsilon} = 30^\circ$. Найти приближенное значение среднего отклонения ошибок определения высоты.

25.14. Дальность D_1 (рис. 29) определяется радиолокационной станцией, ошибки измерения которой характеризуются средним отклонением $E_p = 20$ м. Дальность D_2 может быть определена либо дальномером, среднее отклонение ошибок которого $E_D = 40$ м, либо рассчитана по формуле

$$D_2 = \sqrt{D_1^2 + d^2}.$$

Определить, какой способ определения дальности K_2C является более точным, если ошибки в определении расстояния между K_1 и K_2 характеризуются средним отклонением $E_d = 50$ м.

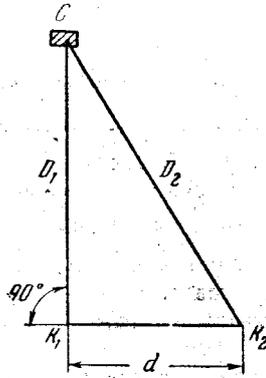


Рис. 29.

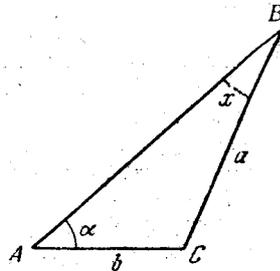
25.15. Учитывая три первых члена разложения функции $Y = \varphi(X)$ в ряд Тейлора, определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины Y , если X подчиняется нормальному закону распределения.

25.16. Площадь треугольника определяется формулой

$$S = \frac{ab}{2} \sin \gamma.$$

Учитывая члены разложения в ряд Тейлора функции $S = \varphi(\gamma)$ до γ^3 включительно, определить математическое ожидание площади треугольника и дисперсию его площади из-за рассеивания угла, если случайная величина γ распределена нормально, причем $\bar{\gamma}$ и $D[\gamma]$ заданы.

25.17. В треугольнике ABC (рис. 30) сторона a и противолежащий угол α — случайные величины, которые можно считать некоррелированными и нормальными. Определить приближенное значение математического ожидания угла X и его среднего отклонения, если база b известна, а математические ожидания и средние отклонения случайных величин a и α заданы.



25.18. Случайная величина X подчиняется закону нормального распределения

$$f_x(x) = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+5)^2}{200}}$$

Рис. 30.

Определить приближенное значение математического ожидания и дисперсии случайной величины $Y = \frac{1}{X}$, учитывая первые два и три члена разложения в ряд Тейлора.

25.19. Радиус шара можно считать нормальной случайной величиной с математическим ожиданием \bar{r} и дисперсией σ_r^2 ($\bar{r} \gg \sigma_r$). Определить математическое ожидание и дисперсию объема шара по точным формулам. Сравнить полученные результаты с результатами, получаемыми методом линеаризации.

25.20. Для определения объема конуса измерены: а) диаметр основания и высота; б) диаметр основания и длина образующей. В каком из этих двух случаев дисперсия ошибки определения объема конуса меньше, если математическое ожидание высоты конуса $\bar{h} = 8$ дм, диаметра основания $\bar{d} = 12$ дм, длины образующей $\bar{l} = 10$ дм, а $\sigma_h = \sigma_d = \sigma_l = 0,1$ дм?

25.21. При взвешивании вместо гирь использована дробь. Диаметр которой в среднем равен 2 мм. Какова средняя

ошибка взвешивания, если срединное отклонение диаметра дроби 0,04 мм, удельный вес металла, из которого изготовлена дробь, равен 11,2 г/см³? При взвешивании использовано 50 дробинок.

25.22. Ускорение силы тяжести g вычисляется по формуле $g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$, где L — длина физического маятника, а T — его период. Определить срединную ошибку в g , если измерение длины маятника, произведенное со срединной ошибкой $E_L = 5$ мм, дало $L = 5$ м, а измеренный период колебаний маятника оказался равным 4,5 сек. Период колебаний маятника найден по длительности времени $n = 10$ полных размахов, которое измеряется со срединной ошибкой $E_t = 0,1$ сек., а срединная ошибка определения момента прохождения маятника через положение равновесия $E_t = 0,5\% T$.

25.23. Используя метод линеаризации, определить приближенное значение дисперсии случайной величины $Z = \sqrt{kX^2 + Y^2}$, если $X = \sin V$, $Y = \cos V$, случайная величина V равномерно распределена в интервале $(0, \frac{\pi}{2})$, а k — известная постоянная.

§ 26. Композиция двумерных и трехмерных нормальных законов распределения с использованием понятия векториальных отклонений

Основные формулы

Всякий двумерный (трехмерный) нормальный закон распределения может рассматриваться как композиция двух (трех) вырожденных нормальных законов распределения, характеризующих законы распределения независимых косоугольных координат случайной точки на плоскости (в пространстве), если за оси координат выбраны сопряженные направления единичного эллипса (эллипсоида) распределения¹⁾.

¹⁾ Если в качестве сопряженных направлений выбраны главные диаметры эллипса (эллипсоида), то вырожденные законы распределения характеризуют законы распределения независимых прямоугольных координат случайной точки.

Вырожденный нормальный закон распределения однозначно характеризуется вектором, проведенным из центра распределения этого закона по направлению одного из сопряженных диаметров единичного эллипса и равным величине этого полу диаметра. Определенный таким образом вектор называется векториальным отклонением.

Композиция нормальных законов распределения на плоскости (в пространстве) эквивалентна композиции векториальных отклонений. Композиция нормальных законов распределения, лежащих в одной плоскости и заданных векториальными отклонениями \overleftrightarrow{a}_i ($i = 1, 2, \dots, k$), осуществляется по следующим правилам:

1) координаты \bar{x} , \bar{y} центра суммарного закона распределения определяются по формулам:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^k \bar{x}_i, \quad \bar{y} = \sum_{i=1}^k \bar{y}_i,$$

где \bar{x}_i , \bar{y}_i — координаты начала векториального отклонения \overleftrightarrow{a}_i ;

2) элементы k_{ij} корреляционной матрицы суммарного закона распределения определяются формулами:

$$k_{11} = \frac{1}{2\rho^2} \sum_{i=1}^k a_{ix}^2 = \frac{A}{2\rho^2}, \quad k_{22} = \frac{1}{2\rho^2} \sum_{i=1}^k a_{iy}^2 = \frac{C}{2\rho^2},$$

$$k_{12} = \frac{1}{2\rho^2} \sum_{i=1}^k a_{ix} a_{iy} = \frac{B}{2\rho^2},$$

где a_{ix} и a_{iy} — проекции векториального отклонения \overleftrightarrow{a}_i на оси произвольно выбранной единой прямоугольной системы координат;

3) главные направления (ξ , η) суммарного закона распределения, соответствующие им дисперсии (σ_ξ^2 , σ_η^2) и угол α , составленный осью $O\xi$ с осью Ox , определяются

формулами:

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi}^2 &= k_{11} \cos^2 \alpha + k_{12} \sin 2\alpha + k_{22} \sin^2 \alpha = \\ &= \frac{1}{4\rho^2} [A + C + \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2}] = \\ &= \frac{1}{4\rho^2} [A + C + (A - C) \sec 2\alpha],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\eta}^2 &= k_{11} \sin^2 \alpha + k_{12} \sin 2\alpha + k_{22} \cos^2 \alpha = \\ &= \frac{1}{4\rho^2} [A + C - \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2}] = \\ &= \frac{1}{4\rho^2} [A + C - (A - C) \sec 2\alpha],\end{aligned}$$

где α — любой из корней уравнения

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A - C}.$$

Главные полуоси единичного эллипса равны

$$a = \sigma_{\xi 0} \sqrt{2}, \quad b = \sigma_{\eta 0} \sqrt{2}.$$

Если a и b — главные полуоси единичного эллипса, m и n — сопряженные полуоси того же эллипса, α и

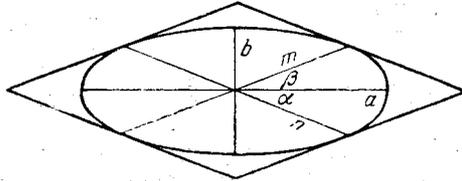


Рис. 31.

β — углы, образуемые полуосями m и n с полуосью a , $\beta + \alpha$ — угол между сопряженными полуосями, то согласно теореме Аполлония (рис. 31)

$$\begin{aligned}m^2 + n^2 &= a^2 + b^2, \\ mn \sin(\alpha + \beta) &= ab,\end{aligned}$$

где

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{b^2}{a^2},$$

$$n^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 \alpha}.$$

Композиция векториальных отклонений в пространстве осуществляется по аналогичным правилам. Необходимые вычисления удобно вести, пользуясь следующей схемой расчета (табл. 9):

Таблица 9

№ п/п (i)	a_i	a_{ix}	a_{iy}	a_{iz}	a_{ix}^2	a_{iy}^2	a_{iz}^2	$a_{iz}a_{iy}$	$a_{ix}a_{iz}$	$a_{iy}a_{ix}$	$x_i = a_{ix} + a_{iy} + a_{iz}$	x_i^2
1												
2												
⋮												
⋮												
k												
Σ					A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3		$A_1 + A_2 + A_3 + 2 \times (B_1 + B_2 + B_3)$

Элементы корреляционной матрицы $\|k_{ij}\|$ суммарного закона распределения определяются формулами:

$$k_{11} = \sigma_x^2 = \frac{A_1}{2\rho^2}, \quad k_{22} = \sigma_y^2 = \frac{A_2}{2\rho^2}, \quad k_{33} = \sigma_z^2 = \frac{A_3}{2\rho^2},$$

$$k_{23} = \frac{B_1}{2\rho^2}, \quad k_{31} = \frac{B_2}{2\rho^2}, \quad k_{12} = \frac{B_3}{2\rho^2}.$$

Последние два столбца таблицы 9 служат для контроля правильности вычислений: должно выполняться равенство

$$\sum_{i=1}^k x_i^2 = A_1 + A_2 + A_3 + 2(B_1 + B_2 + B_3).$$

Дисперсии ξ, η, ζ по главным направлениям суммарного эллипсоида распределения (рис. 2) формулами:

$$\sigma_\xi^2 = \frac{a^2}{2\rho^2}, \quad \sigma_\eta^2 = \frac{b^2}{2\rho^2}, \quad \sigma_\zeta^2 = \frac{c^2}{2\rho^2},$$

где a, b, c — главные полуоси единичного эллипсоида суммарного закона распределения — связаны с корнями

(u_1, u_2, u_3) уравнения $u^3 + pu + q = 0$ соотношениями:

$$a^2 = u_1 + \frac{l}{3},$$

$$b^2 = u_2 + \frac{l}{3},$$

$$c^2 = u_3 + \frac{l}{3},$$

$$p = -\frac{1}{3}l^2 + m, \quad q = -\frac{2}{27}l^3 + \frac{1}{3}lm + n,$$

$$l = A_1 + A_2 + A_3,$$

$$m = A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_1 - B_1^2 - B_2^2 - B_3^2,$$

$$n = A_1B_1^2 + A_2B_2^2 + A_3B_3^2 - A_1A_2A_3 - 2B_1B_2B_3.$$

Корни кубического уравнения могут быть найдены или по специальным таблицам, или по формулам:

$$u_1 = 2\sqrt{-\frac{1}{3}p} \cos \frac{\varphi}{3}, \quad u_2 = 2\sqrt{-\frac{1}{3}p} \cos \frac{\varphi - 2\pi}{3},$$

$$u_3 = 2\sqrt{-\frac{1}{3}p} \cos \frac{\varphi + 2\pi}{3},$$

где

$$\cos \varphi = \frac{-9q}{2\sqrt{-3p^3}}.$$

Направляющие косинусы осей ξ, η, ζ в координатной системе $Oxuz$ определяются как решения трех систем уравнений ($i = 1, 2, 3$):

$$\left. \begin{aligned} (A_1 - \lambda_i) \alpha_{i1} + B_3 \alpha_{i2} + B_2 \alpha_{i3} &= 0, \\ B_3 \alpha_{i1} + (A_2 - \lambda_i) \alpha_{i2} + B_1 \alpha_{i3} &= 0, \\ \alpha_{i1}^2 + \alpha_{i2}^2 + \alpha_{i3}^2 &= 1, \end{aligned} \right\}$$

где

$$\lambda_1 = a^2, \quad \lambda_2 = b^2, \quad \lambda_3 = c^2,$$

а α_{ij} обозначает косинус угла между i -й осью координатной системы $O\xi\eta\zeta$ и j -й осью системы $Oxuz$.

Решение типовых примеров

Пример 26.1. Положение точки A определяется с наблюдательного пункта O по дальности $OA = D$ и угловому отклонению от ориентира B .

Срединная ошибка в определении дальности составляет $100k\%$ от дальности; срединная ошибка в определении углового отклонения составляет ε радиан. Ошибка нанесения точки A на карту подчинена нормальному круговому закону со срединным отклонением r ; ошибка определения положения точки O также подчинена нормальному круговому закону со срединным отклонением R . Определить суммарный закон распределения, характеризующий ошибку положения точки A , нанесенной на карту. Как изменится вероятность попадания точки A в квадрат $100 \times 100 \text{ м}^2$ при уменьшении D с 20 до 10 км ($r = 20 \text{ м}$, $R = 40 \text{ м}$, $\varepsilon = 0,003$, $k = 0,005$)?

Решение. По направлению оси OA действуют независимые векториальные отклонения kD , r и R , а в перпендикулярном направлении — независимые векториальные отклонения εD , r и R ¹⁾. Закон распределения ошибок положения точки A , нанесенной на карту, определяется единичным эллипсом с полуосями

$$\sqrt{k^2 D^2 + r^2 + R^2} \quad \text{и} \quad \sqrt{\varepsilon^2 D^2 + r^2 + R^2},$$

поэтому

$$P = \hat{\Phi}\left(\frac{50}{\sqrt{k^2 D^2 + r^2 + R^2}}\right) \hat{\Phi}\left(\frac{50}{\sqrt{\varepsilon^2 D^2 + r^2 + R^2}}\right).$$

При дальности $OA = 20\,000 \text{ м}$

$$P_1 = \hat{\Phi}\left(\frac{50}{109,5}\right) \hat{\Phi}\left(\frac{50}{74,8}\right) = 0,083.$$

При уменьшении дальности до $10\,000 \text{ м}$

$$P_2 = \hat{\Phi}\left(\frac{50}{67,1}\right) \hat{\Phi}\left(\frac{50}{53,8}\right) = 0,181.$$

Пример 26.2. Положение точки K на плоскости определяется путем измерения дальности до нее из точек M и N . Координаты точки подчиняются нормальному закону распределения, заданному главными полуосями $a = 60 \text{ м}$ и $b = 40 \text{ м}$ и углом $\alpha_1 = 47^\circ 52'$ между полуосью a и направлением NK .

¹⁾ Вследствие малости угла ε отклонение по дуге εD можно заменить отклонением по касательной на величину εD и считать это отклонение перпендикулярным радиусу D .

Составляем систему уравнений

$$\begin{aligned} -1167\alpha_{11} + 138\alpha_{12} + 1512\alpha_{13} &= 0, \\ 138\alpha_{11} - 2032\alpha_{12} + 270\alpha_{13} &= 0, \\ \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2 &= 1. \end{aligned}$$

Из первых двух уравнений находим

$$\alpha_{12} = 0,1684\alpha_{11}, \quad \alpha_{13} = 0,7563\alpha_{11};$$

из третьего уравнения

$$\alpha_{11} = \pm 0,7905.$$

Таким образом,

$$\cos(a, x) = \alpha_{11} = \pm 0,7905; \quad \cos(a, y) = \alpha_{12} = \pm 0,1331;$$

$$\cos(a, z) = \alpha_{13} = \pm 0,5978.$$

Аналогично решается задача 26.9.

Задачи

26.1. Найти композицию двух векториальных отклонений $\overleftrightarrow{c_1}$ и $\overleftrightarrow{c_2}$, если угол между ними $\gamma = 30^\circ$, $c_1 = 30$ м, $c_2 = 40$ м, а центры распределения совпадают.

26.2. Решить предыдущую задачу при $\gamma = 0$ и при $\gamma = 90^\circ$.

26.3. Найти суммарный закон распределения, являющийся композицией векториальных отклонений $\overleftrightarrow{a_i}$, лежащих в одной плоскости, если их величины a_i и углы α_i между $\overleftrightarrow{a_i}$ и положительным направлением оси абсцисс даны в таблице 12.

Таблица 12

i	a_i , м	α_i	i	a_i , м	α_i
1	0,9	30°37'	5	0,4	158°48'
2	0,5	59°36'	6	0,5	189° 3'
3	0,7	92°12'	7	0,2	273°18'
4	0,8	127°17'	8	0,3	316°54'

26.4. Найти единичный эллипс суммарного закона рассеивания точек на плоскости, получающегося при сложении следующих векториальных отклонений, лежащих в этой плоскости (табл. 13).

Таблица 13

i	$a_i, м$	$\alpha_i, град$	i	$a_i, м$	$\alpha_i, град$
1	10	297	5	40	117
2	30	117	6	60	27
3	30	117	7	70	297
4	40	297	8	80	207

26.5. Найти композицию векториального отклонения Δ ($\Delta = 18 м$), образующего с направлением Ox угол $\beta = 75^\circ$, и нормального закона распределения, заданного единичным эллипсом, одна из главных полуосей которого совпадает с направлением Ox и равна $a = 30 м$, а другая главная полуось $b = 20 м$.

26.6. Найти композицию двух нормальных законов распределения на плоскости:

а) при главных полуосях единичных эллипсов $a_1 = b_1 = 50 м$, $a_2 = b_2 = 25 м$;

б) при главных полуосях единичных эллипсов $a_1 = 50 м$, $b_1 = 25 м$, $a_2 = 50 м$, $b_2 = 25 м$, если угол между полуосями a_1 и a_2 равен 30° .

26.7. Координаты случайной точки на плоскости подчинены нормальному закону распределения, заданному единичным эллипсом с главными полудиаметрами $a = 24 м$, $b = 7 м$. Определить вероятность попадания в ромб со стороной $2l = 60 м$ и острым углом $\gamma = 34^\circ,3$. Центр ромба совпадает с центром распределения, а смежные стороны ромба параллельны сопряженным полудиаметрам.

26.8. Определить два векториальных отклонения, эквивалентных нормальному закону распределения на плоскости, характеризуемому единичным эллипсом с главными полуосями $80 м$ и $60 м$, если одно из векториальных отклонений образует с большей полуосью угол 30° .

26.9. Координаты судна определяются путем измерения радиолокационной станцией дальности до берегового ориентира и направления на ориентир. Ошибки измерения радиолокационной станции заданы единичным эллипсом с главными полуосями $E_x = 80 м$ в направлении оси Ox и $E_z = 30 м$ в направлении оси Oz . Единичный эллипс ошибок определения координат ориентира вследствие неточного знания его

места имеет главные полуоси $E_1 = 100$ м, $E_2 = 40$ м, причем E_1 образует с осью Ox угол 20° .

Определить: а) плотность вероятности для суммарных ошибок определения места судна в координатной системе xOz ; б) главные полу диаметры и ориентировку относительно оси Ox единичного эллипса суммарных ошибок определения координат судна.

Таблица 14

Δ_i , м	$\Delta_1 = 400$	$\Delta_2 = 800$	$\Delta_3 = 200$
θ_i°	$\theta_1 = 65$	$\theta_2 = 35$	$\theta_3 = 335$

26.10. Ошибки определения места судна в море вызваны тремя векторными ошибками, величины которых и направления относительно меридиана приведены в таблице 14.

Найти единичный эллипс ошибок определения места судна в море.

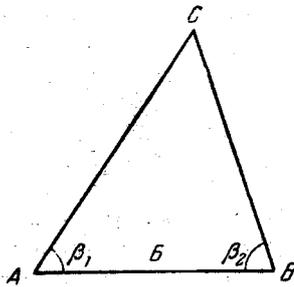


Рис. 32.

26.11. Найти закон распределения координат точки C , определенных путем ее визирования с двух пунктов A и B , если дана база B , углы β_1 и β_2 , а также средние угловые ошибки визирования с обоих постов $E_{\beta_1} = E_{\beta_2} =$

$= E_{\beta}$. Положение точек A и B известно без ошибок (рис. 32).

26.12. В условиях предыдущей задачи рассчитать главные полуоси единичного эллипса и их ориентировку относительно направления AB при $B = 15$ км, $\beta_1 = 60^\circ$, $\beta_2 = 75^\circ$, $E_{\beta_1} = E_{\beta_2} = 0,0005$.

26.13. В условиях задач 26.11 и 26.12 определить суммарный закон распределения ошибок координат точки C относительно пункта A , если кроме ошибок визирования E_{β_1} и E_{β_2} задан закон распределения ошибок в определении положения точки B относительно точки A с главными полуосями вдоль базы $E_1 = 30$ м и перпендикулярно базе $E_2 = 15$ м.

26.14. Для определения истинного курса судна и его скорости дважды определяют по береговым ориентирам место

судна (в точках A_1 и A_2) через промежуток времени $\tau = 20$ сек. Закон распределения ошибок определения места судна — круговой, с радиусом единичного круга $r = 30$ м. Найти срединную ошибку определения величины скорости судна и его курса, если расстояние A_1A_2 оказалось равным $D = 1000$ м.

26.15. Координаты судна в момент $t = 0$ известны с ошибкой, подчиненной нормальному круговому закону распределения, радиус единичного круга которого равен 100 м. Срединная ошибка определения величины скорости судна равна 2 м/сек, что составляет 10% от его скорости, а срединная ошибка определения курса судна составляет 0,08 рад. Рассчитать единичный эллипс ошибок положения судна для момента времени $t = 1$ мин.

26.16. Положение метеорологического шара-баллона в момент наблюдения известно с ошибкой, подчиненной нормальному шаровому закону распределения, радиус единичного шара которого равен 50 м; скорость шара-баллона известна со срединной ошибкой 2 м/сек. Ошибки определения вектора скорости шара-баллона в плоскости, перпендикулярной его курсу, заданы нормальным круговым законом распределения при радиусе единичного круга 3 м/сек. Рассчитать единичный эллипсоид ошибок положения шара-баллона спустя 20 сек. после момента определения его координат и вектора скорости.

26.17. Найти плотность вероятности для суммы двух случайных нормальных векторов в пространстве $Oxyz$ и случайного вектора в плоскости Oxz , для которых первые моменты соответственно равны:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= 20, & \bar{y}_1 &= -10, & \bar{z}_1 &= -15, \\ \bar{x}_2 &= 10, & \bar{y}_2 &= 25, & \bar{z}_2 &= -40, \\ \bar{x}_3 &= 15, & & & \bar{z}_3 &= -20, \end{aligned}$$

а корреляционные матрицы проекций векторов на координатные оси

$$\|k_{ij}^{(1)}\| = \begin{vmatrix} 12 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 14 \end{vmatrix}, \quad \|k_{ij}^{(2)}\| = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & -1 \\ 1 & -1 & 17 \end{vmatrix},$$

$$\|k_{ij}^{(3)}\| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

Случайные векторы взаимно независимы.

26.18. Найти композицию векториального отклонения \vec{x} , параллельного оси Ox , $\bar{x} = 25$, $E_x = 40$; нормального закона распределения на плоскости xOy с единичным эллипсом

$$\frac{(x+5)^2}{400} + \frac{(y+10)^2}{900} = 1$$

и нормального закона распределения в пространстве с единичным эллипсоидом

$$\frac{(x-10)^2}{100} + \frac{(y-10)^2}{225} + \frac{z^2}{64} = 1,$$

если x, y, z — прямоугольные координаты точки в пространстве.

26.19. Составить корреляционную матрицу системы трех случайных величин (координаты точки в пространстве), соот-

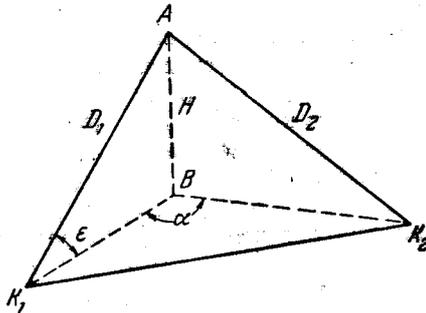


Рис. 33.

ветствующую композиции следующих векториальных отклонений (табл. 15):

Таблица 15

i	a_i	$\cos(\vec{a}_i, x)$	$\cos(\vec{a}_i, y)$	$\cos(\vec{a}_i, z)$
1	40	0,6	-0,8	0
2	60	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
3	80	-0,5	0,5	$0,5\sqrt{2}$

26.20. В условиях предыдущей задачи определить главные полуоси единичного суммарного эллипсоида и направляющие косинусы углов между наибольшей из главных полуосей \vec{a} и координатными осями.

26.21. Положение точки K_2 относительно точки K_1 определяется по измеренным из точки A дальностям D_1 и D_2 и углу в горизонтальной плоскости $\angle K_1BK_2 = \alpha$ (рис. 33). Найти корреляционную матрицу ошибок в определении положения точки K_2 относительно K_1 , если известно, что срединные ошибки в определении дальности равны E_D , а в определении угла равны E_α . Ошибки измерения взаимно независимы и подчинены нормальному закону распределения. Высота H точки A над горизонтальной плоскостью K_1BK_2 известна без ошибок.

26.22. Решить задачу 26.21 при условиях, что вместо высоты H задано (без ошибки) значение угла $\varepsilon = \angle AK_1B$.

ГЛАВА V
ЭНТРОПИЯ И ИНФОРМАЦИЯ

§ 27. Энтропия случайных событий и величин

Основные формулы

Пусть A_1, A_2, \dots, A_n — полная группа несовместных событий.

Тогда энтропия этой группы событий определяется формулой¹⁾

$$H = - \sum_{j=1}^n P(A_j) \log_a P(A_j)$$

и представляет собой среднее количество информации, которое дается знанием того, какое именно из событий A_1, A_2, \dots, A_n осуществилось при проведении испытания. Таким образом, энтропия является мерой неопределенности ситуации при проведении испытаний с полной группой несовместных событий A_1, A_2, \dots, A_n .

По такой же формуле определяется энтропия $H[X]$ дискретной случайной величины X , принимающей значения x_1, x_2, \dots, x_n с вероятностями p_1, p_2, \dots, p_n :

$$H[X] = - \sum_{j=1}^n p_j \log_a p_j.$$

Те же формулы имеют место и когда $n = \infty$.

¹⁾ $P(A_j)$ — вероятность события A_j ; $P(A_j) \log_a P(A_j) = 0$, когда $P(A_j) = 0$.

Мерой неопределенности случайной величины X , принимающей непрерывный ряд значений и заданной плотностью вероятности $f(x)$, является дифференциальная энтропия $H[X]$, определяемая формулой

$$H[X] = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log_a f(x) dx,$$

причем $f(x) \log_a f(x) \equiv 0$ для тех значений x , где $f(x) = 0$.

Условная энтропия случайной величины X относительно случайной величины Y для дискретных X и Y

$$H[X|y_i] = - \sum_{i=1}^n P(X = x_i | Y = y_j) \log_a P(X = x_i | Y = y_j);$$

для непрерывных X и Y условная дифференциальная энтропия

$$H[X|y] = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x|y) \log_a f(x|y) dx.$$

Средней условной энтропией $H_y[X]$ называется математическое ожидание условной энтропии. Для дискретных случайных величин

$$\begin{aligned} H_y[X] &= M[H[X|y]] = \\ &= - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P(Y = y_j) P(X = x_i | Y = y_j) \times \\ &\quad \times \log_a P(X = x_i | Y = y_j), \end{aligned}$$

для непрерывных случайных величин

$$\begin{aligned} H_y[X] &= M[H[X|y]] = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_y(y) f(x|y) \log_a f(x|y) dx dy. \end{aligned}$$

Аналогичные формулы имеют место для систем случайных величин. Так, например,

$$\begin{aligned} H[X_1, X_2, \dots, X_n] &= - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \times \\ &\quad \times \log_a f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \end{aligned}$$

— энтропия системы n случайных величин,

$$H_z[X, Y] = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_z(z) f(x, y|z) \log_a f(x, y|z) dx dy dz$$

— средняя условная энтропия подсистемы случайных величин (X, Y) относительно Z ;

$$H_{x, y}[Z] = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) f(z|x, y) \log_a f(z|x, y) dx dy dz$$

— средняя условная энтропия случайной величины Z относительно случайных величин X, Y . Справедливы неравенства

$$H[X, Y] = H[X] + H_x[Y] \leq H[X] + H[Y]$$

и

$$H[X_1, X_2, \dots, X_n] \leq \sum_{k=1}^n H[X_k].$$

причем знак равенства соответствует независимости случайных величин.

При $a=2$ единицей измерения энтропии является энтропия полной группы двух несовместных равновероятных событий. При $a \neq 2$ значение энтропии, вычисленное для $a=2$, нужно умножить на $\log_a 2$. Единица измерения энтропии называется двоичной при $a=2$, десятичной при $a=10$ и т. д.

Решение типовых примеров

Пример 27.1. Производится стрельба по двум мишеням: по первой мишени сделано два выстрела, по второй — три. Вероятности попадания при одном выстреле соответственно равны $1/2$ и $1/3$. Исход стрельбы по какой мишени является более определенным?

Решение. Исход стрельбы определяется числом попаданий в мишень, которое подчинено биномиальному закону распределения $P(X=m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$.

Составляем ряд распределения для первой мишени при $n=2$ и $p=1/2$ (табл. 16):

Таблица 16

m	0	1	2
$P(X=m)$	1/4	1/2	1/4

Таблица 17

m	0	1	2	3
$P(X=m)$	1/27	2/9	4/9	8/27

для второй мишени при $n=3$, $p=1/3$ (табл. 17).

Мерой неопределенности исхода стрельбы служит энтропия числа попаданий. При стрельбе по первой мишени

$$H_1 = -\frac{1}{4} \lg \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \lg \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \lg \frac{1}{4} = 0,452 \text{ дес. ед.};$$

по второй мишени

$$H_2 = -\frac{1}{27} \lg \frac{1}{27} - \frac{2}{9} \lg \frac{2}{9} - \frac{4}{9} \lg \frac{4}{9} - \frac{8}{27} \lg \frac{8}{27} = 0,511 \text{ дес. ед.}$$

Исход стрельбы по первой мишени обладает большей определенностью.

Аналогично решаются задачи 27.1 — 27.11.

Пример 27.2 Среди всех законов распределения непрерывной случайной величины X , для которых задана одна и та же дисперсия D , найти закон распределения с максимальной дифференциальной энтропией.

Решение. Согласно теореме вариационного исчисления для нахождения функции $y = y(x)$, дающей экстремум интеграла

$$I = \int_a^b \Phi(x, y) dx$$

при дополнительных условиях

$$\int_a^b \psi_s(x, y) dx = c_s \quad (s = 1, 2, \dots, m),$$

необходимо решить (не дифференциальное) уравнение Эйлера

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = 0,$$

где $\Phi_1 = \Phi + \sum_{s=1}^m \lambda_s \psi_s$, а постоянные λ_s определяются с помощью заданных дополнительных условий. В нашем примере ищется максимум интеграла

$$- \int_{-\infty}^{\infty} f \ln f dx$$

при дополнительных условиях

$$\int_{-\infty}^{\infty} f dx = 1$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 f dx = D.$$

Отсюда

$$\Phi_1(x, f) = -f \ln f + \lambda_1 f + \lambda_2 (x - \bar{x})^2 f.$$

Следовательно, уравнение для определения $f(x)$ имеет вид

$$-\ln f - 1 + \lambda_1 + \lambda_2 (x - \bar{x})^2 = 0,$$

откуда

$$f(x) = ce^{-\lambda_2(x-\bar{x})^2},$$

где

$$c = e^{-\lambda_1 + 1}.$$

Из дополнительных условий находим

$$c = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2D}.$$

Найденное решение соответствует максимуму энтропии.

Таким образом, при заданной дисперсии D наибольшей энтропией обладает нормальный закон распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} e^{-\frac{1}{2D}(x-\bar{x})^2}.$$

Аналогично решаются задачи 27.12 — 27.15.

Пример 27.3. Доказать, что максимум энтропии дискретной случайной величины, равный $\log_a n$ (n — число значений, принимаемых случайной величиной), достигается при

$$p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}.$$

Для доказательства воспользуемся неравенством $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$ ($x > 0$) (знак $=$ имеет место только при $x = 1$). Применяя это неравенство, получим

$$\begin{aligned} -H + \log_a n &= \sum_{k=1}^n p_k \log_a (np_k) \geq \\ &\geq \frac{1}{\ln a} \sum_{k=1}^n p_k \left(1 - \frac{1}{np_k}\right) = \frac{\sum_{k=1}^n p_k - 1}{\ln a} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$H = - \sum_{k=1}^n p_k \log_a p_k \leq \log_a n.$$

Случаю $np_k = 1$ соответствует максимум энтропии, равный $\log_a n$.

Аналогично решается задача 27.16.

Задачи

27.1. В двух урнах имеется по 15 шаров, причем в первой урне 5 красных, 7 белых и 3 черных, а во второй — соответственно 4, 4 и 7. Из каждой урны вынимается по одному шару. Определить, для какой из урн исход опыта является более определенным.

27.2. Вероятность появления события при одном испытании равна p , вероятность неоявления события $q = 1 - p$. При каком p результат испытания обладает наибольшей неопределенностью?

27.3. Исход какого из двух опытов обладает большей неопределенностью: 1) внутри правильного треугольника наугад ставится точка, которая может оказаться внутри или вне вписанного в него круга; 2) внутри круга наугад ста-

вится точка, которая может оказаться внутри или вне вписанного в него правильного треугольника?

27.4. В правильный n -угольник путем соединения середин его соседних сторон вписан другой правильный n -угольник. Точка, поставленная внутри данного многоугольника, может оказаться внутри или вне вписанного многоугольника.

Определить: а) энтропию опыта; б) значение n , при котором энтропия максимальна.

27.5. Вероятность появления события A при одном испытании равна p . Испытания повторяются до первого появления события A . Найти энтропию числа испытаний и выяснить характер изменения энтропии с изменением p .

27.6. Определить энтропию случайной величины, подчиненной биномиальному закону распределения: а) в общем случае; б) при $n = 2$, $p = q = 0,5$.

27.7. Определить энтропию непрерывной случайной величины, подчиняющейся: а) закону равномерного распределения вероятности в интервале (c, d) ; б) нормальному закону распределения с дисперсией σ_x^2 ; в) экспоненциальному закону распределения

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-cx} & \text{при } x \geq 0 \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (c > 0).$$

27.8. Найти энтропию случайной величины X , функция распределения которой

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ x^2 & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

27.9. Определить условную дифференциальную энтропию $H[X|y]$ и среднюю условную дифференциальную энтропию $H_y[X]$ случайной величины X относительно Y , а также $H[Y|x]$ и $H_x[Y]$ случайной величины Y относительно X для системы (X, Y) нормальных случайных величин.

27.10. Найти энтропию системы n случайных величин, подчиняющихся нормальному закону распределения.

27.11. По заданным энтропиям $H[X]$ и $H[Y]$ случайных величин X и Y и средней условной энтропии $H_y[X]$ слу-

чайной величины X относительно Y определить среднюю условную энтропию $H_x[Y]$ случайной величины Y относительно X .

27.12. Среди всех законов распределения непрерывной случайной величины X , для которых плотность вероятности равна нулю вне интервала $a < x < b$, определить закон распределения с максимальной дифференциальной энтропией.

27.13. Среди всех законов распределения непрерывной случайной величины X , для которых плотность вероятности равна нулю при $x < 0$, найти при заданном математическом ожидании $M[X]$ закон распределения с максимальной дифференциальной энтропией.

27.14. Найти плотность вероятности, при которой дифференциальная энтропия случайной величины максимальна, если задан ее второй начальный момент m_2 .

27.15. Среди множества законов распределения непрерывных систем случайных величин с заданной корреляционной матрицей найти закон распределения, при котором энтропия системы максимальна.

27.16. Сообщение кодируется с помощью двух групп символов, причем в первой группе имеется k символов, встречающихся с вероятностями $p_{11}, p_{12}, \dots, p_{1k}$ $\left(\sum_{i=1}^k p_{1i} = \alpha\right)$, а во второй группе n символов, встречающихся с вероятностями $p_{21}, p_{22}, \dots, p_{2n}$ $\left(\sum_{j=1}^n p_{2j} = 1 - \alpha\right)$. Определить при фиксированном значении α вероятности p_{1i} и p_{2j} , соответствующие максимуму энтропии.

27.17. Опыт A состоит в случайном выборе целого числа от 1 до 1050, а опыт B — в сообщении величин остатков от деления этого числа на 5 и на 7. Определить энтропию опыта A и среднюю условную энтропию опыта A относительно опыта B .

27.18. Между двумя системами случайных величин (X_1, X_2, \dots, X_n) и (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) установлено взаимно однозначное соответствие $Y_k = \varphi_k(X_1, X_2, \dots, X_n)$, $X_k = \psi_k(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Найти энтропию $H[Y_1, Y_2, \dots, Y_n]$, если задана плотность вероятности $f_x(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

27.19. Две системы (X_1, X_2, \dots, X_n) и (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) случайных величин связаны линейными соотношениями

$$Y_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} X_j \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Определить разность энтропий

$$H[Y_1, Y_2, \dots, Y_n] - H[X_1, X_2, \dots, X_n]$$

а) в общем случае; б) при $n = 3$ и матрице преобразований

$$\|a_{kj}\| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & 5 \end{vmatrix}.$$

§ 28. Количество информации

Основные формулы

Количество информации, которое может быть получено в результате наблюдения полной группы несовместных событий, измеряется ее энтропией H ; количество информации, которое может быть получено в результате наблюдения значения дискретной случайной величины X , — ее энтропией $H[X]$.

Количество информации о случайной величине X , которое может быть получено в результате наблюдения другой случайной величины Y , измеряется разностью энтропии случайной величины и ее средней условной энтропии относительно Y :

$$I_y[X] = H[X] - H_y[X].$$

Для дискретных случайных величин

$$\begin{aligned} I_y[X] &= \mathbf{M} \left[\log_a \frac{\mathbf{P}(X=x|Y=y)}{\mathbf{P}(X=x)} \right] = \\ &= \mathbf{M} \left[\log_a \frac{\mathbf{P}(X=x, Y=y)}{\mathbf{P}(X=x)\mathbf{P}(Y=y)} \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mathbf{P}(X=x_i, Y=y_j) \log_a \frac{\mathbf{P}(X=x_i, Y=y_j)}{\mathbf{P}(X=x_i)\mathbf{P}(Y=y_j)}. \end{aligned}$$

Если после получения сообщения о дискретной случайной величине Y значение случайной величины X полностью определено, то $H_y[X] = 0$ и $I_y[X] = H[X]$.

Если X и Y независимы, то $H_y[X] = H[X]$ и $I_y[X] = 0$.

Для непрерывных случайных величин

$$I_y[X] = M \left[\log_a \frac{f(X|Y)}{f_x(X)} \right] = M \left[\log_a \frac{f(X, Y)}{f_x(X)f_y(Y)} \right] = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \log_a \frac{f(x, y)}{f_x(x)f_y(y)} dx dy.$$

Из симметрии формул для количества информации относительно величин X и Y следует, что

$$I_y[X] = I_x[Y].$$

Решение типовых примеров

Пример 28.1. Закодировать по методу Шеннона — Фэно¹⁾ алфавит, состоящий из четырех символов A, B, C и D , если вероятности появления каждого символа в сообщении равны:

$$P(A) = 0,28, \quad P(B) = 0,14, \quad P(C) = 0,48, \\ P(D) = 0,10.$$

Определить экономность кода, т. е. количество информации, приходящееся на один символ.

Решение. Располагаем символы алфавита в порядке убывания вероятностей C, A, B, D и производим последовательные разбиения на группы.

При первом разбиении в первую группу попадает C , а во вторую A, B и D , поскольку $P(C) = 0,48$ и $P(A+B+D) = 0,52$. Первой группе приписываем кодовый символ 1, а второй группе 0. Аналогично из второй группы в свою очередь получаем подгруппы A и $B+D$ с вероятностями

¹⁾ При кодировании по методу Шеннона — Фэно совокупность символов (алфавит), расположенных предварительно в порядке убывания вероятностей появления символов, разбивают на две группы таким образом, чтобы сумма вероятностей появления символов, входящих в группы, была примерно одинаковой. Каждая из групп в свою очередь также разбивается на две по такому же принципу. Операция продолжается до тех пор, пока в каждой группе не останется по одному символу. Каждый символ обозначается двоичным числом, последовательные цифры которого (единицы и нули) показывают, в какую группу попал данный символ при очередном разбиении.

0,28 и 0,24 и кодовыми обозначениями 01 и 00. Наконец, группа $B+D$ разбивается на B и D с вероятностями 0,14 и 0,10 и кодовыми обозначениями 001 и 000.

Процесс кодирования удобно представить в виде таблицы 18.

Таблица 18

Символы алфавита	Вероятности символов алфавита	Подгруппы и их кодовые обозначения	Кодовые обозначения символов алфавита
C	0,48	} 1	1
A	0,28	} 0 } 1	01
B	0,14	} 0 } 0 } 1	001
D	0,10	} 0 } 0 } 0	000

Появлению одного из символов алфавита соответствует полная группа несовместных событий, а общее количество информации в данном примере равно энтропии алфавита. Поэтому количество информации, приходящееся на один кодовый символ (экономность кода), равно отношению энтропии алфавита к математическому ожиданию длины кодового обозначения символов алфавита:

$$\frac{-0,48 \log_2 0,48 - 0,28 \log_2 0,28 - 0,14 \log_2 0,14 - 0,10 \log_2 0,10}{1 \cdot 0,48 + 2 \cdot 0,28 + 3 \cdot 0,14 + 3 \cdot 0,10} = \frac{1,751}{1,760} = 0,995.$$

Аналогично решаются задачи 28.9 и 28.11—28.13.

Пример 28.2. Вероятности поступления и непоступления сигнала на вход приемника соответственно равны a и $\bar{a} = 1 - a$. Вследствие помех сигнал, поступивший на вход приемника, может быть зафиксирован на выходе с вероятностью β и не зафиксирован с вероятностью $\bar{\beta} = 1 - \beta$, а при отсутствии сигнала на входе он может быть зафиксирован вследствие помех с вероятностью γ и не зафиксирован с вероятностью $\bar{\gamma} = 1 - \gamma$. Определить количество информации о наличии сигнала на входе по наблюдению сигнала на выходе.

Решение. Обозначим через X случайное число сигналов на входе и через Y случайное число сигналов на выходе.

Тогда

$$\begin{aligned} P(X=1) &= \alpha, & P(X=0) &= \bar{\alpha}, \\ P(Y=1|X=1) &= \beta, & P(Y=0|X=1) &= \bar{\beta}, \\ P(Y=1|X=0) &= \gamma, & P(Y=0|X=0) &= \bar{\gamma}, \\ P(Y=1) &= \alpha\beta + \bar{\alpha}\gamma, & P(Y=0) &= \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\bar{\gamma}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} I_y[X] &= \alpha\beta \log_a \frac{\beta}{\alpha\beta + \bar{\alpha}\gamma} + \bar{\alpha}\gamma \log_a \frac{\gamma}{\alpha\beta + \bar{\alpha}\gamma} + \\ &+ \alpha\bar{\beta} \log_a \frac{\bar{\beta}}{\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\bar{\gamma}} + \bar{\alpha}\bar{\gamma} \log_a \frac{\bar{\gamma}}{\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\bar{\gamma}}. \end{aligned}$$

Можно также воспользоваться формулой

$$I_y[X] = I_x[Y] = H[Y] - H_x[Y],$$

где безусловная энтропия

$$H[Y] = -(\alpha\beta + \bar{\alpha}\gamma) \log_a (\alpha\beta + \bar{\alpha}\gamma) - (\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\bar{\gamma}) \log_a (\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\bar{\gamma}),$$

а средняя условная энтропия

$$H_x[Y] = -\alpha(\beta \log_a \beta + \bar{\beta} \log_a \bar{\beta}) - \bar{\alpha}(\gamma \log_a \gamma + \bar{\gamma} \log_a \bar{\gamma}).$$

Оба способа дают один и тот же результат.

Пример 28.3. Имеется 12 монет одного достоинства; 11 из них имеют одинаковый вес, а одна — фальшивая, отличается по весу от остальных. Каково наименьшее число взвешиваний на рычажных весах без гирь, которое позволяет обнаружить фальшивую монету и выяснить, легче ли она, чем остальные монеты, или тяжелее? (См. [54]).

Решение. Каждая из 12 монет может оказаться фальшивой и быть при этом тяжелее или легче настоящей. Таким образом, имеется 24 возможных исхода, что при равной вероятности этих исходов дает энтропию сложного опыта, определяющего фальшивую монету, равную $\log_2 24 = 3 + \log_2 3 = 3 + \frac{0,477}{0,301} = 4,58$.

Каждое взвешивание имеет три исхода, что в предположении их равной вероятности дает энтропию, равную $\log_2 3 = 1,58$.

Следовательно, минимальное число взвешиваний не может быть меньше, чем $\frac{\log_2 24}{\log_2 3} = \frac{4,58}{1,58} = 2,90$, т. е. оно не меньше трех.

Действительно, покажем, что при оптимальном планировании опыта потребуется ровно три взвешивания.

Чтобы число взвешиваний было наименьшим, каждое взвешивание должно давать наибольшее количество информации, а для этого исход взвешивания должен обладать наибольшей энтропией.

Пусть при первом взвешивании на обе чашки положено по i монет. При этом, как упоминалось, возможны три исхода:

- 1) чашки весов остались в равновесии;
- 2) перевесила правая чашка;
- 3) перевесила левая чашка.

При первом исходе фальшивая монета находится среди $12 - 2i$ отложенных монет, и, следовательно, вероятность этого исхода равна

$$P_1 = \frac{12 - 2i}{12}.$$

Во втором и третьем исходах фальшивая монета лежит на одной из чашек весов. Поэтому вероятности этих исходов равны

$$P_2 = P_3 = \frac{i}{12}.$$

Чтобы взвешивание дало наибольшую информацию, распределение вероятностей исходов должно обладать наибольшей энтропией, чему соответствует равенство всех вероятностей исходов. Отсюда

$$\frac{12 - 2i}{12} = \frac{i}{12}, \quad i = 4,$$

т. е. при первом взвешивании на каждую чашку весов следует положить по 4 монеты.

Далее рассмотрим отдельно случай а), когда при первом взвешивании чашки весов остались в равновесии, и случай б), когда одна из чашек перевесила другую.

В случае а) имеем 8 настоящих (заведомо не фальшивых) монет и 4 подозрительных, которые не участвовали в первом взвешивании. Для второго взвешивания мы можем положить

на правую чашку i подозрительных монет ($i \leq 4$), а на левую $j \leq i$ подозрительных и $i - j$ настоящих монет. При этом $i + j \leq 4$, так как число подозрительных монет равно 4. Все возможные значения i и j и соответствующие вероятности исходов при втором взвешивании в случае а) сведены в таблицу 19.

Таблица 19

№ опыта	i	j	P_1	P_2	P_3	H_{ij}
1	1	1	0,5	0,25	0,25	0,452
2	1	0	0,75	0,125	0,125	0,320
3	2	2	0	0,5	0,5	0,301
4	2	1	0,25	0,375	0,375	0,470
5	2	0	0,5	0,25	0,25	0,452
6	3	1	0	0,5	0,5	0,301
7	3	0	0,25	0,375	0,375	0,470
8	4	0	0	0,5	0,5	0,301

В этой таблице приведена также энтропия опыта, равная

$$H_{ij} = -P_1 \lg P_1 - P_2 \lg P_2 - P_3 \lg P_3.$$

Наибольшую энтропию дают опыты № 4 и 7. Итак, имеется два равноценных варианта второго взвешивания: необходимо либо положить на одну чашку весов две подозрительные монеты, а на другую одну подозрительную и одну настоящую (опыт № 4), либо три подозрительные на одну чашку и три настоящие на другую (опыт № 7).

Читатель может самостоятельно убедиться в том, что в обоих вариантах третье взвешивание позволяет решить поставленную задачу, т. е. определить фальшивую монету и выяснить, легче ли она или тяжелее остальных.

В случае б), когда при первом взвешивании перевесила одна из чашек, монеты распределяются на три группы, по 4 подозрительных, положенных на правую и левую чашки (4 «правых» и 4 «левых»), и 4 настоящих (не участвовавших в первом взвешивании).

Если при втором взвешивании положить на правую чашку весов i_1 «правых» и i_2 «левых», а на левую чашку j_1 «правых», j_2 «левых» и $i_1 + i_2 - j_1 - j_2$ настоящих монет и сравнить энтропии всех возможных вариантов, то окажется,

что имеется 13 равноценных вариантов с наибольшей (одинаковой) энтропией. Любой из этих вариантов, например $i_1 = 3, i_2 = 2, j_1 = 1, j_2 = 0$ или $i_1 = 1, i_2 = 2, j_1 = 0, j_2 = 2$, дает наибольшую возможную информацию и позволяет при третьем взвешивании определить фальшивую монету и выяснить, легче ли она или тяжелее остальных.

Аналогично решаются задачи 28.2 и 28.5.

Задачи

28.1. Прямоугольник разделен четырьмя продольными и восемью поперечными полосами на 32 квадрата. Единственная точка с равной вероятностью может находиться в одном из этих квадратов.

Определить количество информации в сообщениях: а) точка находится в квадрате № 27; б) точка находится в третьей продольной и первой поперечной полосе; в) точка находится в шестой поперечной полосе.

28.2. Имеется N монет одного достоинства, из которых одна фальшивая, несколько легче остальных.

Сколькими взвешиваниями на рычажных весах без гирь можно обнаружить фальшивую монету? При каком наибольшем N достаточно пяти взвешиваний?

28.3. Символы алфавита азбуки Морзе могут появиться в сообщении с вероятностями: для точки — 0,51, для тире — 0,31, для промежутка между буквами — 0,12 и для промежутка между словами — 0,06. Определить среднее количество информации в сообщении из 500 символов данного алфавита, считая, что связь между последовательными символами отсутствует.

28.4. Сложная система находится в одном из N различных равновозможных состояний A_j . Состояние системы может быть определено путем постановки контрольных опытов; результат каждого из них показывает группу состояний, в которых находится система.

В одном из опытов при состояниях A_1, A_2, \dots, A_k сигнал наблюдается, при состояниях $A_{k+1}, A_{k+2}, \dots, A_N$ — не наблюдается. При другом опыте сигнал наблюдается, если система находится в одном из состояний A_1, A_2, \dots, A_l ($l \leq k$) или $A_{k+1}, A_{k+2}, \dots, A_{k+r}$ ($r \leq N - k$), и не наблюдается в остальных состояниях. Чему равно количество информации в первом и втором опытах?

28.5. Неисправный телевизор находится в одном из пяти различных состояний, которым соответствуют различные виды неисправностей. Для обнаружения вида неисправности может быть проведено несколько из семи возможных проверок, приводящих при различных состояниях телевизора к тому, что контрольная лампочка загорается или не загорается. В приведенной таблице это обозначено соответственно единицей или нулем.

№ проверки	№ состояния				
	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	1
2	0	0	0	1	1
3	0	1	1	0	0
4	1	0	1	0	0
5	1	0	1	0	1
6	1	1	1	0	0
7	1	1	1	1	0

Составить последовательность из *минимального* числа проверок, позволяющих определить вид неисправности телевизора.

28.6. В сообщениях используются символы алфавита A_1, A_2, A_3, A_4 с вероятностями $P(A_1) = 0,45, P(A_2) = 0,10, P(A_3) = 0,15, P(A_4) = 0,30$.

Для передачи сообщения по каналу связи могут быть применены два кода — № 1 и 2. В первом коде символам алфавита соответствуют символы кода a, b, c и d , во втором коде — символы a, d, b и c .

Определить эффективность кодов, т. е. количество информации, передаваемое в среднем в единицу времени, если длительности передачи символов кода по каналу связи в условных единицах времени равны

$$t_a = 8, \quad t_b = 6, \quad t_c = 5, \quad t_d = 3.$$

28.7. В условиях предыдущей задачи наряду с кодами № 1 и 2 рассмотреть другие возможные коды и определить наиболее эффективный из них.

28.8. Для передачи сообщений используется код, состоящий из трех символов, вероятности появления которых равны 0,8; 0,1 и 0,1. Корреляция между символами кода отсутствует. Определить избыточность кода, т. е. величину, дополняющую до единицы отношение энтропии данного кода к максимальной энтропии кода, составленного из того же числа символов.

28.9. Сообщение состоит из последовательности двух букв A и B , вероятности появления каждой из которых не зависят от того, какая буква была передана ранее, и равны $P(A) = 0,8$, $P(B) = 0,2$.

Произвести кодирование по методу Шеннона — Фэно: а) отдельных букв; б) блоков, состоящих из двухбуквенных сочетаний; в) блоков, состоящих из трехбуквенных сочетаний.

Сравнить коды по их экономности.

28.10. Сравнить коды предыдущей задачи по их избыточности, определяя средние вероятности появления символа кода a_j по формуле

$$P(a_j) = \frac{\sum_{i=1}^m P(A_i) Z_{ij}}{\sum_{i=1}^m P(A_i) R_i},$$

где Z_{ij} — число символов a_j в i -й кодовой комбинации, R_i — число всех символов в i -й кодовой комбинации.

28.11. Сообщение состоит из последовательности трех букв A , B и C , вероятности появления которых не зависят от предыдущего сочетания букв и равны $P(A) = 0,7$, $P(B) = 0,2$ и $P(C) = 0,1$.

1. Произвести кодирование по методу Шеннона — Фэно отдельных букв и двухбуквенных сочетаний.

2. Сравнить коды по их экономности.

3. Сравнить коды по их избыточности.

28.12. Вероятности появления отдельных букв русского алфавита приведены в таблице 20, где знаком «—» обозначен промежуток между словами.

Произвести кодирование алфавита по методу Шеннона — Фэно, считая вероятность появления последующей буквы не зависящей от предшествующих букв.

в передачу вносятся ошибки, так что в среднем один символ из 100 принимается неверно (a_1 вместо a_2 или a_2 вместо a_1).

Определить среднее количество информации на символ, передаваемой по такому каналу. Сравнить ее с количеством информации при отсутствии помех.

28.15. По каналу связи с одинаковыми вероятностями передаются сигналы A_1, A_2, \dots, A_m . При отсутствии помех сигналу A_j соответствует символ a_j ($j = 1, 2, \dots, m$). При наличии помех каждый из символов имеет вероятность p быть правильно принятым, а с вероятностью $q = 1 - p$ искажается и может перейти в любой из остальных. Определить среднее количество информации на один символ, передаваемое по каналу при наличии и при отсутствии помех.

28.16. По каналу связи с одинаковой вероятностью передаются сигналы A_1, A_2, \dots, A_m . При отсутствии помех сигналу A_j соответствует символ a_j ($j = 1, 2, \dots, m$). Вследствие помех сигнал A_j может быть принят правильно с вероятностью p_{jj} или воспринят как символ a_i с вероятностью p_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, m, \sum_{i=1}^m p_{ij} = 1$). Определить среднее количество информации на символ, передаваемое по такому каналу с помехами, характеризуемыми матрицей $\|p_{ij}\|$.

Таблица 20

Буква	—	о	е, ё	а	и	т	н	с
Вероятность	0,175	0,090	0,072	0,062	0,062	0,053	0,053	0,043
Буква	р	в	л	к	м	д	п	у
Вероятность	0,040	0,038	0,035	0,028	0,026	0,025	0,023	0,021
Буква	я	ы	з	ь, ъ	б	г	ч	й
Вероятность	0,018	0,016	0,016	0,014	0,014	0,013	0,012	0,010
Буква	х	ж	ю	ш	ц	щ	э	ф
Вероятность	0,009	0,007	0,006	0,006	0,004	0,003	0,003	0,002

28.13. Алфавит состоит из n символов A_j ($j = 1, 2, \dots, n$), появление каждого из которых в сообщении независимо и имеет вероятность

$$P(A_j) = 2^{-k_j},$$

где k_j — целые положительные числа и

$$\sum_{j=1}^n P(A_j) = 1.$$

Показать, что при кодировании такого алфавита по методу Шеннона — Фэно на каждый кодовый символ приходится максимально возможное количество информации, равное одной двоичной единице.

28.14. По каналу связи передаются два сигнала A_1 и A_2 с вероятностями $P(A_1) = P(A_2) = 0,5$. На выходе канала сигналы преобразуются в символы a_1 и a_2 , причем из-за помех, которым одинаково подвержены сигналы A_1 и A_2 ,

ГЛАВА VI
ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

§ 29. Закон больших чисел

Основные формулы

Если случайная величина X имеет конечную дисперсию, то при любом $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство Чебышева:

$$P(|X - \bar{x}| \geq \varepsilon) \leq \frac{D[X]}{\varepsilon^2}.$$

Если $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ — последовательность случайных величин, попарно независимых и имеющих дисперсии, ограниченные одной и той же постоянной: $D[X_k] \leq C, k = 1, 2, \dots$, то, какова бы ни была постоянная $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \bar{x}_k\right| < \varepsilon\right) = 1$$

(теорема Чебышева).

Если случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ одинаково распределены и имеют конечные математические ожидания \bar{x} , то, какова бы ни была постоянная $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \bar{x}\right| < \varepsilon\right) = 1$$

(теорема Хинчина).

Для последовательности зависимых случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} D\left[\sum_{k=1}^n X_k\right] = 0,$$

при любой постоянной $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \bar{x}_k \right| < \varepsilon \right\} = 1$$

(теорема Маркова).

Для того чтобы к последовательности как угодно зависимых случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ был применим закон больших чисел, т. е. чтобы при любой постоянной $\varepsilon > 0$ выполнялось соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \bar{x}_k \right| < \varepsilon \right\} = 1,$$

необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M} \frac{\left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{x}_k) \right\}^2}{1 + \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{x}_k) \right\}^2} = 0.$$

Решение типовых примеров

Пример 29.1. Доказать, что если $\varphi(x)$ — монотонно возрастающая положительная функция, а $\mathbf{M}[\varphi(X)] = m$ существует, то

$$\mathbf{P}(X > t) \leq \frac{m}{\varphi(t)}.$$

Решение. Учитывая свойства функции $\varphi(x)$, получим цепь неравенств

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X > t) &= \int_{x>t} f(x) dx \leq \frac{1}{\varphi(t)} \int_{x>t} \varphi(x) f(x) dx \leq \\ &\leq \frac{1}{\varphi(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx = \frac{m}{\varphi(t)}. \end{aligned}$$

так как $m = \mathbf{M}[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)f(x) dx$. Отсюда $\mathbf{P}(X > t) \leq \leq \frac{m}{\varphi(t)}$, что и требовалось доказать.

Аналогично решаются задачи 29.2—29.5.

Пример 29.2. Дана последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, имеющих одну и ту же функцию распределения

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

Проверить, применима ли к этой последовательности теорема Хинчина.

Решение. Для применимости теоремы Хинчина необходимо существование математического ожидания случайной величины X , т. е. чтобы $\int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{dF(x)}{dx} dx$ сходился абсолютно.

Однако

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \frac{dF(x)}{dx} dx &= \frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x dx}{x^2 + a^2} = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{2a}{\pi} \int_0^A \frac{x dx}{x^2 + a^2} = \\ &= \frac{a}{\pi} \lim_{A \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{A^2}{a^2} \right) = \infty, \end{aligned}$$

т. е. интеграл не сходится, математическое ожидание не существует и теорема Хинчина неприменима.

Пример 29.3. Можно ли интеграл $J = \int_a^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ ($a > 0$)

после замены переменных $y = \frac{a}{x}$ вычислить методом Монте-Карло по формуле

$$J_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{y_k} \sin \frac{a}{y_k},$$

где y_k — случайные числа из интервала $[0, 1]$?

Решение. Произведя указанную замену переменной, получим

$$J = \int_0^1 \frac{1}{y} \sin \frac{a}{y} dy.$$

Величину J_n можно считать приближенным значением J только тогда, когда справедливо предельное равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|J_n - J| < \epsilon) = 1$.

Случайные числа y_k имеют одинаковые распределения, а следовательно, и функции их $\frac{1}{y_k} \sin \frac{a}{y_k}$ имеют одинаковые распределения. Для применения теоремы Хинчина остается убедиться в существовании математического ожидания $M\left[\frac{1}{Y} \sin \frac{a}{Y}\right]$, где Y — случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[0, 1]$, т. е. надо доказать, что $\int_0^1 \frac{1}{y} \sin \frac{a}{y} dy$ сходится абсолютно.

Однако если обозначить через s наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству $s \geq \frac{a}{\pi}$, то

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left| \frac{1}{y} \sin \frac{a}{y} \right| dy &= \int_a^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \sum_{k=s}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx = \\ &= \sum_{k=s}^{\infty} \int_0^\pi \frac{\sin y}{y + k\pi} dy. \end{aligned}$$

А так как

$$\sum_{k=s}^{\infty} \int_0^\pi \frac{\sin y}{y + k\pi} dy > \sum_{k=s}^{\infty} \frac{1}{\pi(k+1)} \int_0^\pi \sin y dy = \frac{2}{\pi} \sum_{k=s}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \infty,$$

то расходится и интеграл

$$\int_0^1 \left| \frac{1}{y} \sin \frac{a}{y} \right| dy.$$

Последнее означает, что $\mathbf{M} \left[\frac{1}{Y} \sin \frac{a}{Y} \right]$ не существует, а следовательно, и метод Монте-Карло в данном случае неприменим.

Пример 29.4. Можно ли принять величину

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - a)^2$$

в качестве приближенного значения дисперсии ошибок испытываемого прибора, если $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ — независимые измерения постоянной величины a , имеющие одинаковые функции распределения?

Решение. Обозначим истинное значение дисперсии ошибок испытываемого прибора σ^2 . Величину S_n^2 можно рассматривать в качестве приближенного значения σ^2 , если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{ |S_n^2 - \sigma^2| < \varepsilon \} = 1.$$

Так как $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ — независимые случайные величины, имеющие одинаковые распределения, то величины $Y_k = (X_k - a)^2$ независимы и имеют одинаковые распределения.

Имеем $\mathbf{M}[Y_k] = \mathbf{M}[(X_k - a)^2] = \mathbf{M}[X_k^2] - 2a\mathbf{M}[X_k] + a^2 = \sigma^2 + \bar{x}^2 - 2a\bar{x} + a^2 = \sigma^2 + (\bar{x} - a)^2$, где $\bar{x} = \mathbf{M}[X_k]$. Для выполнения равенства $\mathbf{M}[Y_k] = \sigma^2$ необходимо, чтобы $\bar{x} = a$, что означает отсутствие систематических ошибок измерения у испытываемого прибора.

Итак, если у испытываемого прибора отсутствуют систематические ошибки, то выполнены условия применимости закона больших чисел и, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - a)^2 - \sigma^2 \right| < \varepsilon \right\} = 1.$$

Задачи

29.1. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что нормальная случайная величина отклонится от своего математического ожидания больше чем на: а) четыре средних отклонения; б) три средних квадратических отклонения.

29.2. Доказать для любой случайной величины X при $\epsilon > 0$ неравенство

$$P(\epsilon X > t^2 + \ln J) < e^{-t^2},$$

где $J = M[e^{\epsilon X}]$.

29.3. Доказать, что если $M[e^{aX}]$ существует, то

$$P(X \geq \epsilon) \leq e^{-a\epsilon} M[e^{aX}] \quad (a > 0).$$

29.4. Случайная величина X подчиняется показательному закону распределения

$$f(x) = \frac{x^m}{m!} e^{-x} \quad (x \geq 0),$$

Доказать справедливость неравенства

$$P(0 < X < 2(m+1)) > \frac{m}{m+1}.$$

29.5. Вероятность появления события A в одном опыте равна $1/2$. Можно ли с вероятностью, большей $0,97$, утверждать, что число появлений события A в 1000 независимых опытах будет в пределах от 400 до 600 ?

29.6. Определить, имеет ли место закон больших чисел для среднего арифметического из n попарно независимых случайных величин X_k , заданных рядом распределения (табл. 21).

Таблица 21

x_i	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Таблица 22

x_i	$\sqrt{\ln k}$	$-\sqrt{\ln k}$
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

29.7. Пусть X_k — случайная величина, которая с одинаковой вероятностью может принимать одно из двух значений k^s или $-k^s$. При каком s к среднему арифметическому последовательности $X_1, X_2, \dots, X_k, \dots$ таких независимых случайных величин применим закон больших чисел?

29.8. Доказать, что к среднему арифметическому последовательности независимых случайных величин X_k , заданных рядом распределения (табл. 22), применим закон больших чисел.

29.9. Установить, будут ли выполнены достаточные условия применимости закона больших чисел для последовательности взаимно независимых случайных величин X_k с распределениями, задаваемыми формулами:

$$\text{а) } P(X_k = \pm 2^k) = \frac{1}{2};$$

$$\text{б) } P(X_k = \pm 2^k) = 2^{-(2k+1)}, \quad P(X_k = 0) = 1 - 2^{-2k};$$

$$\text{в) } P(X_k = \pm k) = \frac{1}{2\sqrt{k}}, \quad P(X_k = 0) = 1 - \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

29.10. Случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ имеют одинаковые математические ожидания и ограниченные дисперсии. Применим ли к этой последовательности закон больших чисел, если все корреляционные моменты $k_{ij} = M[(X_i - \bar{x}) \times (X_j - \bar{x})]$ отрицательны?

29.11. Доказать, что к последовательности случайных величин, в которой каждая случайная величина может зависеть только от случайных величин со смежными номерами, применим закон больших чисел, если только все случайные величины последовательности имеют конечные дисперсии и математические ожидания.

29.12. Последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots$ задана рядом распределения

$$P(X_i = k) = \frac{1}{k^3 \zeta(3)} \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

где $\zeta(3) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} = 1,20256$ — значение функции Римана при аргументе 3. Проверить, применим ли к этой последовательности закон больших чисел.

29.13. Дана последовательность случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, для которых $D[X_n] \leq c$ и $r_{ij} \rightarrow 0$ при $|i - j| \rightarrow \infty$ (r_{ij} — коэффициент корреляции между X_i и X_j). Доказать, что к данной последовательности применим закон больших чисел (теорема Бернштейна).

29.14. Последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots$ задана

рядом распределения

$$P(X_i = (-1)^{k-1} k) = \frac{6}{k^2 \pi^2} \quad (k=1, 2, \dots).$$

Проверить, применим ли к этой последовательности случайных величин закон больших чисел.

§ 30. Теоремы Муавра — Лапласа и Ляпунова

Основные формулы

Для серии n независимых опытов, в каждом из которых событие A появляется с одной и той же вероятностью p ($0 < p < 1$), согласно теореме Муавра — Лапласа справедливо предельное равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(a \leq \frac{m - np}{\sqrt{npq}} < b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} [\Phi(b) - \Phi(a)],$$

где m — число появлений события A в результате n опытов,

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — функция Лапласа (интеграл вероятности), значения которой даны в таблице [8Т].

Для последовательности взаимно независимых случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_k, \dots$, удовлетворяющей при некотором $\delta > 0$ условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^n M\{|X_k - a_k|^{2+\delta}\} = 0,$$

согласно теореме Ляпунова выполняется равенство

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(a < \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{x}_k) < b\right) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} [\Phi(b) - \Phi(a)], \end{aligned}$$

где $\bar{x}_k = M[X_k]$ — математическое ожидание X_k , $\sigma_k^2 = D[X_k]$ — дисперсия X_k , $B_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$.

Для применимости теоремы Ляпунова в случае одинаково распределенных случайных величин достаточно убедиться, что дисперсии слагаемых конечны и отличны от нуля.

Решение типовых примеров

Пример 30.1. Вероятность выхода из строя изделия за время испытаний на надежность $p = 0,05$. Какова вероятность, что за время испытаний 100 изделий выйдут из строя: а) не менее 5 изделий; б) менее 5 изделий; в) от 5 до 10 изделий?

Решение. Согласно теореме Муавра — Лапласа

$$P(m_1 \leq m < m_2) \approx \frac{1}{2} \left[\Phi \left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} \right) - \Phi \left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} \right) \right],$$

если только n достаточно велико. По условиям задачи $n = 100$; $p = 0,05$; $q = 1 - p = 0,95$.

а) Вероятность выхода из строя не менее 5 изделий

$$\begin{aligned} P(m \geq 5) &= P(5 \leq m < 100) \approx \\ &\approx \frac{1}{2} \left[\Phi \left(\frac{100 - 5}{\sqrt{4,75}} \right) - \Phi \left(\frac{5 - 5}{\sqrt{4,75}} \right) \right] = \frac{1}{2} [\Phi(43,6) - \Phi(0)] = 0,5. \end{aligned}$$

б) Вероятность выхода из строя менее 5 изделий

$$\begin{aligned} P(m < 5) &= P(0 \leq m < 5) \approx \frac{1}{2} \left[\Phi \left(\frac{5 - 5}{\sqrt{4,75}} \right) - \Phi \left(\frac{0 - 5}{\sqrt{4,75}} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} [\Phi(0) + \Phi(2,29)] = \frac{1}{2} \cdot 0,9780 = 0,489. \end{aligned}$$

в) Вероятность выхода из строя от 5 до 10 изделий

$$\begin{aligned} P(5 \leq m \leq 10) &\approx \frac{1}{2} \left[\Phi \left(\frac{10 - 5}{\sqrt{4,75}} \right) - \Phi \left(\frac{5 - 5}{\sqrt{4,75}} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} [\Phi(2,29) - \Phi(0)] = \frac{1}{2} \cdot 0,9780 = 0,489. \end{aligned}$$

Аналогично решаются задачи 30.1—30.4.

Пример 30.2. Сколько нужно произвести независимых испытаний, чтобы с вероятностью 0,8 событие A вероят-

ность появления которого при одном опыте равна $P(A)=0,05$, наблюдалось бы не менее 5 раз?

Решение. На основании теоремы Муавра — Лапласа

$$P(m \geq 5) \approx \frac{1}{2} \left[\Phi \left(\frac{n - 0,05n}{\sqrt{0,0475n}} \right) - \Phi \left(\frac{5 - 0,05n}{\sqrt{0,0475n}} \right) \right] = \\ = \frac{1}{2} \left[\Phi(4,36\sqrt{n}) - \Phi \left(\frac{5 - 0,05n}{\sqrt{0,0475n}} \right) \right].$$

Уже при $n=1$ $\Phi(4,36\sqrt{n}) \approx 1$; поэтому, заменив по условию $P(m \geq 5) = 0,8$, получим

$$\frac{1}{2} \left[1 - \Phi \left(\frac{5 - 0,05n}{\sqrt{0,0475n}} \right) \right] \approx 0,8$$

или

$$\Phi \left(\frac{5 - 0,05n}{\sqrt{0,0475n}} \right) = -0,6.$$

По таблице [8Т] находим аргумент $x = -0,8416$, соответствующий значению функции $\Phi(x) = -0,6$. Решая уравнение

$$\frac{5 - 0,05n}{\sqrt{0,0475n}} = -0,8416,$$

находим единственный корень $n = 144$. Итак, для появления события A не менее пяти раз с вероятностью 0,8 необходимо произвести 144 испытания.

Аналогично решаются задачи 30.5—30.7.

Пример 30.3. Сколько опытов надо произвести при вычислении интеграла

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$$

методом Монте-Карло для того, чтобы с вероятностью 0,9 можно было считать относительную погрешность в вычисленном значении интеграла менее 5%?

Решение. Интеграл $\frac{2}{\pi} J = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$ можно рас-

сматривать как математическое ожидание функции $\cos x$ от случайной величины X , равномерно распределенной в интер-

вале $(0, \frac{\pi}{2})$. Тогда приближенное значение интеграла

$$J_n = \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^n \cos X_k,$$

где X_k — случайные числа из интервала $(0, \frac{\pi}{2})$.

Составим случайную величину

$$T_n = \frac{J_n - J}{\sqrt{D[J_n]}}$$

имеющую своим предельным законом распределения, согласно теореме Ляпунова, функцию

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}},$$

так как величины $\cos X_k$ независимы, одинаково распределены и имеют конечную, отличную от нуля дисперсию, а $J = M[J_n]$. Имеем

$$D[J_n] = \frac{\pi^2}{4n} D[\cos X] = \frac{\pi^2 - 8}{8n}.$$

Применяя теорему Ляпунова, при $b = -a = \varepsilon$ получим

$$P\left\{\sqrt{\frac{8n}{\pi^2 - 8}} |J_n - J| < \varepsilon\right\} \approx \Phi(\varepsilon) = 0,9;$$

отсюда $\varepsilon = 1,645$.

Для того чтобы относительная погрешность $\frac{J_n - J}{J}$ была меньше 0,05, учитывая, что $J = 1$, необходимо произвести такое число опытов n , чтобы

$$\sqrt{\frac{8n}{\pi^2 - 8}} \cdot 0,05 > 1,645,$$

откуда получаем $n > 252$.

Аналогично решаются задачи 30.10—30.12.

Задачи

30.1. Вероятность появления события при одном опыте равна 0,3. С какой вероятностью можно утверждать, что частота этого события при 100 опытах будет лежать в пределах от 0,2 до 0,4?

30.2. Имеются 100 станков одинаковой мощности, работающих независимо друг от друга в одинаковом режиме, при котором их привод оказывается включенным в течение 0,8 всего рабочего времени. Какова вероятность того, что в произвольно взятый момент времени окажутся включенными от 70 до 86 станков?

• **30.3.** Вероятность выхода из строя за время T одного конденсатора равна 0,2. Определить вероятность того, что за время T из 100 конденсаторов выйдут из строя: а) не менее 20 конденсаторов; б) менее 28 конденсаторов; в) от 14 до 26 конденсаторов.

• **30.4.** Пользуясь теоремой Муавра — Лапласа, показать, что при достаточно большом числе опытов

$$P\left(p - \varepsilon \leq \frac{m}{n} \leq p + \varepsilon\right) \approx \hat{\Phi}\left(\frac{\varepsilon \sqrt{n}}{\rho \sqrt{2pq}}\right) = \Phi\left(\frac{\varepsilon \sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right),$$

где $\frac{m}{n}$ — частота появления события, вероятность появления которого в одном опыте p .

• **30.5.** Вероятность некоторого события определяется методом Монте-Карло. Определить число независимых опытов, обеспечивающих с вероятностью не менее 0,99 получение искомой вероятности с ошибкой, не превосходящей 0,01. Оценку произвести по теореме Чебышева и по теореме Лапласа.

30.6. Вероятность того, что наугад выбранная деталь окажется бракованной, при каждой проверке одна и та же и равна 0,1. Партия изделий не принимается при обнаружении не менее 10 бракованных изделий. Сколько надо проверить деталей, чтобы с вероятностью 0,6 можно было утверждать, что партия, имеющая 10% брака, не будет принята?

• **30.7.** Сколько нужно произвести опытов, чтобы с вероятностью 0,9 утверждать, что частота интересующего нас события будет отличаться от вероятности появления этого события, равной 0,4, не более чем на 0,1?

• 30.8. Вероятность появления некоторого события в одном опыте равна 0,6. Какова вероятность того, что это событие появится в большинстве из 60 опытов?

30.9. Вероятность некоторого события A равна $\frac{1}{3}$. Производится 45 000 независимых опытов. Каково среднее отклонение E числа появлений события A от математического ожидания этого числа?

• 30.10. Вычисление интеграла $J = \int_0^1 x^2 dx$ произведено методом Монте-Карло на основании 1000 независимых опытов. Вычислить вероятность того, что абсолютная погрешность в определении величины J не превзойдет 0,01.

• 30.11. Сколько опытов надо произвести при вычислении интеграла

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$$

методом Монте-Карло для того, чтобы с вероятностью $P \geq 0,99$ можно было считать абсолютную погрешность вычисленного значения интеграла не превосходящей 0,1% от J ?

30.12. Вероятность $P(C) = P(A+B)$, где $P(B|\bar{A})$ дана, определяется методом Монте-Карло двумя способами: а) приближенное значение $P(C)$ определяется как частота появления события C в ряде из n независимых опытов; б) определяется частота $\frac{m}{n}$ появления события A в ряде из n независимых опытов, а приближенное значение $P(C)$ определяется по формуле

$$P(C) \approx P_n(C) = \frac{m}{n} + \left(1 - \frac{m}{n}\right) P(B|\bar{A}).$$

1. Доказать, что оба способа ведут к правильному результату.

2. Определить необходимое число опытов в обоих случаях для получения ошибки в оценке $P(C)$, не превосходящей 0,01, с вероятностью не меньшей 0,95, если $P(B|\bar{A}) = 0,3$, а значение $P(A)$ имеет порядок 0,4.

30.13. Имеется 100 урн, в каждой из которых находится по 5 красных и 95 черных шаров. Опыты организованы так, что после каждого извлечения из урны шара он вновь возвращается в ту же урну, а результаты опыта наблюдателю не сообщаются. Сколько потребуется опытов, чтобы: 1) с вероятностью 0,8 извлечь хотя бы один красный шар из каждой урны; 2) с вероятностью 0,8 извлечь хотя бы один красный шар не менее чем из 50 урн?

30.14. Вычислить характеристическую функцию $E_{Y_n}(u)$ случайной величины

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x}_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n D[X_i]}}$$

и найти ее предел при $n \rightarrow \infty$, если случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ независимы и имеют одинаковые плотности вероятностей или ряды распределения вида:

$$\text{а) } f(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{2h} & \text{при } |x_i| \leq h, \\ 0 & \text{при } |x_i| > h; \end{cases}$$

$$\text{б) } P(X_i = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a};$$

$$\text{в) } f(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{при } x_i < 0, \\ \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x_i^{\alpha-1} e^{-\beta x_i} & \text{при } x_i \geq 0. \end{cases}$$

30.15. Найти предел при $n \rightarrow \infty$ характеристической функции $E_{Y_n}(u)$ случайной величины

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x}_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n D[X_i]}}$$

если случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ независимы, имеют одинаковые законы распределения, математические ожидания и дисперсии, а моменты более высокого порядка ограничены.

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 31. Общие свойства корреляционных функций и законов распределения случайных функций

Основные формулы

Случайной функцией вещественного аргумента t называется функция $X(t)$, значения которой являются случайными величинами. Если аргумент t может принимать любые значения из некоторого (конечного или бесконечного) интервала, то случайную функцию называют случайным процессом; если аргумент t может принимать только дискретные значения, то $X(t)$ называют случайной последовательностью.

Неслучайная функция $\bar{x}(t)$, равная при каждом t математическому ожиданию $\mathbf{M}[X(t)]$ случайной величины $X(t)$, называется математическим ожиданием случайной функции $X(t)$.

Корреляционная (автокорреляционная) функция $K_x(t_1, t_2)$ случайной функции $X(t)$ определяется формулой

$$K_x(t_1, t_2) = \mathbf{M} \{ [X^*(t_1) - \bar{x}^*(t_1)] [X(t_2) - \bar{x}(t_2)] \} = K_x^*(t_2, t_1),$$

где знаком * отмечены комплексно сопряженные величины¹⁾.

Для стационарных случайных функций имеем

$$K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2 - t_1), \quad \bar{x}(t) = \text{const.}$$

Дисперсия ординаты случайной функции связана с $K_x(t_1, t_2)$ формулой $\mathbf{D}[X(t)] = \sigma_{x(t)}^2 = K_x(t, t)$. Нормированная

¹⁾ В задачах, если не оговорено, $X(t)$ считается вещественной.

корреляционная функция определяется формулой

$$k_x(t_1, t_2) = \frac{K_x(t_1, t_2)}{\sigma_{x(t_1)}\sigma_{x(t_2)}}.$$

Полной характеристикой случайной функции является совокупность законов распределения

$$f(x_1|t_1), f(x_1, x_2|t_1, t_2), f(x_1, x_2, x_3|t_1, t_2, t_3), \dots$$

где $f(x_1, \dots, x_n|t_1, \dots, t_n)$ есть плотность совместного распределения ординат случайной функции в моменты времени $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$. Математическое ожидание $\bar{x}(t)$ и корреляционная функция $K_x(t_1, t_2)$ определяются функциями $f(x_1|t_1)$ и $f(x_1, x_2|t_1, t_2)$ по формулам (для непрерывных случайных функций)¹⁾

$$\bar{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x|t) dx,$$

$$K_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2|t_1, t_2) dx_1 dx_2 - \bar{x}(t_1) \bar{x}(t_2).$$

Для нормального случайного процесса совместное распределение в n моментов времени полностью определяется функциями $\bar{x}(t)$ и $K_x(t_1, t_2)$ по формулам для закона распределения системы нормальных случайных величин, математические ожидания которых

$$\bar{x}(t_1), \bar{x}(t_2), \bar{x}(t_3), \dots, \bar{x}(t_n),$$

а элементы корреляционной матрицы $k_{jl} = K_x(t_j, t_l)$, $l, j = 1, 2, \dots, n$.

Корреляционная функция связи (взаимная корреляционная функция) $R_{xy}(t_1, t_2)$ двух случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ определяется формулой

$$R_{xy}(t_1, t_2) = M \{ [X^*(t_1) - \bar{x}^*(t_1)] [Y(t_2) - \bar{y}(t_2)] \} = R_{yx}^*(t_2, t_1).$$

Для стационарных процессов

$$R_{xy}(t_1, t_2) = R_{xy}(t_2 - t_1).$$

¹⁾ Считаем $X(t)$ вещественной.

Понятие корреляционной функции обобщается и на случайные функции нескольких переменных (случайные поля). Если, например, случайная функция $X(\xi, \eta)$ является функцией двух неслучайных аргументов, то

$$K_x(\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2) = \\ = M \{ [X^*(\xi_1, \eta_1) - \bar{x}^*(\xi_1, \eta_1)] [X(\xi_2, \eta_2) - \bar{x}(\xi_2, \eta_2)] \}.$$

Решение типовых примеров

Задачи данного параграфа принадлежат к двум основным типам. В задачах первого типа требуется определить корреляционную функцию случайной функции, используя свойства ее ординат, или установить общие свойства корреляционной функции. При решении этих задач нужно непосредственно исходить из определения корреляционной функции. В задачах второго типа требуется найти вероятность того, что ординаты случайной функции примут определенные значения. Для решения этих задач необходимо воспользоваться соответствующим нормальным законом распределения, определяемым математическим ожиданием и корреляционной функцией.

Пример 31.1. Определить корреляционную функцию $K_x(t_1, t_2)$, если

$$X(t) = \sum_{j=1}^k [A_j \cos \omega_j t + B_j \sin \omega_j t],$$

где ω_j — заданные числа, а вещественные случайные величины A_j и B_j взаимно не коррелированы, имеют нулевые математические ожидания и дисперсии, определяемые равенствами

$$D[A_j] = D[B_j] = \sigma_j^2 \quad (j = 1, 2, \dots, k).$$

Решение. Так как $\bar{x}(t) = \sum_{j=1}^k (\bar{a}_j \cos \omega_j t + \bar{b}_j \sin \omega_j t) = 0$, то по определению корреляционной функции

$$K_x(t_1, t_2) = \\ = M \left\{ \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^k [A_j \cos \omega_j t_1 + B_j \sin \omega_j t_1] [A_l \cos \omega_l t_2 + B_l \sin \omega_l t_2] \right\}.$$

Раскрывая скобки и применяя теорему о математическом ожидании, замечаем, что все слагаемые, содержащие множители вида $M[A_j A_l]$, $M[B_j B_l]$ при $j \neq l$ и $M[A_j B_l]$ при любых j и l , равны нулю, а $M[A_j^2] = M[B_j^2] = \sigma_j^2$. Поэтому

$$K_x(t_1, t_2) = \sum_{j=1}^k \sigma_j^2 \cos \omega_j(t_2 - t_1).$$

Аналогично решаются задачи 31.3—31.6 и 31.10.

Пример 31.2. Пусть $X(t)$ — нормальная стационарная случайная функция, математическое ожидание которой равно нулю. Доказать, что если

$$Z(t) = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{X(t)X(t+\tau)}{|X(t)X(t+\tau)|} \right],$$

то

$$\bar{z}(t) = \frac{1}{\pi} \arccos[-k_x(\tau)],$$

где $k_x(\tau)$ — нормированная корреляционная функция $X(t)$.

Решение. Пользуясь тем, что $X(t)$ нормальна, закон распределения второго порядка можем представить в виде $f(x_1, x_2|t, t+\tau) =$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_x^2 \sqrt{1-k_x^2(\tau)}} \exp \left\{ -\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2k_x(\tau)x_1x_2}{2\sigma_x^2 [1-k_x^2(\tau)]} \right\}.$$

Искомое математическое ожидание может быть представлено в виде

$$\bar{z}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \left[1 + \frac{x_1x_2}{|x_1x_2|} \right] f(x_1, x_2|t, t+\tau) dx_1 dx_2.$$

Так как $\frac{1}{2} \left[1 + \frac{x_1x_2}{|x_1x_2|} \right]$ тождественно равна нулю в том случае, когда знаки у ординат x_1 и x_2 различны, и равна единице в противоположном случае, то

$$\begin{aligned} \bar{z}(t) &= \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 f(x_1, x_2|t, t+\tau) dx_1 dx_2 + \\ &+ \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(x_1, x_2|t, t+\tau) dx_1 dx_2 = \\ &= 2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(x_1, x_2|t, t+\tau) dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

что после выполнения интегрирования дает результат, указанный в условии задачи. (При интегрировании удобно ввести новые переменные r, φ , положив $x_1 = r \cos \varphi, x_2 = r \sin \varphi$.)

Задачи

31.1. Доказать, что:

а) $|K_x(t_1, t_2)| \leq \sigma_{x(t_1)} \sigma_{x(t_2)}$;

б) $|K_x(t_1, t_2)| \leq \frac{1}{2} [\sigma_{x(t_1)}^2 + \sigma_{x(t_2)}^2]$.

31.2. Доказать, что $|R_{xy}(t_1, t_2)| \leq \sigma_{x(t_1)} \sigma_{y(t_2)}$.

31.3. Доказать, что корреляционная функция не изменяется от добавления к случайной функции любой неслучайной функции.

31.4. Найти дисперсию случайной функции $X(t)$, ординаты которой изменяются скачками на величины Δ_j в случайные моменты времени. Число скачков, происходящих в течение отрезка времени τ , подчиняется закону Пуассона с постоянной $\lambda\tau$, а величины скачков Δ_j взаимно независимы, имеют одинаковые дисперсии σ^2 и нулевые математические ожидания, а $X(0)$ — неслучайная величина.

31.5. Найти корреляционную функцию случайной функции $X(t)$, которая может принимать два значения: $+1$ и -1 ; число перемен знака функции подчиняется закону Пуассона с постоянной временной плотностью λ , а $\bar{x}(t)$ можно считать равным нулю.

31.6. Случайная функция $X(t)$ состоит из отрезков горизонтальных прямых единичной длины, ординаты которых взаимно независимы, могут с одинаковой вероятностью иметь любой знак, а их абсолютные величины подчиняются закону распределения

$$f(|x|) = \frac{|x|^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} e^{-|x|} \quad (\text{гамма-распределение}).$$

Определить $K_x(\tau)$.

31.7. Корреляционная функция угла крена корабля $\Theta(t)$ имеет вид

$$K_\Theta(\tau) = a e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau.$$

Определить вероятность того, что в момент времени $t_2 = t_1 + \tau$ угол крена $\Theta(t_2)$ будет больше 15° , если $\Theta(t_1) = 0$.

мальная случайная функция, $\bar{\theta} = 0$, $\Theta(t_1) = 5^\circ$, $\tau = 2$ сек., $a = 30$ град², $\alpha = 0,02$ сек.⁻¹, $\beta = 0,75$ сек.⁻¹.

31.8. Использование эхолота с корабля, испытывающего бортовую качку, возможно, если угол крена $|\Theta(t)| \leq \theta_0$. Момент первого измерения выбирается так, чтобы это условие выполнялось. Определить вероятность того, что второе измерение может быть произведено через время τ_0 сек., если $\Theta(t)$ — нормальная функция, $\bar{\theta} = 0$, а дисперсия $D[\Theta(t)] = \sigma_\theta^2$ и нормированная корреляционная функция $k(\tau) = \frac{K_\theta(\tau)}{\sigma_\theta^2}$ даны.

31.9. Корреляционная функция угла крена корабля $\Theta(t)$ $K_\theta(\tau) = ae^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right)$, где $a = 36$ град², $\alpha = 0,25$ сек.⁻¹, $\beta = 1,57$ сек.⁻¹. В момент времени t угол крена равен 2° , $\dot{\Theta}(t) \geq 0$. Найти вероятность того, что в момент времени $(t+2)$ сек. угол крена по величине будет меньше 10° , если $\Theta(t)$ — нормальная случайная функция, $\bar{\theta}(t) = 0$.

31.10. Определить математическое ожидание и дисперсию случайной функции $Y(t) = a(t)X(t) + b(t)$, где $a(t)$ и $b(t)$ — числовые (не случайные) функции, а $K_x(t_1, t_2)$ и $x(t)$ известны.

31.11. Найти закон распределения первого порядка для ординат случайной функции

$$X(t) = A(t) \cos[\omega t + \Theta(t)],$$

если законы распределения первого порядка для случайных функций $A(t)$ и $\Theta(t)$ имеют вид

$$f_a(a|t) = \frac{a}{\sigma^2} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} \quad (a \geq 0), \quad f_\theta(\theta|t) = \frac{1}{2\pi} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi);$$

ω — постоянная, а для одного и того же момента времени $A(t)$ и $\Theta(t)$ взаимно независимы.

31.12. Случайные точки распределяются на числовой оси таким образом, что вероятность P_n появления в заданном интервале τ на оси n точек определяется законом Пуассона $P_n = \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} e^{-\lambda\tau}$, где λ — положительная постоянная. Определить закон распределения первого порядка для случайной

где L^* — оператор L , в котором все коэффициенты заменены на комплексно сопряженные; индексы t_1 и t_2 в обозначении оператора L_0 показывают, что в первом случае оператор действует по переменной t_1 , а во втором случае — по переменной t_2 . (Возможность применения оператора к данной случайной функции должна быть проверена в каждом конкретном случае.)

Если L — неоднородный оператор, соответствующий однородному оператору L_0 и функции $F(t)$, и $Z(t) = LX(t)$, то

$$\bar{z}(t) = L\bar{x}(t) = L_0\bar{x}(t) + F(t), \quad K_z(t_1, t_2) = L_{0t_1}^* L_{0t_2} K_x(t_1, t_2),$$

т. е. корреляционная функция не зависит от функции $F(t)$, порождающей неоднородность оператора L .

Случайная функция дифференцируема (один раз), если ее корреляционная функция имеет вторую смешанную частную производную при равных значениях ее аргументов, что для стационарных функций эквивалентно существованию второй производной от $K(\tau)$ при $\tau = 0$.

Нахождение математического ожидания и корреляционной функции результата применения нелинейного оператора к случайной функции, вероятностные свойства которой известны, значительно более сложно. Исключением является только нормальный случайный процесс для некоторых типов нелинейных операторов. Например, если $X(t)$ — нормальная случайная функция (считаем $X(t)$ вещественной), а $Y(t) = X^2(t)$, то

$$\bar{y}(t) = M[X^2(t)] = D[X(t)] + \bar{x}^2(t),$$

$$K_y(t_1, t_2) = M[X^2(t_1)X^2(t_2)] -$$

$$- \{D[X(t_1)] + \bar{x}^2(t_1)\} \{D[X(t_2)] + \bar{x}^2(t_2)\} = 2K_x^2(t_1, t_2),$$

так как математическое ожидание произведения четырех нормальных величин $X(t_1)$, $X(t_1)$, $X(t_2)$ и $X(t_2)$ может быть получено путем дифференцирования характеристической функции системы случайных величин (см. § 23).

Так же могут быть получены математическое ожидание и корреляционная функция существенно нелинейного выражения

$$Y(t) = \operatorname{sgn} X(t),$$

если $X(t)$ нормальна (см. пример 32.2).

Решение типовых примеров

Задачи данного параграфа могут быть решены путем использования общей формулы для корреляционной функции результата применения линейного оператора к случайной функции, однако в некоторых задачах удобнее исходить прямо из определения корреляционной функции. Второй путь является неизбежным, если помимо линейных операторов в данное выражение входят нелинейные операторы. Ниже рассмотрены примеры применения обоих этих способов решения.

Пример 32.1. Определить среднее квадратическое отклонение угла Ψ поворота гироскопа направления после 10 мин. работы гироскопа вследствие наличия случайного момента $M(t)$, возникающего на оси внутреннего карданова кольца, если уравнение, определяющее закон изменения $\Psi(t)$, может быть принято в виде $\dot{\Psi}(t) = \frac{M(t)}{H}$, где кинетический момент

$$H = 21 \cdot 10^5 \frac{\text{г} \cdot \text{см}^2}{\text{сек}^2}, \text{ а}$$

$$K_m(\tau) = n^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta\tau - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right),$$

$$n = 1,36 \cdot 10^4 \frac{\text{г} \cdot \text{см}^2}{\text{сек}^2}, \quad \beta = 0,7 \text{ сек.}^{-1}, \quad \alpha = 0,1 \text{ сек.}^{-1}.$$

Решение. Так как после интегрирования имеем (начальные условия, в соответствии со смыслом задачи, нулевые)

$$\Psi(t) = \frac{1}{H} \int_0^t M(t_1) dt_1, \text{ т. е. } \Psi(t) \text{ связана с } M(t) \text{ линейным}$$

соотношением, то для корреляционной функции $K_\Psi(t_1, t_2)$ получим

$$K_\Psi(t_1, t_2) = \frac{1}{H^2} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} K_m(t'' - t') dt'' dt',$$

а для дисперсии

$$\begin{aligned} D[\Psi(t)] &= \sigma_{\Psi(t)}^2 = \frac{1}{H^2} \int_0^t \int_0^t K_m(t'' - t') dt'' dt' = \\ &= \frac{2}{H^2} \int_0^t (t - \tau) K_m(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Так как

$$e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta\tau - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right) = \\ = \frac{-1}{\alpha^2 + \beta^2} \frac{d^2}{d\tau^2} \left\{ e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right) \right\},$$

то последний интеграл просто может быть вычислен по частям, что дает

$$D[\Psi(t)] = \frac{2n^2}{H^2(\alpha^2 + \beta^2)} \left\{ 1 - e^{-\alpha t} \left(\cos \beta t + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t \right) \right\} \approx \\ \approx \frac{2n^2}{H^2(\alpha^2 + \beta^2)}, \quad \sigma_\Psi = 45'.$$

Пример 32.2. Определить дисперсию угла $\Psi(t)$ поворота гироскопа направления через $T = 10$ мин. работы гироскопа, если угол Ψ определяется уравнением

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{b}{H} \operatorname{sgn} \Theta(t),$$

где Θ — нормальная стационарная случайная функция, имеющая корреляционную функцию

$$K_\Theta(\tau) = \alpha e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right),$$

$\bar{\Theta} = 0$, b и H — постоянные.

Решение. Здесь, помимо линейных операций интегрирования и дифференцирования, в заданное выражение входит нелинейная операция sgn . Поэтому, обозначив временно $\dot{\Theta}(t) = X(t)$, положим $Y(t) = \operatorname{sgn} X(t)$. Пользуясь определением $K_y(\tau)$ как второго центрального смешанного момента случайных величин $Y_1 = \operatorname{sgn} X(t)$ и $Y_2 = \operatorname{sgn} X(t + \tau)$, получим

$$K_y(\tau) = 2 \int_0^\infty \int_0^\infty f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - 2 \int_{-\infty}^0 \int_0^\infty f(x_1, x_2) dx_1 dx_2,$$

где закон распределения $f(x_1, x_2)$ нормальный.

Подставляя значение этого закона распределения и переходя от прямоугольных координат x_1, x_2 к полярным, легко вычисляем оба интеграла и получаем

$$K_y(\tau) = \frac{2}{\pi} \arcsin k_x(\tau).$$

где нормированная корреляционная функция $k_x(\tau)$ определяется формулой

$$k_x(\tau) = k_{\dot{\theta}}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta\tau - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right).$$

Искомая дисперсия

$$\begin{aligned} D[\Psi(t)] &= \frac{2b^2}{H^2} \int_0^t (t-\tau) K_y(\tau) d\tau = \\ &= \frac{4b^2}{\pi H^2} \int_0^t (t-\tau) \arcsin \left[e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta\tau - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right) \right] d\tau. \end{aligned}$$

Задачу можно решить и другим способом. Если воспользоваться формулой $\operatorname{sgn} X = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuX} \frac{du}{u}$ и подставить ее в исходное дифференциальное уравнение, то после интегрирования по времени и нахождения математического ожидания $\Psi^2(t)$ получим

$$D[\Psi(t)] = -\frac{b^2}{4\pi^2 H^2} \int_0^t \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(u_1, u_2) \frac{du_1 du_2}{u_1 u_2} dt_1 dt_2,$$

где $E(u_1, u_2)$ — характеристическая функция системы нормальных величин $X(t_1)$ и $X(t_2)$.

Подставив в последний интеграл выражение для $E(u_1, u_2)$ и проинтегрировав три раза, получим для $D[\Psi(t)]$ то же выражение, что и выше.

Пример 32.3. Определить математическое ожидание и корреляционную функцию случайной функции

$$Y(t) = a(t) X(t) + b(t) \frac{dX(t)}{dt},$$

где $a(t)$ и $b(t)$ — заданные (числовые) функции, $X(t)$ — дифференцируемая случайная функция, а $x(t)$ и $K_x(t_1, t_2)$ известны.

Решение. Функция $Y(t)$ является результатом применения линейного оператора $\left[a(t) + b(t) \frac{d}{dt} \right]$ к случайной функции $X(t)$. Поэтому искомый результат может быть получен

путем применения общих формул. Однако решение проще найти путем непосредственного вычисления $\bar{y}(t)$ и $K_y(t_1, t_2)$. Имеем

$$\begin{aligned}\bar{y}(t) &= \mathbf{M} \left[a(t) X(t) + b(t) \frac{dX(t)}{dt} \right] = a(t) \bar{x}(t) + b(t) \frac{d\bar{x}(t)}{dt}, \\ K_y(t_1, t_2) &= \mathbf{M} \left[\left\{ a^*(t_1) [X^*(t_1) - \bar{x}^*(t_1)] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + b^*(t_1) \left[\frac{dX^*(t_1)}{dt_1} - \frac{d\bar{x}^*(t_1)}{dt_1} \right] \right\} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ a(t_2) [X(t_2) - \bar{x}(t_2)] + b(t_2) \left[\frac{dX(t_2)}{dt_2} - \frac{d\bar{x}(t_2)}{dt_2} \right] \right\} \right] = \\ &= a^*(t_1) a(t_2) K_x(t_1, t_2) + a^*(t_1) b(t_2) \frac{\partial}{\partial t_2} K_x(t_1, t_2) + \\ &\quad + b^*(t_1) a(t_2) \frac{\partial}{\partial t_1} K_x(t_1, t_2) + b^*(t_1) b(t_2) \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} K_x(t_1, t_2).\end{aligned}$$

Задачи

✓ **32.1.** Определить корреляционную функцию производной случайной функции $X(t)$, если

$$K_x(\tau) = a e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau|).$$

† **32.2.** Определить корреляционную функцию и дисперсию случайной функции

$$Y(t) = \frac{dX(t)}{dt},$$

если $K_x(\tau) = a e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right)$.

32.3. Пусть $X(t)$ — стационарная случайная функция, корреляционная функция которой известна. Определить корреляционную функцию связи $X(t)$ и $\frac{dX(t)}{dt}$.

✓ **32.4.** Сколько производных имеет случайная функция $X(t)$, обладающая корреляционной функцией

$$K_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha^2 \tau^2}?$$

32.5. Сколько раз можно дифференцировать случайную функцию $X(t)$, если $K_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(1 + \alpha|\tau| + \frac{1}{3} \alpha^2 \tau^2 \right)$?

32.6. До какого порядка существуют производные случайной функции $X(t)$, если ее корреляционная функция имеет вид

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(1 + \alpha|\tau| - 2\alpha^2\tau^2 + \frac{1}{3}\alpha^3|\tau^3| \right)?$$

32.7. Случайная функция $X(t)$ имеет корреляционную функцию

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau|).$$

Определить корреляционную функцию связи

$$\dot{X}(t + t_0) \text{ и } X(t).$$

32.8. Корреляционная функция случайной функции $X(t)$ имеет вид

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau|).$$

Определить дисперсии функций

$$Y(t) = X(t + \tau) \text{ и } Z(t) = \dot{X}(t + \tau).$$

32.9. Дана корреляционная функция $K_x(\tau)$ стационарной случайной функции $X(t)$:

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha^2\tau^2}.$$

Найти корреляционную функцию

$$Y(t) = a \frac{dX(t)}{dt}.$$

32.10. Определить вероятность P того, что производная V от нормальной стационарной функции $X(t)$ будет иметь значение, большее $b = \sqrt{5}$ м/сек, если

$$K_x(\tau) = a e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right),$$

где $a = 4$ м², $\alpha = 1$ сек.⁻¹, $\beta = 2$ сек.⁻¹.

32.11. Известны математические ожидания, корреляционные функции и корреляционная функция связи двух случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$. Определить математическое ожидание и корреляционную функцию случайной функции

$$Z(t) = X(t) + Y(t).$$

32.12. По известным вероятностным характеристикам системы n случайных функций $X_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) определить математическое ожидание и корреляционную функцию

$$X(t) = \sum_{j=1}^n X_j(t).$$

32.13. Корреляционная функция $K_x(\tau)$ стационарной случайной функции $X(t)$ задана. Определить корреляционную функцию $Y(t)$, если

$$Y(t) = X(t) + \frac{dX(t)}{dt} + \frac{d^2X(t)}{dt^2}.$$

32.14. Случайная функция $X(t)$ имеет корреляционную функцию

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(1 + \alpha|\tau| + \frac{1}{3} \alpha^2 \tau^2\right).$$

Определить корреляционную функцию

$$Z(t) = X'(t) + \frac{d^2X(t)}{dt^2}.$$

32.15. Известна корреляционная функция $K_x(\tau)$ случайной функции $X(t)$. Определить дисперсию

$$Y(t) = \int_0^t X(\xi) d\xi.$$

32.16. Стационарная случайная функция $Y(t)$ связана с другой функцией $X(t)$ соотношением

$$Y(t) = \frac{dX(t)}{dt}.$$

Определить корреляционную функцию $X(t)$, если $X(t) = 0$ при $t = 0$, а $K_y(\tau)$ известна.

32.17. Определить корреляционную функцию связи между

$X(t)$ и $Y(t) = \int_0^t X(\xi) d\xi$, если $K_x(t_1, t_2)$ известна.

32.18. Определить дисперсию $Y(t)$ при $t=20$ сек., если

$$Y(t) = \int_0^t X(t_1) dt_1,$$

$$K_x(\tau) = ae^{-a|\tau|}(1+a|\tau|), \quad a = 10 \frac{cm^2}{сек^2}, \quad a = 0,5 \text{ сек.}^{-1}.$$

32.19. Определить корреляционную функцию и математическое ожидание:

$$Y(t) = a_0 X(t) + a_1 \frac{dX(t)}{dt} + b_1 \int_0^t e^{-\lambda t_1} X(t_1) dt_1 + c,$$

если $\bar{x}(t)$ и $K_x(t_1, t_2)$ известны, а постоянные a_0 , a_1 и b_1 вещественные.

32.20. Определить корреляционную функцию связи $R_{yz}(t_1, t_2)$, если

$$Y(t) = aX(t) + b \frac{dX(t)}{dt},$$

$$Z(t) = c \frac{dX(t)}{dt} + d \frac{d^2X(t)}{dt^2},$$

где a , b , c , d — вещественные постоянные.

32.21. Скорость самолета определяется гироскопическим интегратором, который дает ошибку

$$\Delta V(t) = g \int_0^t \sin \theta(t_1) dt_1,$$

где $\theta(t)$ — ошибка стабилизации оси интегратора, имеющая корреляционную функцию

$$K_\theta(\tau) = 4 \cdot 10^{-8} e^{-0,08|\tau|} \text{ рад}^2 = ae^{-a|\tau|},$$

а g — ускорение силы тяжести. Найти среднюю квадратическую ошибку определения скорости после 10 часов полета (τ дано в сек.).

32.22. Случайная функция Θ является вещественной, нормальной и стационарной, $\bar{\theta} = 0$. Найти корреляционную функцию

$$X(t) = a\ddot{\Theta}(t) + b\dot{\Theta} + c\Theta^2(t),$$

где a , b , c — вещественные постоянные.

32.23. Возмущающий момент, действующий на ротор гироскопического прибора, установленного на корабле, связан с углом крена $\Theta(t)$ и углом дифферента $\Psi(t)$ корабля соотношением

$$M(t) = a\Theta^2(t) + b\Psi^2(t) + c\Theta(t)\Psi(t).$$

Определить корреляционную функцию $M(t)$, если $K_\Theta(\tau)$ и $K_\Psi(\tau)$ известны, $R_{\Theta\Psi}(\tau) \equiv 0$, а $\Theta(t)$ и $\Psi(t)$ нормальны.

32.24. Дано $K_x(\tau) = e^{-a^2\tau^2}$. Определить корреляционную функцию $K_y(\tau)$, если

$$Y(t) = X(t) + \frac{dX(t)}{dt}.$$

32.25. Дано

$$K_x(\tau) = ae^{-a|\tau|} \left(1 + a|\tau| + \frac{1}{3}a^2\tau^2 \right).$$

Определить корреляционную функцию связи между $X(t)$ и $\frac{d^2X(t)}{dt^2}$.

32.26. Дана корреляционная функция $K_x(\tau)$. Определить $K_y(t_1, t_2)$, если $Y(t) = a(t)X(t) + b(t)\frac{d^2X(t)}{dt^2}$, где $a(t)$ и $b(t)$ — числовые (не случайные) функции.

32.27. Дано

$$Y(t) = \int_0^t X(\xi) d\xi.$$

Существует ли отличная от нуля функция $X(\xi)$, при которой $Y(t)$ является стационарной случайной функцией?

32.28. Является ли функция $Z(t) = X(t) + Y$ стационарной в широком смысле слова, если $X(t)$ — стационарная случайная функция, а Y : а) случайная величина, не связанная с $X(t)$; б) $Y = X(t_0)$?

32.29. Определить дисперсию ошибки $Y(t)$ «невозмущаемой» гироскопической системы через час после ее включения, если $Y(t)$ определяется уравнением

$$\frac{d^2Y(t)}{dt^2} + \nu^2Y(t) = X(t).$$

где $\nu = 1,24 \cdot 10^{-3}$ сек.⁻¹ — частота М. Шулера, а $X(t)$ — ошибка акселерометра, которую можно считать стационарной нормальной функцией времени.

$$\bar{x} = 0, \quad K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|},$$

$$\sigma_x = 0,01 \frac{\text{м}}{\text{сек}^2}, \quad \alpha = 0,1 \text{ сек.}^{-1}.$$

32.30. Угловые отклонения α и β свободного гироскопа, используемого в качестве указателя вертикали на качающемся корабле, приближенно определяются системой уравнений

$$I_1 \ddot{\beta} - H \dot{\alpha} = -k_1 \operatorname{sgn}[\dot{\Psi}(t)],$$

$$I_2 \ddot{\alpha} + H \dot{\beta} = k_2 \operatorname{sgn}[\dot{\Theta}(t)],$$

где моменты инерции I_1, I_2 , кинетический момент ротора H и коэффициенты сухого трения k_1 и k_2 — постоянные, а угол крена корабля $\Theta(t)$ и угол дифферента $\Psi(t)$ можно считать стационарными нормальными функциями времени, корреляционные функции которых даны.

Определить $D[\alpha(t)]$ и $D[\beta(t)]$, если t велико.

Указание. Ввести новую функцию $\gamma(t) = \frac{1}{Vq} \alpha(t) + \frac{i}{Vp} \beta(t)$, $q = \frac{H}{I_2}$, $p = \frac{H}{I_1}$, и заменить $\operatorname{sgn}[\dot{\Psi}(t)]$ и $\operatorname{sgn}[\dot{\Theta}(t)]$ интегралами, как в примере 32.2.

32.31. Определить дисперсию функции $Z(t)$, определяемой уравнением $\dot{Z}(t) + a^2[1 + Y(t)]Z(t) = X(t)$, $Z(0) = 0$, где $X(t)$ и $Y(t)$ — независимые стационарные нормальные функции, математические ожидания которых равны нулю, а корреляционные функции даны.

§ 33. Задачи о выбросах

Основные формулы

Выбросом случайной функции $X(t)$ за данный уровень a называется пересечение (снизу вверх) графиком этой функции горизонтальной прямой, отстоящей от оси t на расстоянии a .

Вероятность того, что выброс произойдет в бесконечно малом интервале времени dt , расположенном вблизи точки t , равна $p(a|t)dt$; временная плотность вероятности $p(a|t)$ выражается через дифференциальный закон распределения $f(x, v|t)$ ординаты случайной функции $X(t)$ и ее производной $V(t) = \dot{X}(t)$, вычисленный для момента времени t :

$$p(a|t) = \int_0^{\infty} f(a, v|t) v dv.$$

Временная плотность вероятности пересечения случайной функцией уровня a сверху вниз

$$p_1(a|t) = - \int_{-\infty}^0 f(a, v|t) v dv.$$

Для нормальных функций

$$\begin{aligned} p(a|t) &= \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_v}{\sigma_x} e^{-\frac{(a-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}} = \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(a-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}} \sqrt{\frac{1}{K_x(t, t)} \frac{\partial^2 K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \Big|_{t_1=t_2=t}}. \end{aligned}$$

Для нормальных стационарных функций

$$p(a|t) = p_1(a|t) = p(a) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(a-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}} \frac{\sigma_v}{\sigma_x}.$$

Среднее число выбросов \bar{n}_a стационарной случайной функции за единицу времени равно $p(a)$.

Среднее число выбросов стационарной функции в течение промежутка времени T равно $\bar{N}_a = T p(a)$.

Средняя длительность выброса $\bar{\tau}_a$ стационарной случайной функции

$$\bar{\tau}_a = \frac{\int_0^{\infty} f(x) dx}{p(a)},$$

где $f(x)$ — плотность вероятности ординат случайной функции.

Для стационарного нормального процесса

$$\bar{\tau}_a = \pi \frac{\sigma_x}{\sigma_v} e^{\frac{(a-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}} \left[1 - \Phi\left(\frac{a-\bar{x}}{\sigma_x}\right) \right].$$

Аналогичные формулы для нестационарных процессов:

$$\bar{N}_a = \int_0^T \int_0^\infty v f(a, v | t) dv dt, \quad \bar{\tau}_a = \frac{\int_0^T \int_0^\infty f(x | t) dx dt}{\int_0^T \int_0^\infty v f(a, v | t) dv dt}.$$

К задаче о выбросах сводятся задачи определения среднего числа максимумов случайной функции (выбросы производной за нулевой уровень) и некоторые другие задачи. При малом среднем числе выбросов в течение интервала времени T вероятность Q появления ни одного выброса за этот промежуток времени может быть приближенно оценена по формуле $Q = e^{-\bar{N}_a}$, т. е. число выбросов в данном интервале времени приближенно можно считать подчиняющимся закону Пуассона.

Формулы для среднего числа выбросов и среднего времени выброса обобщаются и на случайные функции нескольких переменных.

Решение типовых примеров

Пример 33.1. Определить, сколько раз в среднем в течение времени $T = 10$ мин. угол крена корабля $\Theta(t)$ на качке будет принимать нулевые значения, если $\bar{\Theta} = 0$,

$$K_\Theta(\tau) = a e^{-0,1|\tau|} \left(\cos 0,7\tau + \frac{1}{7} \sin 0,7|\tau| \right),$$

где τ выражено в секундах, $\Theta(t)$ — нормальная случайная функция.

Решение. Среднее число выбросов за нулевой уровень

$$p(0) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_x}{\sigma_v} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{-\ddot{k}(0)}.$$

Так как

$$\ddot{k}(\tau) = -(0,7^2 + 0,1^2) e^{-0,11\tau} \left(\cos 0,7\tau - \frac{1}{7} \sin 0,7|\tau| \right),$$

то

$$p(0) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{0,50} = 0,1124 \text{ сек.}^{-1},$$

а число выбросов за 10 мин. $\bar{N}_0 = 600 \cdot 0,1124 = 67,5$.
Искомое число равно $2\bar{N}_0 = 135$.

Пример 33.2. Угол крена $\Theta(t)$ и угол дифферента $\Psi(t)$ — несвязанные нормальные случайные функции, корреляционные функции которых заданы формулами

$$K_\Theta(\tau) = 25e^{-0,07|\tau|} (\cos 0,7\tau + 0,1 \sin 0,7|\tau|) \text{ град}^2,$$

$$K_\Psi(\tau) = 12,5e^{-0,02|\tau|} (\cos \sqrt{2}\tau + 10^{-2} \sqrt{2} \sin \sqrt{2}|\tau|) \text{ град}^2,$$

где τ выражено в секундах, а математические ожидания $\bar{\theta}$ и $\bar{\psi}$ равны 0.

Определить среднее время пребывания мачты корабля вне конуса, ось которого вертикальна, а угол, составленный образующей с осью конуса, равен 2° , если отклонение мачты от вертикали v можно определять по приближенной формуле $v = \sqrt{\Theta^2 + \Psi^2}$.

Решение. Отличие от предыдущего примера заключается в том, что исследуемая случайная функция $v(t)$ не является нормальной. Поэтому необходимо применить общую формулу

$$\bar{\tau}_a = \frac{\int_a^\infty f(v) dv}{\int_0^\infty v f(a, v) dv},$$

где $v(t) = \frac{dv(t)}{dt}$.

Для нахождения плотности вероятности $f(v)$ необходимо проинтегрировать плотность вероятности системы нормальных случайных величин $\Theta(t)$, $\Psi(t)$ по области $v \leq \sqrt{\theta^2 + \psi^2} \leq v + dv$, что легко осуществляется, если от прямоугольных координат θ , ψ перейти к полярным $v = \sqrt{\theta^2 + \psi^2}$, $\varphi = \arctg \frac{\psi}{\theta}$.

Выполнив интегрирование, будем иметь

$$f(v) = \frac{v}{\sigma_\theta \sigma_\psi} e^{-\frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sigma_\theta^2} + \frac{1}{\sigma_\psi^2} \right) v^2} I_0 \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sigma_\theta^2} - \frac{1}{\sigma_\psi^2} \right) v^2 \right] = \\ = \frac{v}{12,5 \sqrt{2}} e^{-0,03v^2} I_0(0,01v^2),$$

где $I_0(z)$ — функции Бесселя первого рода от мнимого аргумента. Для получения $f(v, v)$ необходимо проинтегрировать плотность вероятности системы взаимно независимых случайных величин $\Theta(t)$, $\dot{\Theta}(t)$, $\Psi(t)$, $\dot{\Psi}(t)$ по области изменения ее аргументов, для которой выполняются условия

$$v \leq \frac{d}{dt} \sqrt{\theta^2 + \psi^2} \leq v + dv; \quad v \leq \sqrt{\theta^2 + \psi^2} \leq v + dv.$$

Это интегрирование удобнее выполнить, если от θ , $\dot{\theta}$, ψ , $\dot{\psi}$ перейти к переменным интегрирования v , $v = \dot{v}$, φ , $\dot{\varphi}$. Учитывая определитель Остроградского — Якоби преобразования, получим

$$f(v, v) = \frac{v^2}{4\pi^2 \sigma_\theta \sigma_\psi \sigma_{\dot{\theta}} \sigma_{\dot{\psi}}} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\cos^2 \varphi}{\sigma_\theta^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\sigma_\psi^2} \right) v^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(v \cos \varphi - v\dot{\varphi} \sin \varphi)^2}{\sigma_{\dot{\theta}}^2} + \frac{(v \sin \varphi + v\dot{\varphi} \cos \varphi)^2}{\sigma_{\dot{\psi}}^2} \right] \right\} d\dot{\varphi} d\varphi.$$

В условиях задачи $\sigma_{\dot{\theta}}^2 = \sigma_{\dot{\psi}}^2 = 12,5 \text{ град}^2/\text{сек}^2$, поэтому двойной интеграл упрощается и может быть вычислен:

$$f(v, v) = \frac{v}{62,5 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{25} - 0,03v^2} I_0(0,01v^2).$$

$$\text{Тогда } \int_0^{\infty} v f(v, v) dv = \frac{25}{62,5 \sqrt{2\pi}} e^{-0,12} I_0(0,04).$$

Подстановка полученного результата и плотности вероятности $f(v)$ в формулу для $\bar{\tau}_a$ дает

$$\bar{\tau}_a = \frac{\sqrt{\pi} \int_0^{\infty} e^{-0,03v^2} v I_0(0,01v^2) dv}{5e^{-0,12} I_0(0,04)}.$$

Так как в теории функций Бесселя доказывается, что

$$\int_0^{\infty} e^{-bv^2} I_0(cv^2) v dv = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-bx} I_0(cx) dx = \frac{1}{2\sqrt{b^2 - c^2}},$$

то интеграл, стоящий в числителе, можно представить в виде

$$\int_2^{\infty} e^{-0,03v^2} I_0(0,01v^2) v dv = \frac{25}{\sqrt{2}} - \int_0^2 e^{-0,03v^2} I_0(0,01v^2) v dv.$$

В последнем интеграле значение аргумента у функции Бесселя при верхнем пределе весьма мало. Поэтому, пользуясь разложением функции Бесселя в ряд

$$I_0(z) = 1 + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^4 + \dots + \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} + \dots$$

получим

$$\int_0^2 e^{-0,03v^2} \left[1 + \frac{10^{-4}}{4} v^4 + \dots \right] v dv \approx \frac{1}{0,06} (1 - e^{-0,12}),$$

т. е.

$$\bar{\tau}_a \approx \frac{\sqrt{\pi} \left(\frac{25}{\sqrt{2}} - \frac{1}{0,06} 0,1131 \right)}{5e^{-0,12} (1 + 0,0004 + \dots)} = 6,0 \text{ сек.}$$

Пример 33.3. Определить среднее число максимумов нормальной случайной функции $X(t)$, приходящееся на единицу времени, если

$$K_x(\tau) = ae^{-a|\tau|} \left(\cos \beta\tau + \frac{a}{\beta} \sin \beta|\tau| \right), \quad \bar{x} = \text{const.}$$

Решение. Случайная функция $X(t)$ имеет максимум, если ее производная $\dot{X}(t)$ имеет выброс за нулевой уровень (сверху вниз), т. е.

$$\bar{\tau}_a = p_1(a) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\ddot{x}}}{\sigma_{\dot{x}}} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2\pi}.$$

Задачи

33.1. Определить среднюю длительность выброса нормальной случайной функции $X(t)$ за уровень $a = 2$ см, если $\bar{x} = -8$ см, а $K_x(\tau) = 100e^{-0,1|\tau|}(1 + 0,1|\tau|)$ см², где τ выражено в секундах.

33.2. Среднее число выбросов нормальной стационарной случайной функции за уровень $a = \bar{x}$ в одну секунду равно 0,01. Определить дисперсию скорости изменения этой функции, если дисперсия самой функции равна 64 см².

33.3. Корреляционная функция угла крена корабля Θ определяется формулой

$$K_\Theta(\tau) = be^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right).$$

Считая процесс качки нормальным, определить, сколько раз в среднем за 20 мин. хода корабля угол крена будет выходить за пределы $\pm 25^\circ$, если $\bar{\theta} = 0$, $b = 100$ град², $\alpha = 0,1$ сек.⁻¹, $\beta = 0,7$ сек.⁻¹.

33.4. Ошибки на выходе динамической системы нормальны, имеют нулевое математическое ожидание и характеризуются корреляционной функцией

$$K(\tau) = ae^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|),$$

где $a = 5$ квадратным угловым минутам, $\alpha = 1,5$ сек.⁻¹. Определить, на сколько секунд в среднем будет выключаться система, если выключение производится автоматически при получении ошибки, превосходящей по абсолютной величине $3'$.

33.5. Корреляционная функция нормального случайного процесса

$$K_x(t_1, t_2) = \sigma^2 t_1 t_2 e^{-\alpha|t_2 - t_1|} (1 + \alpha|t_2 - t_1|).$$

Определить значение времени t , начиная с которого среднее число выбросов за уровень $a = \bar{x}$ в единицу времени станет меньше заданного числа p_0 ($p_0 > \frac{\alpha}{2\pi}$).

33.6. Для устранения вредного воздействия, оказываемого внешним случайным возмущением, характеризуемым нормальной случайной функцией $X(t)$, необходимо затратить мощность $W(t)$, пропорциональную $\dot{X}^2(t)$:

$$W(t) = k\dot{X}^2(t).$$

Определить, сколько раз в среднем в единицу времени мощности двигателя будет не хватать для устранения возмущения, если максимально возможная его мощность равна ω_0 , $\bar{x} = 0$,

$$K_x(\tau) = ae^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right),$$

а k , ω_0 , a , α , β — известные постоянные.

33.7. На самолете установлен прибор (акселерометр), измеряющий ускорения, нормальные к оси фюзеляжа в плоскости крыла. Программа, заданная автопилоту самолета, — горизонтальный прямолинейный полет с постоянной скоростью. Вследствие ошибок управления угол $\Psi(t)$, составленный направлением вектора скорости самолета с неизменной вертикальной плоскостью, становится случайным. Определить, сколько раз в среднем в единицу времени чувствительный элемент акселерометра будет доходить до упора, если это имеет место в том случае, когда мгновенный радиус кривизны траектории самолета в горизонтальной плоскости становится равным минимально допустимому радиусу циркуляции R_0 . Скорость самолета v можно считать постоянной, а

$$K_\psi(t_2 - t_1) = ae^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right),$$

где $\tau = t_2 - t_1$.

33.8. Высота $H(t)$ полета самолета, управляемого автопилотом, является случайной функцией, математическое ожидание которой \bar{h} равно заданной высоте полета, а корреляционная функция

$$K_h(\tau) = ae^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right).$$

Считая высоту $H(t)$ нормальной, определить, какую наименьшую высоту \bar{h} можно установить в системе приборов автономного полета, чтобы за время полета T вероятность аварии самолета вследствие столкновения с поверхностью Земли была меньше $\delta = 0,01\%$, если $a = 400 \text{ м}^2$, $\alpha = 0,01 \text{ сек.}^{-1}$, $\beta = 0,1 \text{ сек.}^{-1}$, $T = 5 \text{ час.}$

33.9. Радиолиния управления может обеспечить передачу команды без искажения в том случае, если помеха $X(t)$, поступающая на вход приемника, в течение передачи по абсолютной величине ни разу не превзойдет некоторого уровня a .

Определить вероятность Q передачи команды без искажения, если

$$\bar{x} = 0, \quad K_x(\tau) = be^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|),$$

а время передачи команды T .

33.10. Определить закон распределения ординат нормальной случайной функции $X(t)$ в точках ее максимумов, если

$$\bar{x} = 0, \quad K_x(\tau) = ae^{-\alpha^2\tau^2}.$$

33.11. Дан нормальный случайный процесс $X(t)$. Найти закон распределения ординат его минимумов, если

$$K_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(1 + \alpha|\tau| + \frac{1}{3} \alpha^2 \tau^2 \right).$$

33.12. Определить среднее число точек перегиба нормальной случайной функции $X(t)$, приходящееся на время T , если

$$K_x(\tau) = ae^{-\alpha^2\tau^2}.$$

33.13. Определить среднее число максимумов \bar{n} нормальной случайной функции двух переменных $\zeta(x, y)$, приходящееся на единицу площади, если ее двумерная корреляционная функция является функцией двух переменных

$$K_\zeta(\xi, \eta) = M \{ [\zeta^*(x, y) - \bar{\zeta}] [\zeta(x + \xi, y + \eta) - \bar{\zeta}] \},$$

а двумерная спектральная плотность

$$S_\zeta(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega_1\xi + \omega_2\eta)} K_\zeta(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

известна.

33.14. В условиях предыдущей задачи определить среднее число точек \bar{n} , приходящееся на единицу площади, в которых обе первые частные производные $\frac{\partial \zeta(x, y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial \zeta(x, y)}{\partial y}$ меняют знак с «+» на «-».

§ 34. Спектральное разложение стационарных случайных функций

Основные формулы

Для всякой стационарной функции $X(t)$ справедливо разложение

$$X(t) - \bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\Phi(\omega),$$

где в том случае, когда

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K_x(\tau)| d\tau < \infty,$$

приращения $d\Phi(\omega)$ удовлетворяют соотношениям

$$\mathbf{M}[d\Phi(\omega)] = 0, \quad \mathbf{M}[d\Phi^*(\omega) d\Phi(\omega_1)] = S_x(\omega) \delta(\omega - \omega_1) d\omega d\omega_1.$$

Здесь $S_x(\omega)$ — спектральная плотность случайной функции $X(t)$, $\delta(x)$ — обозначение дельта-функции (см. введение к § 11).

Корреляционная функция и спектральная плотность связаны взаимно обратными преобразованиями Фурье

$$K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_x(\omega) d\omega, \quad S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} K_x(\tau) d\tau,$$

являющимися следствием спектрального разложения $X(t)$. При $\tau = 0$ первая из приведенных формул дает

$$K_x(0) = \mathbf{D}[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega.$$

Спектральная плотность не может иметь отрицательных ординат; для вещественных функций

$$S_x(\omega) = S_x(-\omega).$$

Случайные функции, обладающие конечной дисперсией, имеют спектральные плотности, обращающиеся на бесконечности в нуль быстрее, чем $\frac{1}{\omega}$.

Спектральная плотность производной $\dot{X}(t)$ связана с $S_x(\omega)$ формулой

$$S_{\dot{x}}(\omega) = \omega^2 S_x(\omega).$$

Необходимым и достаточным условием дифференцируемости (один раз) случайной функции является условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_x(\omega) d\omega < \infty,$$

для выполнения которого нужно, чтобы $S_x(\omega)$ при росте ω стремилась к нулю быстрее, чем $\frac{1}{\omega^3}$.

Если случайные функции стационарны и стационарно связаны, то между корреляционной функцией связи $R_{xy}(\tau)$ и взаимной спектральной плотностью $S_{xy}(\omega)$ имеют место соотношения

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_{xy}(\omega) d\omega,$$

$$S_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} R_{xy}(\tau) d\tau.$$

Из определений $R_{xy}(\tau)$ и $S_{xy}(\omega)$ следует, что

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}^*(-\tau), \quad S_{xy}(\omega) = S_{yx}^*(\omega).$$

Спектральная плотность произведения двух нормальных (вещественных) стационарных случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$:

$$Z(t) = X(t)Y(t),$$

выражается через $S_x(\omega)$, $S_y(\omega)$ и $S_{xy}(\omega)$ по формуле

$$S_z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega - \omega_1) S_y(\omega_1) d\omega_1 + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega - \omega_1) S_{yx}(\omega_1) d\omega_1 + \bar{x}^2 S_y(\omega) + \bar{y}^2 S_x(\omega).$$

В частном случае, когда

$$Y(t) \equiv X(t), \quad S_y(\omega) = S_{xy}(\omega) = S_x(\omega), \quad \text{имеем } Z(t) = X^2(t)$$

и

$$S_z(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega - \omega_1) S_x(\omega_1) d\omega_1 + 2\bar{x}^2 S_x(\omega).$$

Тот же результат можно получить, если воспользоваться формулой, справедливой для любых двух нормальных (стационарных) функций:

$$R_{xy}(\tau) = K_x(\tau) K_y(\tau) + R_{xy}(\tau) R_{yx}(\tau) + \bar{x}^2 K_y(\tau) + \bar{y}^2 K_x(\tau),$$

а затем преобразовать $R_{xy}(\tau)$ с помощью преобразования Фурье.

Решение типовых примеров

Для решения задач 34.1—34.10 необходимо непосредственное применение преобразования Фурье. При вычислении корреляционной функции, когда спектральная плотность является отношением полиномов ω , обычно наиболее просто результат может быть получен с помощью вычетов. При нахождении спектральной плотности по заданной корреляционной функции, когда в ее выражение входит модуль аргумента, бесконечную область интегрирования нужно разбить на области $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$. В остальных задачах необходимо найти корреляционную функцию или спектральную плотность, пользуясь их определением, а в некоторых задачах и свойствами нормальных величин.

Пример 34.1. Определить корреляционную функцию, если

$$S(\omega) = \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{\omega^2 + \lambda_j^2}.$$

Решение. Пользуясь преобразованием Фурье, имеем

$$K(\tau) = \sum_{j=1}^n a_j \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \frac{d\omega}{\omega^2 + \lambda_j^2}.$$

При $\tau > 0$ $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \frac{d\omega}{\omega^2 + \lambda_j^2}$ равняется интегралу от функции комплексного переменного ω , взятому по контуру, со-

ставленному из вещественной оси, замкнутой полуокружностью бесконечного радиуса, расположенной в верхней полуплоскости. Поэтому его значение равно вычету относительно единственного полюса $\omega = i\lambda_j$ (считаем $\operatorname{Re} \lambda_j > 0$), расположенного внутри контура, умноженному на $2\pi i$, т. е. $\frac{\pi}{\lambda_j} e^{-\lambda_j \tau}$, а

$$K(\tau) = \pi \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{\lambda_j} e^{-\lambda_j \tau}.$$

Аналогичным образом при $\tau < 0$, замыкая вещественную ось через нижнюю полуплоскость, получим $K(\tau) = \pi \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{\lambda_j} e^{\lambda_j \tau}$, т. е. при любом знаке τ

$$K(\tau) = \pi \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{\lambda_j} e^{-\lambda_j |\tau|}.$$

Пример 34.2. Определить спектральную плотность, если

$$K(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha |\tau|} \left(1 + \alpha |\tau| + \frac{1}{3} \alpha^2 \tau^2 \right).$$

Решение. Обозначив

$$J(\alpha, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega \tau} \sigma^2 e^{-\alpha |\tau|} d\tau,$$

замечаем, что

$$S(\omega) = J - \alpha \frac{\partial J}{\partial \alpha} + \frac{\alpha^2}{3} \frac{\partial^2 J}{\partial \alpha^2}.$$

Так как

$$J(\alpha, \omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^0 e^{(\alpha - i\omega)\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{(-\alpha - i\omega)\tau} d\tau \right\} = \frac{\alpha \sigma^2}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)},$$

то после дифференцирования по α и простых преобразований получим

$$S(\omega) = \frac{8\sigma^2 \alpha^5}{3\pi(\omega^2 + \alpha^2)^3}.$$

Пример 34.3. Определить спектральную плотность

$$Z(t) = X(t) \dot{X}(t),$$

если $X(t)$ — нормальная случайная функция, а

$$K_x(\tau) = ae^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right), \quad \bar{x} = 0.$$

Решение. Так как $Z(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} X^2(t)$, то

$$\begin{aligned} S_z(\omega) &= \frac{1}{2} \omega^2 S_{X^2}(\omega) = \omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega - \omega_1) S_x(\omega_1) d\omega_1 = \\ &= \frac{2a\alpha(\alpha^2 + \beta^2)}{\pi} \frac{\omega^2(\omega^2 + 20\alpha^2 + 4\beta^2)}{[(\omega^2 + 4\alpha^2 + 4\beta^2)^2 - 16\beta^2\omega^2](\omega^2 + 4\alpha^2)}. \end{aligned}$$

Задачи

34.1. Дана спектральная плотность

$$S(\omega) = \begin{cases} a, & \text{если } -b \leq \omega \leq b, \\ 0, & \text{если } b < |\omega|. \end{cases}$$

Определить корреляционную функцию $K(\tau)$.

34.2. Дана спектральная плотность

$$S(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{если } |\omega| < \omega_0, \\ c^2, & \text{если } \omega_0 \leq |\omega| \leq 2\omega_0, \\ 0, & \text{если } 2\omega_0 < |\omega|. \end{cases}$$

Определить корреляционную функцию $K(\tau)$.

34.3. Определить спектральную плотность $S(\omega)$, если

$$K(\tau) = ae^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|).$$

34.4. Определить спектральную плотность $S(\omega)$, если

$$K(\tau) = \begin{cases} \sigma^2(1 - |\tau|) & \text{при } |\tau| \leq 1, \\ 0 & \text{при } |\tau| > 1. \end{cases}$$

34.5. Определить спектральную плотность $S(\omega)$, если

$$K(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau.$$

34.6. Определить спектральную плотность $S(\omega)$, если

$$K(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right).$$

34.7. Определить спектральную плотность $S(\omega)$, если

$$K(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(1 + \alpha|\tau| - 2\alpha^2\tau^2 + \frac{1}{3}\alpha^3|\tau|^3 \right).$$

34.8. Определить спектральную плотность $S(\omega)$, если

$$K(\tau) = a e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta\tau - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right).$$

34.9. По виду спектральной плотности случайной функции $X(t)$ определить, сколько производных имеет эта функция, если

$$K_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(1 + \alpha|\tau| + \frac{1}{3}\alpha^2\tau^2 \right).$$

34.10. Определить спектральную плотность $S(\omega)$, если

$$K(\tau) = \sum_{j=1}^n a_j e^{-\alpha_j|\tau|}, \quad \operatorname{Re} \alpha_j > 0.$$

34.11. Определить, для каких значений отношения $\frac{\alpha}{\beta}$ спектральная плотность

$$S(\omega) = \frac{\alpha\sigma^2}{\pi} \frac{\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2}{(\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\beta^2\omega^2}$$

имеет максимум при $\omega = 0$.

34.12. Определить дисперсию производной случайной функции $X(t)$, если

$$S_x(\omega) = \frac{a^2}{(\omega^2 + \alpha^2)^2}.$$

34.13. Определить взаимные спектральные плотности $S_{xx}(\omega)$ и $S_{\dot{x}\dot{x}}(\omega)$, если

$$K_x(\tau) = a e^{-a^2\tau^2}.$$

34.14. Команда $\Delta(t)$, поступающая на органы управления автоматически управляемого объекта, определяется по формуле

$$\Delta(t) = k_1 U(t) + k_2 \dot{U}(t).$$

Найти $S_{\Delta}(\omega)$, если

$$K_u(\tau) = ae^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|).$$

34.15. Динамическая система (упредитель) используется для получения значения входной случайной функции $X(t)$ в момент времени $t + \tau_0$, где τ_0 — время упреждения. Определить взаимную спектральную плотность между $X(t)$ и $Y(t) = X(t + \tau_0)$, если $K_x(\tau)$ дана.

34.16. На вход динамической системы поступает случайная функция $X(t)$, являющаяся суммой полезного сигнала $U(t)$ и помехи $V(t)$:

$$X(t) = U(t) + V(t).$$

Задачей динамической системы является воспроизведение функции

$$Y(t) = \frac{d^k}{dt^k} U(t + \tau_0).$$

Определить взаимную спектральную плотность $S_{xy}(\omega)$, если $S_v(\omega)$, $S_u(\omega)$ и $S_{uv}(\omega)$ заданы.

34.17. Определить спектральную плотность $S_z(\omega)$, если $Z(t) = \dot{X}(t)\dot{Y}(t)$, а $X(t)$ и $Y(t)$ — независимые случайные функции, корреляционные функции которых заданы:

$$K_x(\tau) = a_1 e^{-\alpha_1|\tau|} \left(\cos \beta_1 \tau + \frac{\alpha_1}{\beta_1} \sin \beta_1 |\tau| \right),$$

$$K_y(\tau) = a_2 e^{-\alpha_2|\tau|} \left(\cos \beta_2 \tau + \frac{\alpha_2}{\beta_2} \sin \beta_2 |\tau| \right).$$

34.18. Определить спектральную плотность $S_z(\omega)$, если

$$Z(t) = X(t)Y(t),$$

где $X(t)$ и $Y(t)$ — независимые случайные функции, $K_x(\tau) = a_1 e^{-\alpha_1|\tau|}$, $K_y(\tau) = a_2 e^{-\alpha_2|\tau|}$, а \bar{x} и \bar{y} даны.

34.19. «Карданова ошибка» $\Delta(t)$, возникающая при использовании карданова подвеса в некоторых стабилизационных корабельных устройствах, связана с углами крена $\Theta(t)$ и дифферента $\Psi(t)$ корабля соотношением

$$\Delta(t) = \Theta(t)\Psi(t).$$

Считая $\Theta(t)$ и $\Psi(t)$ независимыми случайными функциями, определить корреляционную функцию, дисперсию и

спектральную плотность ошибки $\Delta(t)$, если $\bar{\theta} = \bar{\psi} = 0$,

$$K_{\theta}(\tau) = a_1 e^{-\alpha_1 |\tau|} \left(\cos \beta_1 \tau + \frac{\alpha_1}{\beta_1} \sin \beta_1 |\tau| \right),$$

$$K_{\psi}(\tau) = a_2 e^{-\alpha_2 |\tau|} \left(\cos \beta_2 \tau + \frac{\alpha_2}{\beta_2} \sin \beta_2 |\tau| \right).$$

34.20. Определить спектральную плотность $S_y(\omega)$, если $Y(t) = \dot{X}^2(t)$, где $X(t)$ — нормальная стационарная случайная функция, а

$$K_x(\tau) = a e^{-\alpha |\tau|} \left(\cos \beta \tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta |\tau| \right).$$

34.21. Определить спектральную плотность $S_y(\omega)$, если

$$Y(t) = X^2(t),$$

где $X(t)$ — нормальная случайная функция, \bar{x} известно, а

$$K_x(\tau) = a e^{-\alpha |\tau|}.$$

34.22. Определить спектральную плотность $S_y(\omega)$, если

$$Y(t) = X(t) \frac{dX(t)}{dt},$$

где $X(t)$ — нормальная случайная функция.

$$S_x(\omega) = a e^{-\frac{\omega^2}{2\alpha^2}},$$

а \bar{x} дано.

34.23. Поправка $\Delta(t)$ на качку корабля, поступающая в угол горизонтального наведения навигационной радиолокационной станции, определяется формулой

$$\Delta(t) = -\Phi(t) + \Psi(t) \Theta(t) \cos^2 q - \frac{1}{4} [\Theta^2(t) - \Psi^2(t)] \sin 2q.$$

Определить $S_{\Delta}(\omega)$, если q можно считать постоянным, а угол рыскания $\Phi(t)$, угол дифферента $\Psi(t)$ и угол крена $\Theta(t)$ — несвязанные нормальные случайные функции, корреляционные функции которых заданы:

$$K_{\Phi}(\tau) = a_1 e^{-\alpha_1 |\tau|} \left(\cos \beta_1 \tau + \frac{\alpha_1}{\beta_1} \sin \beta_1 |\tau| \right),$$

$$K_{\Psi}(\tau) = a_2 e^{-\alpha_2 |\tau|} \left(\cos \beta_2 \tau + \frac{\alpha_2}{\beta_2} \sin \beta_2 |\tau| \right),$$

$$K_{\Theta}(\tau) = a_3 e^{-\alpha_3 |\tau|} \left(\cos \beta_3 \tau + \frac{\alpha_3}{\beta_3} \sin \beta_3 |\tau| \right), \quad \bar{\Phi} = \bar{\Theta} = \bar{\Psi} = 0.$$

34.24. Нормальная случайная функция $X(t)$ имеет корреляционную функцию $K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}$ и математическое ожидание \bar{x} . Найти максимум спектральной плотности $S_y(\omega)$, если $Y(t) = X^2(t)$.

34.25. Два одинаковых диска, оси вращения которых совпадают, вращаются с различными (несоизмеримыми) угловыми скоростями Ω_1 и Ω_2 (рис. 34). В дисках проделаны отверстия, ограниченные радиусами с центральным углом γ и окружностями с радиусами $r - \frac{1}{2}\Delta$ и $r + \frac{1}{2}\Delta$. Центры отверстий выбраны на окружности в соответствии с равномерным законом распределения.

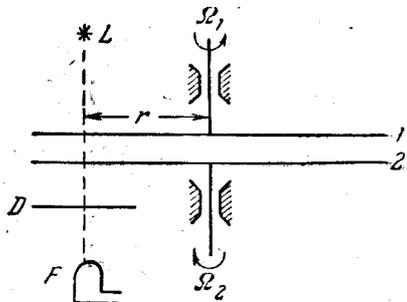


Рис. 34.

С одной стороны дисков расположен точечный источник света L , с другой — фотоэлемент F , перед которым расположена диафрагма D ; просвет в диафрагме имеет форму сектора с углом Γ при вершине, ограниченного окружностями радиусов $r - \frac{1}{2}\Delta$ и $r + \frac{1}{2}\Delta$. Сила фототока J пропорциональна сумме площадей просветов всех отверстий, попадающих в просвет диафрагмы. Определить спектральную плотность силы тока $S_j(\omega)$, если число отверстий в обоих дисках одинаково и равно n , а для любого отверстия 1-го диска независимо от положения других отверстий можно считать равновероятным, что оно окажется против отверстия 2-го диска на любом угловом расстоянии от оптической оси системы источник света — фотоэлемент¹⁾. (Случаями, когда размер просвета уменьшается диафрагмой, пренебречь.)

¹⁾ Прибор такого типа предложен В. С. Гительсоном.

§ 35. Вычисление вероятностных характеристик случайных функций на выходе динамических систем

Основные формулы

Для любого линейного дифференциального уравнения

$$\frac{d^n Y(t)}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} Y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_n(t) Y(t) = X(t)$$

общее решение может быть представлено в виде

$$Y(t) = \sum_{j=1}^n C_j y_j(t) + Y_I(t),$$

где $y_j(t)$ — система независимых частных интегралов однородного уравнения; C_j — постоянные, определяемые начальными условиями и являющиеся, вообще говоря, случайными величинами; $Y_I(t)$ — частный интеграл неоднородного уравнения, удовлетворяющий нулевым начальным условиям и определяемый равенством

$$Y_I(t) = \int_0^t p(t, t_1) X(t_1) dt_1,$$

где $p(t, t_1)$ — весовая функция системы (импульсная переходная функция), определяемая частными интегралами $y_j(t)$ по формуле

$$p(t, t_1) = \begin{vmatrix} y_1(t_1) & \dots & y_n(t_1) \\ y_1'(t_1) & \dots & y_n'(t_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(t_1) & \dots & y_n^{(n-2)}(t_1) \\ y_1(t) & \dots & y_n(t) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1(t_1) & \dots & y_n(t_1) \\ y_1'(t_1) & \dots & y_n'(t_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(t_1) & \dots & y_n^{(n-2)}(t_1) \\ y_1^{(n-1)}(t_1) & \dots & y_n^{(n-1)}(t_1) \end{vmatrix}^{-1}.$$

В том случае, когда коэффициенты уравнения постоянные, весовая функция зависит только от разности аргументов

$$p(t, t_1) = p(t_1 - t).$$

Если система устойчива, $a_j(t) = \text{const}$, а $X(t)$ стационарна, то при достаточно большом t (сравнительно с временем переходного процесса) функцию $Y(t)$ можно считать таковой

стационарной. В этом случае

$$\bar{y} = \frac{1}{a_n} \bar{x},$$

$$S_y(\omega) = \frac{S_x(\omega)}{|(i\omega)^n + a_1(i\omega)^{n-1} + \dots + a_n|^2},$$

а $K_y(\tau)$ может быть найдена путем обращения $S_y(\omega)$ по Фурье.

В том случае, когда $X(t)$ связана со стационарной случайной функцией $Z(t)$ формулой

$$X(t) = b_0 \frac{d^m Z(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} Z(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_m Z(t),$$

имеем

$$S_y(\omega) = \frac{|b_0(i\omega)^m + b_1(i\omega)^{m-1} + \dots + b_m|^2}{|(i\omega)^n + a_1(i\omega)^{n-1} + \dots + a_n|^2} S_z(\omega),$$

причем последняя формула остается справедливой и в том случае, если $Z(t)$ не имеет производной m -го порядка, но выражение для $S_y(\omega)$ при росте ω убывает быстрее, чем $\frac{1}{\omega}$.

Если время t , прошедшее после начала работы системы, невелико, функция $X(t)$ нестационарна или коэффициенты уравнения зависят от времени, то для нахождения вероятностных характеристик решения уравнения необходимо воспользоваться общими формулами для линейных операторов, применяя которые, находим (считаем для простоты постоянные C_j не связанными с $X(t)$):

$$\bar{y}(t) = \sum_{j=1}^n y_j(t) \bar{c}_j + \int_0^t p(t, t_1) \bar{x}(t_1) dt_1,$$

$K_y(t_1, t_2) =$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n y_j^*(t_1) y_l(t_2) k_{jl} + \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} p^*(t_1, \xi) p(t_2, \eta) K_x(\xi, \eta) d\eta d\xi,$$

где $\|k_{jl}\|$ — корреляционная матрица системы случайных величин C_j .

Для уравнения с постоянными коэффициентами в последних формулах вместо $p(t_1, t_2)$ нужно подставить $p(t_2 - t_1)$.

Если $X(t)$ — стационарная функция, то

$$Y_1(t) = \int_0^t p(t, t_1) \bar{x} dt_1 + \int_{-\infty}^{\infty} y(\omega, t) d\Phi(\omega),$$

где $y(\omega, t)$ — взятый при нулевых начальных условиях частный интеграл уравнения, в котором $X(t)$ заменена на $e^{i\omega t}$.

В этом случае

$$K_{y_1}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} y^*(\omega, t_1) y(\omega, t_2) S_x(\omega) d\omega.$$

Аналогичная формула имеет место и тогда, когда $X(t)$ нестационарна, но может быть получена путем умножения стационарной функции на заданную (не случайную) функцию времени, например:

$$X(t) = b(t) X_1(t),$$

где $X_1(t)$ стационарна. В этом случае под $y(\omega, t)$ нужно понимать частный интеграл уравнения, в котором правая часть заменена на $b(t) e^{i\omega t}$, т. е. по-прежнему стационарная функция заменена на $e^{i\omega t}$.

Если задана система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, соответствующая устойчивой динамической системе,

$$\frac{dY_j(t)}{dt} + \sum_{i=1}^n a_{ji} Y_i(t) = X_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

где a_{ji} — постоянные, $X_j(t)$ — стационарные случайные функции, а время t достаточно велико, то ее решения являются стационарными случайными функциями, спектральные плотности и взаимные спектральные плотности которых могут быть выражены через спектральные плотности и взаимные спектральные плотности правых частей уравнений:

$$S_{y_j}(\omega) = \frac{\sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n A_{lj}^* A_{mj} S_{x_l x_m}(\omega)}{|\Delta(\omega)|^2},$$

$$S_{y_j y_k}(\omega) = \frac{\sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n A_{lj}^* A_{mk}(\omega) S_{x_l x_m}(\omega)}{|\Delta(\omega)|^2}.$$

Здесь $\Delta(\omega)$ — определитель, составленный из коэффициентов левых частей уравнений:

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} a_{11} + i\omega & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} + i\omega & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} + i\omega \end{vmatrix},$$

$A_{ij}(\omega)$ — алгебраическое дополнение элемента этого определителя, стоящего на пересечении i -й строки и j -го столбца, а $S_{x_j x_j}(\omega) \equiv S_{x_j}(\omega)$.

Закон распределения решения линейного уравнения (системы линейных уравнений), в правую часть которого входят нормальные случайные функции и нормальные случайные величины, также нормален. Если уравнение линейное, но закон распределения случайных функций, входящих в правую часть равенства, не нормален, то закон распределения решения также не будет нормальным. Математическое ожидание \bar{y} и центральные моменты μ_j этого закона распределения для любого t определяются формулами

$$\bar{y} = \int_0^t p(t, t_1) \bar{x}(t_1) dt_1,$$

$$\mu_2 = \int_0^t \int_0^t p(t, t_1) p(t, t_2) K_x(t_1, t_2) dt_1 dt_2,$$

$$\mu_3 = \int_0^t \int_0^t \int_0^t p(t, t_1) p(t, t_2) p(t, t_3) K_x(t_1, t_2, t_3) dt_1 dt_2 dt_3,$$

где $X(t)$ — случайная функция, стоящая в правой части уравнения, а

$$K_x(t_1, t_2, \dots, t_j) = M \left\{ \prod_{i=1}^j [X(t_i) - \bar{x}(t_i)] \right\}.$$

Решение типовых примеров

Пример 35.1. Ошибка $\varepsilon(t)$ измерения ускорения самолета акселерометром определяется уравнением

$$\ddot{\varepsilon}(t) + 2h\dot{\varepsilon}(t) + n^2\varepsilon(t) = gn^2\gamma(t).$$

где $\gamma(t)$ — случайная функция, характеризующая случайные возмущения, испытываемые чувствительным элементом акселерометра, а $S_\gamma(\omega) = c^2 \approx \text{const}$.

Найти дисперсию скорости самолета, определяемой путем интегрирования показаний акселерометра в течение времени T , если при интегрировании не возникает добавочных ошибок, а время переходного процесса много меньше T .

Решение. Согласно условию ошибку $\varepsilon(t)$ можно считать стационарной случайной функцией времени, поэтому

$$S_\varepsilon(\omega) = \frac{g^2 n^4 c^2}{|(n^2 - \omega^2) + 2i h \omega|^2} = \frac{g^2 n^4 c^2}{(\omega^2 - n^2)^2 + 4h^2 \omega^2}.$$

Ошибка скорости $\delta v = \int_0^t \varepsilon(t_1) dt_1$ уже не будет стационарной, и ее дисперсия определится формулой $D[\delta v(t)] = \int_0^T \int_0^T K_\varepsilon(t_2 - t_1) dt_1 dt_2$. Переходя к новым переменным интегрирования $\tau = t_2 - t_1$, $\xi = t_2 + t_1$ и вычисляя интеграл по ξ , получим

$$\begin{aligned} D[\delta v(t)] &= 2 \int_0^T (T - \tau) K_\varepsilon(\tau) d\tau \approx 2T \int_0^\infty K_\varepsilon(\tau) d\tau = \\ &= 2\pi T S_\varepsilon(0) = 2\pi g^2 c^2 T. \end{aligned}$$

Подобным же образом решаются все задачи, в которых искомая случайная функция является стационарным решением линейного уравнения с постоянными коэффициентами или результатом применения линейного оператора к стационарному решению.

Пример 35.2. Определить для момента времени t дисперсию частного интеграла $Y_I(t)$ уравнения $\frac{dY(t)}{dt} + aY(t) = X(t)$, удовлетворяющего нулевым начальным условиям, если

$$S_x(\omega) = \frac{\sigma_x^2}{\pi} \frac{\alpha}{\omega^2 + \alpha^2}.$$

Решение. В данном случае $Y(t)$ не обладает свойством стационарности, поскольку в правой части уравнения стоит нестационарная функция времени.

Имеем

$$Y_I(t) = \int_0^t e^{-a(t-t_1)} Z(t_1) dt_1,$$

где

$$Z(t) = tX(t).$$

Так как

$$K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_x(\omega) d\omega = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|},$$

то

$$K_z(t_1, t_2) = \sigma_x^2 t_1 t_2 e^{-\alpha|t_2 - t_1|},$$

а

$$D[Y_I(t)] = K_{y_I}(t, t) = \int_0^t \int_0^t K_z(t_1, t_2) e^{-a(2t-t_1-t_2)} dt_1 dt_2,$$

что после выполнения интегрирования дает

$$D[Y_I(t)] = 2\sigma_x^2 \left\{ \frac{t^2}{2a(a+\alpha)} - \frac{t(2a+\alpha)}{2a^2(a+\alpha)^2} + \frac{2a+\alpha}{4a^3(a+\alpha)^2} + \right. \\ \left. + \frac{t(a-\alpha)-1}{(a^2-\alpha^2)^2} e^{-(a+\alpha)t} + \frac{4a^3-(2a+\alpha)(a-\alpha)^2}{4a^3(a^2-\alpha^2)} e^{-2at} \right\}$$

Пример 35.3. Найти спектральные плотности и взаимную спектральную плотность стационарных решений системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 Y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dY(t)}{dt} + 4Y(t) + Z(t) &= X_1(t), \\ \frac{dZ(t)}{dt} + 9Z(t) &= X_2(t), \end{aligned} \right\}$$

если

$$S_{x_1}(\omega) = \frac{\sigma_1^2}{\pi(\omega^2 + 1)}, \quad S_{x_2}(\omega) = \frac{2\sigma_2^2}{\pi(\omega^2 + 4)},$$

$$S_{x_1 x_2}(\omega) = \frac{a}{(\omega^2 - 2)^2 + i\omega}.$$

Решение. Заменяя в левых частях уравнений операцию дифференцирования на $i\omega$, для определителя системы алгебраических уравнений получим

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} -\omega^2 + 2i\omega + 4 & 1 \\ 0 & i\omega + 9 \end{vmatrix} = [(4 - \omega^2) + 2i\omega](i\omega + 9).$$

Алгебраические дополнения элементов этого определителя:

$$A_{11} = i\omega + 9, \quad A_{12} = 0, \quad A_{21} = -1, \\ A_{22} = (4 - \omega^2) + 2i\omega.$$

Следовательно, по общей формуле получим:

$$S_y(\omega) = \frac{|A_{11}|^2 S_{x_1}(\omega) + |A_{21}|^2 S_{x_2}(\omega) + A_{11}^* A_{21} S_{x_1 x_2}(\omega) + A_{21}^* A_{11} S_{x_2 x_1}(\omega)}{|\Delta(\omega)|^2} = \\ = \frac{1}{(\omega^2 + 81)[(\omega^2 - 4)^2 + 4\omega^2]} \left\{ \frac{\sigma_1^2(\omega^2 + 81)}{\pi(\omega^2 + 1)} + \right. \\ \left. + \frac{2\sigma_2^2}{\pi(\omega^2 + 4)} - \frac{2a[\omega^2 - 9(\omega^2 - 2)^2]}{(\omega^2 - 2)^4 + \omega^2} \right\}.$$

$$S_{yz}(\omega) = \frac{A_{11}^* A_{12} S_{x_1}(\omega) + A_{11}^* A_{22} S_{x_1 x_2}(\omega) + A_{21}^* A_{12} S_{x_2 x_1}(\omega) + A_{21}^* A_{22} S_{x_2}(\omega)}{|\Delta(\omega)|^2} = \\ = \frac{1}{[(\omega^2 - 4) + 2i\omega](\omega^2 + 81)} \left\{ \frac{a(i\omega - 9)}{(\omega^2 - 2)^2 + i\omega} + \frac{2\sigma_2^2}{\pi(\omega^2 + 4)} \right\}, \\ S_z(\omega) = \frac{S_{x_2}(\omega)}{|i\omega + 9|^2} = \frac{2\sigma_2^2}{\pi(\omega^2 + 4)(\omega^2 + 81)}.$$

Задачи

35.1. На вход динамической системы первого порядка, описываемой уравнением

$$\frac{dY(t)}{dt} + aY(t) = X(t), \quad a > 0,$$

поступает случайная функция $X(t)$, спектральная плотность которой в полосе частот $|\omega| \leq \omega_0$, где $\omega_0 \gg a$, может быть принята постоянной:

$$S_x(\omega) \approx c^2.$$

Определить корреляционную функцию $Y(t)$ при $t \gg \frac{1}{a}$.

35.2. Динамическая система описывается уравнением

$$a_0 \frac{dY(t)}{dt} + a_1 Y(t) = b_0 \frac{dX(t)}{dt} + b_1 X(t),$$

где $\bar{x} = \text{const}$ дано, $K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}$, $\frac{a_1}{a_0} > 0$.

Определить математическое ожидание и дисперсию стационарного решения этого уравнения.

35.3. Отклонения $U(t)$ кренометра, расположенного в плоскости мидель-шпангоута корабля, определяются уравнением

$$\frac{d^2 U(t)}{dt^2} + 2h \frac{dU(t)}{dt} + n^2 U(t) = n^2 F(t) \quad (n > h > 0),$$

где $F(t) = \frac{1}{g} [\ddot{\eta}_c(t) - c \ddot{\Theta}(t)]$, угол крена $\Theta(t)$ и скорость бокового смещения центра тяжести корабля $\dot{\eta}_c(t)$ вследствие орбитального движения можно считать несвязанными случайными функциями,

$$K_{\dot{\eta}_c}(\tau) = a_1 e^{-\alpha_1 |\tau|} \left(\cos \beta_1 \tau + \frac{\alpha_1}{\beta_1} \sin \beta_1 |\tau| \right),$$

$$K_{\Theta}(\tau) = a_2 e^{-\alpha_2 |\tau|} \left(\cos \beta_2 \tau + \frac{\alpha_2}{\beta_2} \sin \beta_2 |\tau| \right),$$

а все постоянные, входящие в формулы, известны. Определить $S_u(\omega)$.

35.4. Астатический гироскоп с пропорциональной коррекцией расположен на корабле в плоскости мидель-шпангоута. Определить дисперсию отклонения его оси α от направления, даваемого физическим маятником, если угол α определяется уравнением

$$\dot{\alpha}(t) + \varepsilon \alpha(t) = \varepsilon U(t) \quad (\varepsilon > 0);$$

время, прошедшее после включения гироскопа, достаточно велико, чтобы $\alpha(t)$ считать стационарным, а для определения спектральной плотности $S_u(\omega)$ воспользоваться результатом решения задачи 35.3, приняв

$$a_1 = 1,24 \frac{M^2}{\text{сек}^2}; \quad \alpha_1 = 0,1 \text{ сек.}^{-1}; \quad \beta_1 = 1,20 \text{ сек.}^{-1};$$

$$a_2 = 3,8 \cdot 10^{-2} \text{ рад}^2; \quad \alpha_2 = 0,04 \text{ сек.}^{-1}; \quad \beta_2 = 0,42 \text{ сек.}^{-1};$$

$$h = 0,6 \text{ сек.}^{-1}; \quad n = 6,28 \text{ сек.}^{-1}; \quad c = 10 \text{ м};$$

$$\varepsilon = 0,01 \text{ сек.}^{-1}.$$

35.5. Определить спектральную плотность и корреляционную функцию стационарного решения уравнения

$$\frac{d^2 Y(t)}{dt^2} + 2h \frac{dY(t)}{dt} + k^2 Y(t) = X(t) \quad (k \gg h > 0),$$

если можно считать, что $X(t)$ обладает свойствами «белого шума», т. е. $S_x(\omega) = c^2 = \text{const}$.

35.6. Угловое отклонение рамки гальванометра $\Theta(t)$ от положения равновесия при разомкнутой цепи определяется уравнением

$$I \frac{d^2 \Theta(t)}{dt^2} + r \frac{d\Theta(t)}{dt} + D \Theta(t) = M(t), \quad 4ID \gg r^2,$$

где I — момент инерции рамки; r — коэффициент трения; D — коэффициент жесткости нити, на которой подвешена рамка; $M(t)$ — возмущающий момент, вызываемый случайными ударами молекул окружающей среды.

Определить спектральную плотность и корреляционную функцию угла $\Theta(t)$, если спектральную плотность $M(t)$ можно считать постоянной, а согласно результатам статистической физики $\sigma_0^2 D = kT$, где k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура среды.

35.7. Случайная стационарная функция $Y(t)$ связана со случайной функцией $X(t)$ уравнением

$$\frac{d^3 Y(t)}{dt^3} + 6 \frac{d^2 Y(t)}{dt^2} + 11 \frac{dY(t)}{dt} + 6Y(t) = 5X(t) + 7 \frac{d^3 X(t)}{dt^3}.$$

Определить спектральную плотность $S_y(\omega)$ для стационарного решения уравнения, если $S_x(\omega) = \frac{4}{\pi(\omega^2 + 1)}$.

35.8. Может ли уравнение

$$\ddot{Y}(t) - 2\dot{Y}(t) + 3Y(t) = X(t),$$

содержащее в правой части равенства стационарную функцию $X(t)$, иметь стационарное решение?

35.9. Определить дисперсию ординаты центра тяжести корабля $\zeta_c(t)$ на волнении, если

$$\ddot{\zeta}_c(t) + 2h\dot{\zeta}_c(t) + \omega_0^2 \zeta_c(t) = \omega_0^2 X(t),$$

где ордината волнового профиля $X(t)$ имеет корреляционную функцию

$$K_x(\tau) = ae^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right);$$

h и ω_0 — постоянные, определяемые параметрами корабля; α — параметр, характеризующий нерегулярность волнения; β — преобладающая частота волнения; $\omega_0 \geq h > 0$.

35.10. Ошибка акселерометра, измеряющего горизонтальное ускорение самолета, определяется уравнением

$$\ddot{\epsilon}(t) + 2h\dot{\epsilon}(t) + n^2\epsilon(t) = gn^2\gamma(t),$$

где $h = 0,6 \text{ сек.}^{-1}$, $n = 6,28 \text{ сек.}^{-1}$, $g = 9,81 \text{ м/сек}^2$; угол крена $\gamma(t)$ — стационарная нормальная случайная функция, корреляционная функция которой дана:

$$K_\gamma(\tau) = 3 \cdot 10^{-4} e^{-0,61|\tau|} (\cos 5\tau + 0,12 \sin 5|\tau|).$$

Определить дисперсию $\epsilon(t)$ при установившемся режиме работы акселерометра.

35.11. Доказать, что если на вход линейной устойчивой динамической системы, описываемой уравнениями с постоянными коэффициентами, поступает случайная функция $X(t)$, обладающая свойствами «белого шума» ($S_x(\omega) = c^2$), то при достаточно большом времени после включения системы корреляционная функция выходного сигнала $Y(t)$ определяется равенством

$$K_y(\tau) = 2\pi c^2 \int_0^\infty p(t) p(t - \tau) dt,$$

где $p(t)$ — весовая функция системы.

35.12. Найти дисперсию угла крена корабля $\Theta(t)$, определяемого уравнением

$$\ddot{\Theta}(t) + 2h\dot{\Theta}(t) + k^2\Theta(t) = k^2F(t) \quad (k > h > 0),$$

если угол волнового склона $F(t)$ имеет нулевое математическое ожидание,

$$K_f(\tau) = ae^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right),$$

а процесс качки можно считать установившимся.

35.13. Стационарная случайная функция $Y(t)$ связана со стационарной функцией $X(t)$, спектральная плотность которой известна, уравнением

$$\ddot{Y}(t) + 2h\dot{Y}(t) + k^2Y(t) = k^2X(t),$$

где $k \geq h > 0$.

Определить взаимную спектральную плотность $S_{yx}(\omega)$ и корреляционную функцию связи $R_{yx}(\tau)$.

35.14. Дано:

$$\ddot{Y}(t) + 8\dot{Y}(t) + 7Y(t) = X(t),$$

$$K_x(\tau) = 4e^{-\alpha^2\tau^2}.$$

Определить корреляционную функцию $Y(t)$ для моментов времени, превосходящих время переходного процесса.

35.15. На вход динамической системы с весовой функцией $p(t)$ поступает стационарная случайная функция $X(t)$ с нулевым математическим ожиданием. Определить дисперсию отклонения выходного сигнала $Y(t)$ от некоторой стационарной функции $Z(t)$, если $K_x(\tau)$ и $R_{xz}(\tau)$ известны, $\bar{z} = 0$, а переходный процесс системы можно считать окончившимся.

35.16. Воспользовавшись спектральным разложением стационарной случайной функции $X(t)$, определить для момента времени $t \gg \frac{1}{a}$ дисперсию интеграла уравнения

$$\dot{Y}(t) + aY(t) = tX(t)$$

при нулевых начальных условиях, если

$$S_x(\omega) = \frac{\sigma_x^2}{\pi} \frac{\alpha}{\omega^2 + \alpha^2}.$$

35.17. Вследствие случайного дебаланса гиromотора, установленного на платформе, имеющей случайное вертикальное ускорение $W(t)$, гироскоп направления совершает прецессию с угловой скоростью $\dot{\alpha}(t) = \frac{PL}{H} \left[1 + \frac{1}{g} W(t) \right]$.

Определить математическое ожидание и дисперсию азимутального ухода $\alpha(t)$ в момент времени t , если $\mathbf{M}[L] = 0$, $\mathbf{D}[L] = \sigma_L^2$, $K_w(\tau)$ и \bar{w} заданы, P , H , g — известные постоянные, а между L и $W(t)$ нет связи.

35.18. Определить корреляционную функцию частного интеграла $Y_I(t)$ уравнения

$$\ddot{Y}(t) + 2h\dot{Y}(t) + k^2Y(t) = e^{-at}X(t)$$

при нулевых начальных условиях, если

$$S_x(\omega) = \frac{\sigma_x^2}{\pi} \frac{\alpha}{\omega^2 + \alpha^2} \quad (k \gg h > 0).$$

35.19. Случайная функция $Y(t)$ связана со случайной функцией $X(t)$ уравнением

$$\dot{Y}(t) - tY(t) = X(t).$$

Определить $K_y(t_1, t_2)$, если $K_x(\tau) = ae^{-a|\tau|}$, а при $t=0$ $Y(t) = 0$.

35.20. Определить математическое ожидание и корреляционную функцию частного интеграла уравнения

$$\dot{Y}(t) - a^2tY(t) = bX(t)$$

при нулевых начальных условиях, если $\bar{x}(t) = t$.

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-a^2\tau^2}.$$

35.21. Определить математическое ожидание и корреляционную функцию решения дифференциального уравнения

$$\dot{Y}(t) + \frac{1}{t}Y(t) = X(t),$$

если при $t = t_0 \neq 0$ $Y(t) = y_0$, где y_0 — неслучайная величина, $\bar{x}(t) = \frac{1}{t}$;

$$K_x(t_1, t_2) = t_1 t_2 e^{-a|t_2 - t_1|}.$$

35.22. Написать общее выражение для математического ожидания и корреляционной функции решения $Y(t)$ дифференциального уравнения n -го порядка, весовая функция которого $p(t_1, t_2)$, если в правой части уравнения стоит случайная функция $X(t)$; $\bar{x}(t)$ и $K_x(t_1, t_2)$ известны, начальные значения $Y(t)$ и первых $n-1$ ее производных — случайные величины, не связанные с ординатами случайной функции $X(t)$, с известными математическими ожиданиями e_j и корреляционной матрицей $\|k_{ji}\|$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$).

35.23. Дана система

$$\dot{Y}_1(t) + 3Y_1(t) - Y_2(t) = X(t), \quad \dot{Y}_2(t) + 2Y_1(t) = 0.$$

Определить дисперсию $Y_2(t)$ для $t = 0,5$ сек., если при $t = 0$ $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$ являются случайными величинами, не связанными с $X(t)$; $D[Y_1(0)] = 1$, $D[Y_2(0)] = 2$, $M\{[Y_1(0) - \bar{y}_1(0)][Y_2(0) - \bar{y}_2(0)]\} = -1$.

$$S_x(\omega) = \frac{2}{\pi(\omega^2 + 1)^2} \text{ сек.}$$

35.24. Определить дисперсии решений системы уравнений в момент времени t :

$$\left. \begin{aligned} \dot{Y}_1(t) + 3Y_1(t) - Y_2(t) &= tX(t), \\ \dot{Y}_2(t) + 2Y_1(t) &= 0, \end{aligned} \right\}$$

если начальные условия нулевые, а

$$S_x(\omega) = \frac{2}{\pi(\omega^2 + 1)}.$$

35.25. Определить дисперсии решений системы уравнений при $t = 0,5$ сек.:

$$\left. \begin{aligned} \dot{Y}_1(t) + 3Y_1(t) - Y_2(t) &= tX(t), \\ \dot{Y}_2(t) + 2Y_1(t) &= 0, \end{aligned} \right\}$$

если $S_x(\omega) = \frac{2}{\pi(\omega^2 + 1)}$, а начальные условия нулевые.

35.26. На вход автоматического фрикциона, используемого в качестве дифференцирующе-сглаживающего устройства, поступает случайная функция $X(t)$. Определить дисперсию сглаженной функции $Z(t)$ и дисперсию сглаженной скорости ее изменения $Y(t)$, если работа фрикциона описывается системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} b\dot{Y}(t) + Y(t) &= a\dot{X}(t), \\ b\dot{Z}(t) + Z(t) &= X(t), \end{aligned} \right\}$$

где a и b — постоянные масштабные коэффициенты, $K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-a|\tau|}$, а переходный процесс закончился.

35.27. Определить для $t=1$ закон распределения решения уравнения

$$\ddot{Y}(t) + 3\dot{Y}(t) + 2Y(t) = X(t),$$

если при $t=0$ $Y(t) = Y_0$, $\dot{Y}(t) = \dot{Y}_0$, а Y_0 , \dot{Y}_0 и $X(t)$ нормальны и взаимно не коррелированы,

$$M[Y_0] = M[\dot{Y}_0] = \bar{x} = 0, \quad D[Y_0] = 1,5, \quad D[\dot{Y}_0] = 0,2,$$

$$K_x(\tau) = 2e^{-|\tau|}.$$

35.28. Отклонение $U(t)$ от вертикали плоского физического маятника, плоскость качания которого совпадает с диаметральной плоскостью корабля, определяется уравнениями

$$\ddot{U}(t) + 2h\dot{U}(t) + Y(t)U(t) = X(t),$$

$$X(t) = -\frac{n^2}{g} \{ \ddot{\xi}_c(t) + \ddot{\eta}_c(t) \Phi(t) - \\ - \rho_x [\dot{\Phi}^2(t) + \dot{\Psi}^2(t) + \Psi(t)\ddot{\Psi}(t)] + \\ + \rho_z [\ddot{\Psi}(t) + \ddot{\Theta}(t)\Theta(t) + 2\dot{\Phi}(t)\dot{\Theta}(t)] \},$$

$$Y(t) = n^2 \left[1 - \frac{\ddot{\xi}_c(t) - \rho_x \ddot{\Psi}(t)}{g} \right],$$

где все коэффициенты постоянны, а угол рыскания $\Phi(t)$, угол дифферента $\Psi(t)$, угол крена $\Theta(t)$ и скорости координат центра тяжести корабля $\dot{\xi}_c(t)$, $\dot{\eta}_c(t)$, $\dot{\xi}_c(t)$ — нормальные стационарные, не связанные между собой случайные функции.

Выразить спектральные плотности $S_x(\omega)$, $S_y(\omega)$ и $S_{xy}(\omega)$, необходимые для нахождения вероятностных характеристик $U(t)$ на моделирующем устройстве, через спектральные плотности $S_\Phi(\omega)$, $S_\Psi(\omega)$, $S_\Theta(\omega)$, $S_{\dot{\xi}_c}(\omega)$, $S_{\dot{\eta}_c}(\omega)$, $S_{\dot{\xi}_c}(\omega)$.

35.29. Для момента времени $t \gg \frac{1}{k}$ найти асимметрию S_k и эксцесс E_k частного интеграла уравнения

$$\dot{Y}(t) + kY(t) = X^2(t),$$

удовлетворяющего нулевым начальным условиям, если $X(t)$ — нормальная стационарная функция, $\bar{x} = 0$, $K_x(\tau) = ae^{-\alpha|\tau|}$.

35.30. Определить корреляционную функцию связи $R_{yz}(\tau)$ стационарных решений уравнений:

$$\frac{d^2 Y(t)}{dt^2} + 2h_1 \frac{dY(t)}{dt} + k_1^2 Y(t) = k_1^2 X(t),$$

$$\frac{d^2 Z(t)}{dt^2} + 2h_2 \frac{dZ(t)}{dt} + k_2^2 Z(t) = k_2^2 X(t),$$

где случайная функция $X(t)$ обладает свойством белого шума ($S_x(\omega) \approx c^2$), $k_1 > h_1 > 0$, $k_2 > h_2 > 0$.

§ 36. Оптимальные динамические системы

Основные формулы

Будем понимать ¹⁾ под оптимальной динамической системой систему, которая по входной функции $X(t) = U(t) + V(t)$, где $U(t)$ — «полезный сигнал», а $V(t)$ — «помеха», получает на выходе функцию $Y(t)$, математическое ожидание которой равно математическому ожиданию некоторой функции $Z(t)$, а

$$D[\varepsilon(t)] = D[Y(t) - Z(t)] = \min.$$

Функция $Z(t)$ связана с полезным сигналом $U(t)$ соотношением

$$Z(t) = NU(t) = \int_0^t n(t, t_1) U(t_1) dt_1,$$

где N — символ известного оператора, а $n(t, t_1)$ — его весовая функция.

Под нахождением оптимальной системы понимается определение по вероятностным свойствам случайных функций $U(t)$ и $V(t)$ и виду оператора N вида оператора L или соответствующей ему весовой функции $l(t, t_1)$, с помощью

¹⁾ Возможны и другие определения понятия оптимальной динамической системы. Например, под оптимальной системой можно понимать систему, у которой вероятность того, что разность $Y(t) - Z(t)$ по абсолютному значению не превысит данной величины, достигает максимума. Термин «динамическая система» понимается здесь в техническом смысле слова, т. е. под динамической системой понимается всякая система, состояние которой (характеризуемое функцией, получаемой на «выходе» системы) изменяется под влиянием внешних возмущений (случайных функций, поступающих на «вход» системы).

которых функция $X(t)$ может быть преобразована в функцию $Y(t)$:

$$Y(t) = LX(t) = \int_0^t l(t, t_1) X(t_1) dt_1.$$

Задача определения оптимальной динамической системы решается просто, если: а) случайные функции $U(t)$ и $V(t)$ стационарны и стационарно связаны, а операторы N и L линейны и не зависят от времени;

б) спектральная плотность $S_x(\omega) = S_u(\omega) + S_v(\omega) + S_{uv}(\omega) + S_{uv}^*(\omega)$ является дробно-рациональной функцией своего аргумента, т. е. может быть представлена в виде

$$S_x(\omega) = a^2 \frac{|P_m(\omega)|^2}{|Q_n(\omega)|^2},$$

где полиномы $P_m(\omega)$ и $Q_n(\omega)$ имеют корни, расположенные только в верхней полуплоскости комплексного переменного, т. е. могут быть представлены в виде

$$P_m(\omega) = \prod_{j=1}^m (\omega - \mu_j)^{m_j}, \quad Q_n(\omega) = \prod_{l=1}^n (\omega - \nu_l)^{n_l},$$

где комплексные числа μ_j и ν_l имеют положительные мнимые части, m_j и n_l — кратности соответствующих корней,

$$\sum_{j=1}^m m_j = m, \quad \sum_{l=1}^n n_l = n;$$

в) при определении ординат функции $Y(t)$ могут быть использованы значения ординат функции $X(t)$ за неограниченно большой промежуток времени, предшествующий текущему моменту времени t .

В этом случае передаточная функция $L(i\omega)$ оптимальной динамической системы, связанная с ее весовой функцией соотношениями

$$l(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} L(i\omega) d\omega,$$

$$L(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} l(\tau) d\tau,$$

определяется следующим образом (считаем $\bar{u} = \bar{v} = 0$).

Если система работает без запаздывания (т. е. $Z(t)$ является результатом применения некоторого оператора к текущим или будущим значениям ординат функции $U(t)$), то

$$L(i\omega) = \frac{1}{a^2} \frac{Q_n(\omega)}{P_m(\omega)} \chi(\omega),$$

где

$$\chi(\omega) = \sum_{r=1}^{\alpha} \sum_{k=1}^{l_r} \frac{c_{kr}}{(\omega - \lambda_r)^k},$$

$$c_{kr} = \frac{1}{(l_r - k)!} \frac{d^{l_r - k}}{d\omega^{l_r - k}} \left[(\omega - \lambda_r)^{l_r} \frac{Q_n^*(\omega)}{P_m^*(\omega)} S_{xz}(\omega) \right] \Big|_{\omega = \lambda_r}$$

λ_r ($r = 1, 2, \dots, \alpha$) — полюс кратности l_r выражения $\frac{Q_n^*(\omega)}{P_m^*(\omega)} S_{xz}(\omega)$, лежащий в верхней полуплоскости.

Если оптимальная динамическая система должна работать с запаздыванием (т. е. функция $Z(t)$ является результатом применения некоторого оператора к ординатам функции $U(t)$ в момент времени, на τ_0 секунд предшествующий текущему моменту времени t), то

$$L(i\omega) = \frac{S_{xz}(\omega)}{S_x(\omega)} - \frac{1}{a^2} \frac{Q_n(\omega)}{P_m(\omega)} \Psi(\omega),$$

где

$$\Psi(\omega) = \sum_{r=1}^{\alpha'} \sum_{k=1}^{l'_r} \frac{c'_{kr}}{(\omega - \lambda_r)^k},$$

$$c'_{kr} = \frac{1}{(l'_r - k)!} \frac{d^{l'_r - k}}{d\omega^{l'_r - k}} \left[(\omega - \lambda_r)^{l'_r} \frac{Q_n^*(\omega)}{P_m^*(\omega)} S_{xz}(\omega) \right] \Big|_{\omega = \lambda_r}$$

λ_r ($r = 1, 2, \dots, \alpha'$) — полюс кратности l'_r выражения

$$\frac{Q_n^*(\omega)}{P_m^*(\omega)} S_{xz}(\omega),$$

лежащий в нижней полуплоскости.

Дисперсия $D[\varepsilon(t)]$ для оптимальной динамической системы

$$D[\varepsilon(t)] = D[Z(t)] - D[Y(t)].$$

Если динамическая система использует ординаты случайной функции за конечный интервал времени $(t - T, t)$, предшествующий текущему моменту времени t («система с конечной памятью»), а полезный сигнал является суммой полинома $R_k(t)$ заданной степени k (коэффициенты полинома — любые постоянные величины) и стационарной случайной функции $U(t)$, т. е. функция $X(t)$, поступающая на вход системы, равна сумме

$$X(t) = R_k(t) + U(t) + V(t),$$

то при тех же предположениях о виде спектральной плотности $S_x(\omega)$ весовая функция $l(\tau)$ оптимальной динамической системы определяется формулами:

$$l(t) = \sum_{j=0}^k D_j t^j + \sum_{r=1}^{2m} c_r e^{\alpha_r t} + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|Q_n(\omega)|^2}{|P_m(\omega)|^2} N(i\omega) S_u(\omega) e^{i\omega t} d\omega + \sum_{l=1}^{n-m} A_l \delta^{(l-1)}(t) + \\ + \sum_{l=1}^{n-m} B_l \delta^{(l-1)}(t - T) \quad (0 \leq t \leq T).$$

Здесь α_r — корни уравнения $|P_m(i\alpha)|^2 = 0$, $N(i\omega)$ — передаточная функция оператора N , а постоянные, входящие в правую часть равенства, определяются путем подстановки выражения $l(\tau)$ в уравнение

$$\int_{0^-}^{T^+} l(\tau) K_x(t - \tau) d\tau - R_{xx}(t) = \sum_{j=0}^k \lambda_j t^j \\ (0 \leq t \leq T),$$

которому удовлетворяет весовая функция $l(\tau)$ оптимальной динамической системы, и уравнения коэффициентов как у одинаковых степеней t , так и у одинаковых показательных функций. К получаемым таким образом $2n + k + 1$ уравнениям необходимо добавить еще $k + 1$ уравнений, дающих равенство моментов функции $l(\tau)$ и весовой функ-

ции $n(\tau)$, соответствующей заданному оператору N , т. е. уравнения

$$\int_{0-}^{\tau+} l(\tau) \tau^j d\tau = \mu_j \quad (j=0, 1, 2, \dots, k),$$

где

$$\mu_j = \int_{-\infty}^{\infty} n(\tau) \tau^j d\tau.$$

Получающаяся таким образом система уравнений полностью определяет все постоянные, входящие в выражение для $l(\tau)$. Передаточная функция $L(i\omega)$ может быть получена из $l(\tau)$ путем преобразования Фурье

$$L(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} l(\tau) d\tau,$$

а дисперсия ошибки $\varepsilon(t)$ для оптимальной системы в данном случае

$$D[\varepsilon(t)] = D[Z(t)] - R_{yz}(0) + \sum_{j=0}^k \lambda_j \mu_j.$$

Аналогичным образом решается задача определения весовой функции оптимальной динамической системы в том случае, если неслучайная часть полезного сигнала содержит линейную комбинацию (с постоянными, но неизвестными параметрами) тригонометрических или показательных функций времени. Отличие будет заключаться только в том, что в выражении для $l(\tau)$ появится аналогичная линейная комбинация, коэффициенты которой могут быть определены путем подстановки в исходное интегральное уравнение.

В ряде задач отказываются от создания оптимальных динамических систем вследствие трудностей, связанных с их практической реализацией, и идут на создание систем, не являющихся оптимальными в строгом смысле этого слова, но дающих наименьшую дисперсию $D[\varepsilon(t)]$ среди систем, реализация которых в данном случае не представляет особых затруднений. Например, при определении значения функ-

ции $U(t)$ в момент времени $t + \tau$ в качестве функции $Y(t)$ можно принять

$$Y(t) = a_1 U(t) + a_2 \dot{U}(t)$$

и определить a_1 и a_2 так, чтобы при $\bar{y}(t) = \bar{z}(t)$

$$D[Y(t) - Z(t)] = \min.$$

При такой постановке задачи определение вида оператора L (значений постоянных, входящих в выражение для этого оператора) сводится к определению экстремума функции нескольких переменных.

Решение типовых примеров

Пример 36.1. Динамическая система проектируется для наилучшего приближения к случайной функции $Z(t) = NU(t + \tau_0)$. Определить взаимную спектральную плотность $S_{xz}(\omega)$, если $X(t) = U(t) + V(t)$, а передаточная функция $N(i\omega)$ оператора N , время упреждения τ_0 , спектральные плотности $S_u(\omega)$, $S_v(\omega)$ и взаимная спектральная плотность $S_{uv}(\omega)$ известны.

Решение. Подставив $U + V$ вместо $X(t)$ в выражение

$$R_{xz}(\tau) = M \{ [X^*(t) - \bar{x}^*] [Z(t + \tau) - \bar{z}] \},$$

заменив $U(t)$ и $V(t)$ их спектральными разложениями и учитывая, что $Z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} n(\tau) U(t - \tau) d\tau$, после простых преобразований получим

$$S_{xz}(\omega) = [S_u(\omega) + S_{vu}(\omega)] N(i\omega) e^{i\omega\tau_0}.$$

Аналогичным образом решаются задачи 36.1 и 36.2, являющиеся вводными для данного параграфа.

Пример 36.2. На вход динамической системы поступает случайная функция $X(t) = U(t) + V(t)$, где спектральная плотность полезного сигнала $S_u(\omega) = \frac{\alpha^2}{\omega^2 + \beta^2}$, $S_{uv}(\omega) = 0$, а спектральную плотность помехи можно считать постоянной: $S_v(\omega) = c^2$. Определить передаточную функцию $L(i\omega)$ оптимальной динамической системы, если задачей системы является получение функции $Z(t) = U(t + \tau)$, где: а) $\tau \geq 0$; б) $\tau < 0$.

Решение. В данном случае

$$S_x(\omega) = \frac{c^2\omega^2 + \alpha^2 + c^2\beta^2}{\omega^2 + \beta^2} = c^2 \frac{|P_1(\omega)|^2}{|Q_1(\omega)|^2}, \quad P_1(\omega) = \omega - i\gamma,$$

$$Q_1(\omega) = \omega - i\beta, \quad \gamma = \frac{1}{c} \sqrt{\alpha^2 + c^2\beta^2}.$$

а) При $\tau \geq 0$ выражение $\frac{Q_1^*(\omega)}{P_1^*(\omega)} S_{xz}(\omega)$ имеет один полюс в верхней полуплоскости: $\omega = i\beta$; следовательно,

$$L(i\omega) = \frac{1}{c^2} \frac{\omega - i\beta}{\omega - i\gamma} \frac{1}{\omega - i\beta} \left[(\omega - i\beta) \frac{\omega + i\beta}{\omega + i\gamma} e^{i\omega\tau} \frac{\alpha^2}{\omega^2 + \beta^2} \right]_{\omega=i\beta} = \\ = \frac{\alpha^2}{c^2} \frac{e^{-\beta\tau}}{(\beta + \gamma)(\gamma + i\omega)}.$$

б) При $\tau < 0$ $\frac{Q_1^*(\omega)}{P_1^*(\omega)} S_{xz}(\omega)$ в нижней полуплоскости имеет один полюс $\omega = -i\gamma$; следовательно,

$$L(i\omega) = \frac{\alpha^2}{\omega^2 + \beta^2} e^{i\omega\tau} \frac{\omega^2 + \beta^2}{c^2(\omega^2 + \gamma^2)} - \\ - \frac{1}{c^2} \frac{\omega - i\beta}{\omega - i\gamma} \frac{1}{\omega + i\gamma} \left[(\omega + i\gamma) \frac{\omega + i\beta}{\omega + i\gamma} \frac{\alpha^2}{\omega^2 + \beta^2} e^{i\omega\tau} \right]_{\omega=-i\gamma} = \\ = \frac{\alpha^2}{c^2} \frac{1}{\omega^2 + \gamma^2} \left[e^{i\omega\tau} + \frac{\omega - i\beta}{i(\beta + \gamma)} e^{\gamma\tau} \right].$$

Пример 36.3. Дистанция $D(t)$ до самолета, измеряемая радиолокатором с ошибкой $V(t)$, для определения текущего значения скорости поступает в динамическую систему, которая учитывает ее значения только за период времени $(t-T, t)$. Определить оптимальную весовую функцию $l(\tau)$, если $K_v(\tau) = \sigma_v^2 e^{-\alpha|\tau|}$; истинное значение дистанции с достаточной точностью можно считать полиномом третьей степени от t , $\sigma_v = 30$ м, $\alpha = 0,5$ сек.⁻¹, $\beta = 2,0$ сек.⁻¹, $T = 20$ сек.

Решение. Так как корреляционной функции $K_v(\tau)$ соответствует спектральная плотность $S_v(\omega) = \frac{\alpha\sigma_v^2}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)}$, а полезная часть случайного сигнала $U(t) = 0$, то в соответствии с обозначениями, принятыми в данном параграфе, имеем $k = 3$, $n - m = 1$, $S_x(\omega) = S_v(\omega)$, числитель $S_v(\omega)$ не содержит ω и, следовательно, не имеет корней.

Весовая функция оптимальной системы будет

$$l(\tau) = A_1 \delta(\tau) + B_1 \delta(\tau - T) + D_0 + D_1 \tau + D_2 \tau^2 + D_3 \tau^3.$$

Для определения постоянных после подстановки $l(\tau)$ в уравнение

$$\int_{0^-}^{T^+} l(\tau) K_x(t - \tau) d\tau = \sum_{j=0}^3 \lambda_j t^j$$

и уравнивания коэффициентов у одинаковых показательных функций получим:

$$\begin{aligned} -\alpha A_1 + D_0 - \frac{1}{\alpha} D_1 + \frac{2}{\alpha^2} D_2 - \frac{6}{\alpha^3} D_3 &= 0, \\ -\alpha B_1 + D_0 + \frac{1}{\alpha} (1 + \alpha T) D_1 + \frac{1}{\alpha^2} (2 + 2\alpha T + \alpha^2 T^2) D_2 + \\ &+ \frac{1}{\alpha^3} (6 + 6\alpha T + 3\alpha^2 T^2 + \alpha^3 T^3) D_3 = 0. \end{aligned}$$

Дополняя эти уравнения равенствами, получающимися при уравнивании моментов $l(\tau)$ и $n(\tau) = \delta^{(1)}(\tau)$:

$$A_1 + B_1 + T D_0 + \frac{1}{2} T^2 D_1 + \frac{1}{3} T^3 D_2 + \frac{1}{4} T^4 D_3 = 0,$$

$$B_1 + \frac{1}{2} T D_0 + \frac{1}{3} T^2 D_1 + \frac{1}{4} T^3 D_2 + \frac{1}{5} T^4 D_3 = -1,$$

$$B_1 + \frac{1}{3} T D_0 + \frac{1}{4} T^2 D_1 + \frac{1}{5} T^3 D_2 + \frac{1}{6} T^4 D_3 = 0,$$

$$B_1 + \frac{1}{4} T D_0 + \frac{1}{5} T^2 D_1 + \frac{1}{6} T^3 D_2 + \frac{1}{7} T^4 D_3 = 0,$$

получим полную систему линейных уравнений, определяющих искомые постоянные. Решение системы дает:

$$\begin{aligned} D_0 &= 5,948 \cdot 10^{-1}, & D_2 &= 9,618 \cdot 10^{-2}, & A_1 &= 6,138, \\ D_1 &= -7,803 \cdot 10^{-1}, & D_3 &= -0,2896 \cdot 10^{-2}, & B_1 &= -2,582. \end{aligned}$$

Задачи

86.1. На вход динамической системы поступает

$$X(t) = U(t) + V(t),$$

где $U(t)$ — полезный сигнал, а $V(t)$ — помеха. Определить $S_x(\omega)$, если $S_u(\omega)$, $S_v(\omega)$ и $S_{uv}(\omega)$ известны.

36.2. На вход динамической системы, предназначенной для получения функции $Z(t) = \dot{U}(t)$, поступает случайная функция $X(t) = U(t) + V(t)$; $V(t)$ — помеха, возникающая при получении значений ординаты функции $U(t)$. Определить взаимную спектральную плотность $S_{xz}(\omega)$, если $S_u(\omega)$, $S_{uv}(\omega)$ и $S_v(\omega)$ известны.

36.3. Определить передаточную функцию $L(i\omega)$ оптимальной динамической системы, предназначенной для получения производной от случайной функции $X(t)$ за τ секунд до последнего наблюдения ординаты $X(t)$, если

$$S_x(\omega) = \frac{a^2}{(\omega^2 + \alpha^2)^2}.$$

Найти дисперсию ошибки определения скорости.

36.4. Определить передаточную функцию $L(i\omega)$ оптимальной дифференцирующей системы, если система служит для определения производной случайной функции $U(t)$ в момент времени $t - \tau$ ($\tau > 0$), а на вход системы поступает случайная функция $X(t)$, являющаяся суммой полезного сигнала $U(t)$ и помехи $V(t)$, которая не связана с $U(t)$. Дано:

$$S_u(\omega) = \frac{a^2}{(\omega^2 + \alpha^2)^2}, \quad S_v(\omega) = \frac{b^2}{(\omega^2 + \beta^2)^2}.$$

36.5. Определить передаточную функцию оптимального фильтра, предназначенного для получения текущего значения полезного сигнала, если на его вход поступает сумма полезного сигнала $U(t)$ и помехи $V(t)$; $U(t)$ и $V(t)$ взаимно не коррелированы, а

$$S_u(\omega) = \frac{a^2}{\omega^2 + \alpha^2}, \quad S_v(\omega) = \frac{b^2}{\omega^2 + \beta^2}.$$

36.6. Выразить дисперсию ошибки оптимальной динамической системы через спектральные плотности $S_u(\omega)$, $S_v(\omega)$, $S_{uv}(\omega)$ ($U(t)$ — полезный сигнал, $V(t)$ — помеха), если передаточная функция оптимальной системы $L(i\omega)$, а N — оператор, результат применения которого к функции $U(t)$ система должна вырабатывать с наименьшей ошибкой.

36.7. На вход динамической системы, предназначенной для получения производной $\dot{U}(t)$, поступает $X(t) = U(t) + V(t)$, где помеха $V(t)$ не связана с $U(t)$,

$$S_u(\omega) = \frac{\alpha^2}{(\omega^2 - 2\beta^2)^2 + 4\gamma^4}, \quad S_v(\omega) = c^2 = \text{const.}$$

Определить оптимальную передаточную функцию системы и дисперсию ошибки определения оптимальной системой производной $\dot{U}(t)$.

36.8. Определить оптимальную передаточную функцию динамической системы для получения значения ординаты $U(t + \tau)$, если на вход системы поступает случайная функция $U(t)$.

$$S_u(\omega) = \frac{a^2}{\omega^2 + a^2}, \quad a > 0, \quad \tau \geq 0.$$

36.9. Спектральная плотность входного сигнала $S_x(\omega) = \frac{1}{(\omega^2 + 1)^2}$, время упреждения $\tau \geq 0$. Определить оптимальную передаточную функцию динамической системы.

36.10. Спектральная плотность входного сигнала

$$S_x(\omega) = \frac{a^2(\omega^2 + a^2)}{\omega^4 + 2\beta^4}.$$

Найти оптимальную передаточную функцию динамической системы для определения $X(t + \tau)$ и дисперсию ошибки определения $X(t + \tau)$ при $\tau \geq 0$.

36.11. На вход динамической системы поступает сумма полезного сигнала $U(t)$ и помехи $V(t)$, не коррелированных между собой. Определить оптимальную передаточную функцию для получения значения сигнала в момент времени $t + \tau$, если $\tau \geq 0$,

$$S_u(\omega) = \frac{a^2}{\omega^2 + a^2}, \quad S_v(\omega) = \frac{b^2}{\omega^2 + \beta^2}.$$

36.12. На вход запаздывающего фильтра поступает сумма некоррелированных сигналов: полезного $U(t)$ и помехи $V(t)$, корреляционные функции которых известны:

$$K_u(\tau) = \sigma_u^2 e^{-\alpha|\tau|}, \quad K_v(\tau) = \sigma_v^2 e^{-\beta|\tau|}.$$

Определить оптимальную передаточную функцию динамической системы и ошибку фильтрации, если время запаздывания τ_0 ($\tau_0 \geq 0$).

36.13. Спектральная плотность входного сигнала $S_x(\omega) = \frac{a^2}{\omega^4 + 4a^4}$, время упреждения τ ($\tau \geq 0$). Определить оптимальную передаточную функцию динамической системы для нахождения $X(t + \tau)$.

36.14. На качающемся корабле необходимо определить такой момент времени t , чтобы через τ_0 секунд после него линейная функция угла крена $\Theta(t)$ и его производной $n_1\dot{\Theta}(t) + n_2\ddot{\Theta}(t)$ (где n_1 и n_2 — заданные постоянные) приняла бы заданное значение c . Определить оптимальную передаточную функцию упредителя и дисперсию σ_ε^2 ошибки, если $\bar{\theta} = 0$.

$$K_\theta(\tau) = \sigma_\theta^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right).$$

36.15. Координата корабля, идущего прямым курсом при неизменной скорости, определяется с ошибкой $V(t)$, характеризующейся корреляционной функцией

$$K_v(\tau) = \sigma_v^2 e^{-\alpha|\tau|},$$

где $\sigma_v = 25$ м, $\alpha = 0,25$ сек.⁻¹.

Определить наибольшую точность, достижимую при определении скорости изменения координаты корабля, если время наблюдения $T = 20, 40$ и 240 сек.

36.16. В условиях предыдущей задачи определить наибольшую точность, достижимую при определении скорости изменения координаты корабля, если

$$K_v(\tau) = \sigma_v^2 e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau|),$$

а остальные условия те же.

36.17. Для определения текущего значения угловой скорости бортовой качки корабля $\dot{\Theta}(t)$ используется динамическая система, на вход которой поступает текущее значение угла крена $\Theta(t)$, искаженное ошибкой измерения $V(t)$. Определить дисперсию ошибки $\varepsilon(t)$ определения угловой скорости качки, если динамическую систему можно считать оптимальной, $\bar{\theta} = 0$, $\bar{v} = 0$, $K_v(\tau) = \sigma_v^2 e^{-\alpha_v|\tau|}$, $R_{\theta v}(\tau) \equiv 0$, $K_\theta(\tau) = \sigma_\theta^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right)$, $\sigma_\theta = 0,1$ рад, $\alpha = 0,1$ сек.⁻¹, $\beta = 0,75$ сек.⁻¹, $\sigma_v = 2 \cdot 10^{-2}$ рад, $\alpha_v = 0,5$ сек.⁻¹.

36.18. Динамическая система проектируется для получения значения случайной функции $X(t)$ в момент $t + \tau_0$ по значениям ординат этой функции в течение интервала времени $(t - T, t)$. Определить оптимальную передаточную функцию системы и дисперсию ошибки определения $X(t + \tau_0)$.

если измерение ординат функции $X(t)$ осуществляется практически без ошибок:

$$X(t) = c_1 + c_2 t + U(t),$$

где c_1 и c_2 — неизвестные постоянные, а $U(t)$ — случайная функция, корреляционная функция которой

$$K_u(\tau) = \sigma_u^2 e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|),$$

$$\sigma_u = 1, \quad \alpha = 0,1 \text{ сек.}^{-1}, \quad \tau_0 = 10 \text{ сек.}, \quad T = 40 \text{ сек.}$$

36.19. Динамическая система проектируется для получения производной случайной функции $X(t)$ в момент $t + \tau_0$. Определить оптимальную передаточную функцию системы, если

$$X(t) = c_1 + c_2 t + U(t), \quad K_u(\tau) = \sigma_u^2 e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|),$$

где c_1 и c_2 — неизвестные постоянные, система обладает «конечной памятью T » (т. е. учитывает значения $X(t)$ только за интервал времени $(t - T, t)$), $\sigma_u = 1$, $\alpha = 0,1 \text{ сек.}^{-1}$, $\tau_0 = 10 \text{ сек.}$, $T = 40 \text{ сек.}$

36.20. Определить весовую функцию $l(\tau)$ оптимальной динамической системы с «конечной памятью T », предназначенной для дифференцирования функции $X(t) = R_1(t) + U(t)$, и ошибку определения $\dot{X}(t)$, где $R_1(t)$ — полином первой степени, а $K_u(\tau) = \sigma_u^2 e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|)$.

36.21. Для автономного управления самолетами могут быть применены инерциальные системы приборов управления двух типов: в первом случае при работе системы определяется полезный сигнал

$$u_1(t) = c_1 + c_2 t + c_3 \sin \Omega t + c_4 \cos \Omega t,$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 — некоторые (неизвестные) постоянные, а $\Omega = 1,25 \cdot 10^{-2} \text{ сек.}^{-1}$; во втором случае полезный сигнал имеет вид

$$u_2(t) = c_3 \sin \Omega t + c_4 \cos \Omega t.$$

Найти оптимальные передаточные функции динамических систем, служащих для определения полезного сигнала в первом и втором случае, если системы обладают «конечной

памятью T », $T = 20$ сек., а полезный сигнал, поступающий в систему, искажен ошибкой $V(t)$,

$$K_v(\tau) = \sigma_v^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right), \quad \bar{v} = 0,$$

$$\alpha = 0,5 \text{ сек.}^{-1}, \quad \beta = 3 \text{ сек.}^{-1}, \quad \sigma_v^2 = 4 \cdot 10^{-4}.$$

36.22. В качестве упрежденного значения случайной функции $X(t + \tau_0)$ взято $Y(t) = aX(t)$. Определить значение постоянной a , обращающей в минимум дисперсию ошибки $\varepsilon(t) = aX(t) - X(t + \tau_0)$, и величину минимальной дисперсии, если $\bar{x} = 0$,

$$S_x(\omega) = \frac{\alpha \sigma_x^2}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)}.$$

36.23. В качестве упрежденного значения случайной функции $X(t + \tau)$ взята линейная комбинация $Z(t) = aX(t) + b\dot{X}(t)$. Определить значения постоянных a и b , обращающих в минимум дисперсию ошибки

$$\varepsilon(t) = aX(t) + b\dot{X}(t) - X(t + \tau),$$

и величину минимальной дисперсии, если $\bar{x} = 0$,

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right).$$

36.24. В качестве упрежденного значения случайной функции $U(t + \tau_0)$ взято $Y(t) = a[U(t) + V(t)]$, где $V(t)$ — ошибка определения текущего значения полезного сигнала $U(t)$. Определить значение постоянной a , обращающей в минимум дисперсию

$$\varepsilon(t) = Y(t) - U(t + \tau_0), \quad \text{и } D[\varepsilon(t)]_{\min},$$

если

$$S_{uv}(\omega) = 0, \quad S_u(\omega) = \frac{\alpha \sigma_u^2}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)}, \quad S_v(\omega) = \frac{\beta \sigma_v^2}{\pi(\omega^2 + \beta^2)},$$

$$\bar{u} = \bar{v} = 0.$$

36.25. Сигнал требуется подать в момент, упреждающий на τ_0 секунд нулевое значение производной $\dot{\Theta}(t)$. В действительности сигнал подается в момент обращения в нуль линейной комбинации

$$Y(t) = a\Theta(t) + b\dot{\Theta}(t) + c.$$

Определить оптимальные значения постоянных a , b , c и величину дисперсии $\hat{\theta}(t + \tau_0)$, если $\bar{\theta} = 0$,

$$K_{\theta}(\tau) = \sigma_{\theta}^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right),$$

$\sigma_{\theta} = 5^\circ$, $\beta = 0,7$ сек. $^{-1}$, $\alpha = 0,042$ сек. $^{-1}$, $\tau_0 = 0,2$ сек.

36.26. В условиях предыдущей задачи определить оптимальные значения постоянных a , b , c , при которых

$$D[\theta(t + \tau_0) - Y(t)] = \min.$$

§ 37. Метод огибающих

Основные формулы

Всякую нормальную стационарную функцию $X(t)$ можно представить в виде ($\bar{x} = 0$)

$$X(t) = A(t) \cos \Phi(t),$$

где случайные функции $A(t)$ и $\Phi(t)$ являются взаимно независимыми.

Функция $X(t)$ с функцией $Y(t) = A(t) \sin \Phi(t)$ имеет корреляционную функцию связи, которая определяется через $S_x(\omega)$ соотношением

$$R_{xy}(\tau) = 2 \int_0^{\infty} S_x(\omega) \sin \omega\tau d\omega \equiv \sigma_x^2 r(\tau).$$

$R_{xy}(\tau)$ обращается в нуль при $\tau = 0$. Следовательно, для равных моментов времени функции $X(t)$ и $Y(t)$ не связаны, а так как они нормальны, то и независимы.

Законы распределения ординат функций $A(t)$ и $\Phi(t)$ однозначно определяются корреляционной функцией $K_x(\tau) = \sigma_x^2 k(\tau)$ по формулам:

одномерные плотности распределения

$$f(a) = \frac{a}{\sigma_x^2} e^{-\frac{a^2}{2\sigma_x^2}},$$

$$f(\varphi) = \frac{1}{2\pi}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi;$$

двумерные плотности распределения

$$f(a_1, a_2) = \frac{a_1 a_2}{\sigma_x^4 q^2} e^{-\frac{a_1^2 + a_2^2}{2\sigma_x^2 q^2}} I_0\left(\frac{a_1 a_2 \sqrt{1-q^2}}{\sigma_x^2 q^2}\right),$$

$$f(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{q^2}{4\pi^2} \left[\frac{1}{1-\kappa^2} + \frac{\kappa}{(1-\kappa^2)^{3/2}} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \kappa \right) \right],$$

где a_1, φ_1 и a_2, φ_2 — значения амплитуды и фазы огибающей в моменты времени t и $t + \tau$, $q^2 = 1 - k^2(\tau) - r^2(\tau)$, $\kappa = \kappa(\tau) = \sqrt{1 - q^2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1 - \gamma)$, $\gamma = \gamma(\tau) = \arctg \frac{r(\tau)}{k(\tau)}$, а $I_0(z)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка от мнимого аргумента.

Следствием приведенных выше формул являются условные законы распределения

$$f(a_2 | a_1) = \frac{a_2}{\sigma_x^2 q^2} e^{-\frac{a_2^2}{2\sigma_x^2 q^2}} I_0\left(\frac{a_1 a_2 \sqrt{1-q^2}}{\sigma_x^2 q^2}\right) e^{-\frac{a_1^2(1-q^2)}{2\sigma_x^2 q^2}},$$

$$f(\varphi_2 | \varphi_1) = \frac{q^2}{2\pi} \left[\frac{1}{1-\kappa^2} + \frac{\kappa}{(1-\kappa^2)^{3/2}} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \kappa \right) \right]$$

и формула для корреляционной функции

$$K_a(\tau) = \sigma_x^2 \left[2E(1-q^2) - q^2 K(1-q^2) - \frac{\pi}{2} \right],$$

где $K(k^2)$ и $E(k^2)$ — обозначения полных эллиптических интегралов первого и второго рода:

$$K(k^2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

$$E(k^2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi.$$

Четырехмерный и двумерные законы распределения амплитуды, огибающей, ее фазы и соответствующих скоростей имеют вид:

$$f(a, \dot{a}, \varphi, \dot{\varphi}) = \frac{a^2}{4\pi^2 (\omega_2^2 - \omega_1^2) \sigma_x^2} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_x^2 (\omega_2^2 - \omega_1^2)} [\dot{a}^2 + a^2 (\omega_2^2 - 2\omega_1 \dot{\varphi} + \dot{\varphi}^2)] \right\},$$

$$f(a, \dot{\varphi}) = \frac{a^2}{\sigma_x^2 \sqrt{2\pi} \sqrt{\omega_2^2 - \omega_1^2}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{a^2}{2\sigma_x^2 (\omega_2^2 - \omega_1^2)} (\omega_2^2 - 2\omega_1 \dot{\varphi} + \dot{\varphi}^2) \right\},$$

$$f(\dot{a}, \varphi) = \frac{1}{\sigma_x (2\pi)^{3/2} \sqrt{\omega_2^2 - \omega_1^2}} \exp \left\{ -\frac{\dot{a}^2}{2\sigma_x^2 (\omega_2^2 - \omega_1^2)} \right\},$$

$$f(a, \dot{a}) = f(a) f(\dot{a}),$$

$$f(\varphi, \dot{\varphi}) = f(\varphi) f(\dot{\varphi}),$$

$$f(\dot{a}) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi} \sqrt{\omega_2^2 - \omega_1^2}} \exp \left\{ -\frac{\dot{a}^2}{2\sigma_x^2 (\omega_2^2 - \omega_1^2)} \right\},$$

$$f(\dot{\varphi}) = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2 [(\dot{\varphi} - \omega_1)^2 + (\omega_2^2 - \omega_1^2)]^{3/2}},$$

где

$$\omega_1^2 = \frac{2}{\sigma_x^2} \int_0^{\infty} S_x(\omega) \omega d\omega,$$

$$\omega_2^2 = \frac{2}{\sigma_x^2} \int_0^{\infty} S_x(\omega) \omega^2 d\omega.$$

Вероятность того, что $\dot{\varphi}$ больше нуля, определяется равенством

$$P(\dot{\varphi} \geq 0) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\omega_1}{\omega_2} \right).$$

Аналогичным образом

$$P(\dot{\varphi} \leq 0) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2} \right).$$

При узкополосном спектре случайной функции $X(t)$ величина $\Delta^2 = \omega_2^2 - \omega_1^2$ мала сравнительно с ω_1^2 и некоторые из вышеприведенных формул могут быть упрощены путем разложения соответствующих выражений по степеням малого отношения $\frac{\Delta}{\omega_1}$. В частности, при узкополосном спектре дисперсии $D[\dot{A}(t)]$ и $D[\dot{\Phi}(t)]$ становятся малыми, а так как $M[A(t)] = 0$, $M[\Phi(t)] = \omega_1 t$, то при дифференцировании случайной функции $X(t) = A(t) \cos \Phi(t)$ в ряде случаев $\dot{A}(t)$ можно считать равной нулю, а $\dot{\Phi}(t)$ заменять на ω_1 .

При узкополосном спектре для плотности вероятности времени пребывания τ случайной функции выше (ниже) нулевого уровня («закона распределения полупериода») имеет место приближенное выражение

$$f(\tau) \approx \frac{\pi \Delta^2 \tau}{2 [(\pi - \omega_1 \tau)^2 + \Delta^2 \tau^2]^{3/2}},$$

точность которого тем выше, чем меньше отношение $\frac{\Delta}{\omega_1}$.

Решение типовых примеров

Пример 37.1. Определить среднее число выбросов в единицу времени случайной функции

$$\Theta(t) = \Phi(t) - \omega_1 t,$$

где $\Phi(t)$ — фаза нормальной случайной функции $X(t)$, если

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha |\tau|} (1 + \alpha |\tau|),$$

$$\omega_1 = \frac{2}{\sigma_x^2} \int_0^{\infty} S_x(\omega) \omega d\omega, \quad \alpha = 0,1 \text{ сек.}^{-1}.$$

Решение. Определяем спектральную плотность

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{2\alpha^3 \sigma_x^2}{\pi (\omega^2 + \alpha^2)^2}.$$

Следовательно,

$$\omega_1 = \frac{4\alpha^3}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega d\omega}{(\omega^2 + \alpha^2)^2} = \frac{2\alpha}{\pi}.$$

Применяя общую формулу для числа выбросов в единицу времени, получим

$$p = \int_0^{\infty} f(\theta, \dot{\theta})_{\theta=0} |\dot{\theta}| d\dot{\theta}.$$

Так как $\Theta(t) = \Phi(t) - \omega_1 t$, то Θ будет иметь равномерный закон распределения в интервале $(0, 2\pi)$, а закон распределения $f(\theta, \dot{\theta})$ может быть получен путем простой замены в законе распределения $f(\varphi, \dot{\varphi})$ $\dot{\varphi}$ через $\dot{\theta} + \omega_1$, т. е.

$$f(\theta, \dot{\theta}) = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{4\pi [\dot{\theta}^2 + (\omega_2^2 - \omega_1^2)]^{3/2}},$$

где

$$\omega_2^2 = \frac{2}{\sigma_x^2} \int_0^{\infty} S_x(\omega) \omega^2 d\omega = \alpha^2.$$

Подставляя $f(\theta, \dot{\theta})$ в формулу для p , получим

$$p = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\omega_2^2 - \omega_1^2} = \frac{\alpha \sqrt{\pi^2 - 4}}{4\pi^2} = 0,0061 \text{ сек.}^{-1}.$$

Задачи

37.1. Корреляционная функция определяется формулой

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha |\tau|}.$$

Считая $X(t)$ нормальной ($\bar{x} = 0$), определить корреляционную функцию амплитуды огибающей этой функции.

37.2. Какова вероятность того, что фаза огибающей нормальной случайной функции $X(t)$ будет уменьшаться, если

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha |\tau|} (1 + \alpha |\tau|), \quad \bar{x} = 0,$$

$$\alpha = 0,01; 0,10; 0,50 \text{ сек.}^{-1}?$$

37.3. Для стационарной нормальной случайной функции $X(t)$ определить вероятность того, что фаза будет увеличиваться (уменьшаться), если

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha |\tau|} \left(\cos \beta \tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta |\tau| \right).$$

37.4. Определить вероятность P того, что скорость изменения фазы огибающей будет больше

$$\omega_1 = \frac{2}{\sigma_x^2} \int_0^{\infty} S_x(\omega) \omega d\omega,$$

если

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right), \quad \bar{x} = 0.$$

37.5. Для нормальной случайной функции $X(t)$ определить закон распределения скорости изменения фазы, если

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau|), \quad \bar{x} = 0.$$

37.6. Определить закон распределения фазы нормальной случайной функции $X(t) - x$, для которой

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}.$$

37.7. Определить закон распределения скорости изменения фазы нормальной случайной функции $X(t)$, обладающей спектральной плотностью

$$S_x(\omega) = \frac{c^2}{(\omega^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}, \quad \bar{x} = 0.$$

37.8. Определить закон распределения огибающей и скорости изменения огибающей нормальной случайной функции $X(t)$, если

$$S_x(\omega) = \frac{2\alpha^3\sigma_x^2}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)^2}, \quad \bar{x} = 0.$$

37.9. В условиях предыдущей задачи определить условный закон распределения огибающей в момент времени $t + \tau$, если в момент времени t

$$A(t) = \sigma_x, \quad \tau = 2 \text{ сек.}, \quad \alpha = 0,1 \text{ сек.}^{-1}.$$

37.10. Найти приближенное выражение для закона распределения времени пребывания случайной функции ниже нулевого уровня, если

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-0,01|\tau|} \left(\cos 0,7\tau + \frac{1}{70} \sin 0,7|\tau| \right), \quad \bar{x} = 0.$$

37.11. Считая возможным пользоваться формулами для огибающей случайной функции с узкополосным спектром, найти закон распределения промежутков времени между последовательными моментами прохождения палубы корабля через положение равновесия, если угол крена $\Theta(t)$ — нормальная случайная функция, характеризуемая корреляционной функцией

$$K_{\Theta}(\tau) = \sigma_{\Theta}^2 e^{-0,11|\tau|} \left(\cos 0,7\tau + \frac{1}{7} \sin 0,7|\tau| \right), \quad \bar{\Theta} = 0,$$

а килевая качка отсутствует.

37.12. Определить среднее число выбросов в единицу времени случайной функции $A(t)$ за уровень $2\sigma_x$, если $A(t)$ — огибающая нормальной случайной функции $X(t)$, а

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau|), \quad \bar{x} = 0.$$

37.13. Определить среднее число выбросов амплитуды огибающей нормального случайного процесса $X(t)$ за уровень $2\sigma_x$, если

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(1 + \alpha|\tau| + \frac{1}{3} \alpha^2 \tau^2 \right), \quad \bar{x} = 0.$$

37.14. Определить условный закон распределения фазы нормальной случайной функции $X(t)$ в момент времени $t + \tau$, если в момент времени t фаза равнялась нулю, а

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right), \quad \bar{x} = 0.$$

Пренебрегая дисперсией амплитуды огибающей, определить дисперсию $X(t)$ в момент $\left(t + \frac{\pi}{\omega_1} \right)$, где

$$\omega_1 = \frac{2}{\sigma_x^2} \int_0^{\infty} S_x(\omega) \omega d\omega, \quad \alpha = 0,01 \text{ сек.}^{-1}, \quad \beta = 0,70 \text{ сек.}^{-1}$$

37.15. Определить корреляционную функцию связи двух нормальных стационарных случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ если

$$X(t) = A(t) \cos \Phi(t), \quad Y(t) = A(t) \sin \Phi(t),$$

$$K_x(\tau) = K_y(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right).$$

ГЛАВА VIII
МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

§ 38. Цепи Маркова

Основные формулы

Последовательность испытаний, в каждом из которых может произойти лишь одно событие из полной группы событий Q_1, Q_2, \dots, Q_m , образует цепь Маркова, если вероятность $p_{ij}(k)$ того, что при k -м испытании наступит событие Q_j при условии, что при $(k-1)$ -м испытании наступило событие Q_i , не зависит от того, какие события происходили при предыдущих испытаниях. События Q_1, Q_2, \dots, Q_m называются состояниями цепи Маркова или состояниями рассматриваемой системы, а k -е испытание можно рассматривать как изменение состояния в момент t_k .

В каждом столбце матрицы $\mathcal{P}_k = \|p_{ij}(k)\|$ имеется хотя бы один отличный от нуля элемент, причем вероятности перехода $p_{ij}(k)$ ($i, j = 1, 2, \dots, m$) при любом k удовлетворяют соотношению

$$\sum_{j=1}^m p_{ij}(k) = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Цепь Маркова конечная, если число состояний ограничено; неприводимая, когда каждое состояние достижимо из любого другого состояния; периодическая, если возвращение в любое состояние может происходить только через число шагов, кратное $\kappa > 1$.

Цепь Маркова называется однородной, если переходные вероятности $p_{ij}(k)$ не зависят от k , т. е. $p_{ij}(k) = p_{ij}$ ($i, j = 1, 2, \dots, m$).

Столбец $p(n) = \{p_1(n); p_2(n); \dots; p_m(n)\}$ абсолютных вероятностей того, что при n -м испытании система перейдет соответственно в состояния Q_1, Q_2, \dots, Q_m , определяется формулой

$$p(n) = (\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 \dots \mathcal{P}_n)' p(0),$$

а для однородной цепи

$$p(n) = (\mathcal{P}')^n p(0),$$

где штрих означает транспонированную матрицу, т. е. если $\mathcal{P} = \|p_{ij}\|$, то $\mathcal{P}' = \|p_{ji}\|$.

При любых n , но относительно небольших m для вычисления \mathcal{P}^n можно использовать формулу Лагранжа — Сильвестра, которая при простых характеристических числах $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ (корнях уравнения $|\lambda \mathcal{E} - \mathcal{P}| = 0$, где \mathcal{E} — единичная матрица) имеет вид

$$\mathcal{P}^n = \sum_{k=1}^m \frac{(\mathcal{P} - \lambda_1 \mathcal{E}) \dots (\mathcal{P} - \lambda_{k-1} \mathcal{E}) (\mathcal{P} - \lambda_{k+1} \mathcal{E}) \dots (\mathcal{P} - \lambda_m \mathcal{E})}{(\lambda_k - \lambda_1) \dots (\lambda_k - \lambda_{k-1}) (\lambda_k - \lambda_{k+1}) \dots (\lambda_k - \lambda_m)} \lambda_k^n.$$

В общем случае при вычислении \mathcal{P}^n удобно использовать возможность приведения матрицы \mathcal{P} к нормальной форме $\mathcal{P} = H J H^{-1}$, где J — диагональная или квазидиагональная матрица, которая зависит только от характеристических чисел матрицы \mathcal{P} . При простых характеристических числах $J = \|\delta_{ik} \lambda_k\|$, где $\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$, а $\delta_{kk} = 1$. Элементы матриц H и H^{-1} являются решениями алгебраических уравнений, которые в матричной форме имеют вид $\mathcal{P} H = H J$, $H^{-1} \mathcal{P} = J H^{-1}$, $H H^{-1} = \mathcal{E}$. Тогда $\mathcal{P}^n = H J^n H^{-1}$, где при простых характеристических числах $J^n = \|\delta_{ik} \lambda_k^n\|$.

Элементы $p_{ij}^{(n)}$ матрицы \mathcal{P}^n определяются также по формуле Перрона

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{s=1}^r \frac{1}{(v_s - 1)!} \left\{ \frac{d^{v_s-1}}{d\lambda^{v_s-1}} \left[\frac{\lambda^n A_{ji}(\lambda) (\lambda - \lambda_s)^{v_s}}{|\lambda \mathcal{E} - \mathcal{P}|} \right] \right\}_{\lambda = \lambda_s},$$

где r — число различных характеристических чисел, v_s — их кратности $\left(\sum_{s=1}^r v_s = m \right)$, а $A_{ji}(\lambda)$ — алгебраическое дополнение для элемента $\lambda \delta_{ji} - p_{ji}$ в определителе $|\lambda \mathcal{E} - \mathcal{P}|$.

Матрица $\mathcal{P}^\infty = \| p_{ij}^{(\infty)} \|$ предельных вероятностей перехода и столбец $p(\infty) = (\mathcal{P}^\infty)' p(0)$ предельных абсолютных вероятностей могут быть получены из соответствующих выражений непосредственным переходом к пределу при $n \rightarrow \infty$. Пределы существуют только в том случае, если $|\lambda_s| < 1$ при $s = 2, 3, \dots, r$ (для матриц вероятностей перехода всегда $|\lambda_s| \leq 1$, причем одно характеристическое число λ_1 равно единице). При этом

$$\mathcal{P}^\infty = v_1 \left\{ \frac{\frac{d^{v_1-1}}{d\lambda^{v_1-1}} [(\lambda \mathcal{E} - \mathcal{P})^{-1} | \lambda \mathcal{E} - \mathcal{P} |]}{\frac{d^{v_1}}{d\lambda^{v_1}} | \lambda \mathcal{E} - \mathcal{P} |} \right\}_{\lambda=1}$$

где v_1 — кратность характеристического числа $\lambda_1 = 1$.

При $v_1 = 1$ в матрице \mathcal{P}^∞ все m строк одинаковые, а элементы столбца $p(\infty)$ совпадают с соответствующими элементами любой строки, т. е.

$$p_j(\infty) = p_{ij}^{(\infty)} = p_j^{(\infty)} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m).$$

В этом случае вероятности $p_j^{(\infty)}$ могут быть определены также из решения алгебраической системы

$$\sum_{i=1}^m p_{ij} p_i^{(\infty)} = p_j^{(\infty)} \quad (j = 1, 2, \dots, m), \quad \text{причем} \quad \sum_{j=1}^m p_j^{(\infty)} = 1.$$

Если конечная цепь Маркова неприводима и неперiodическая, то для определения вероятностей $p_j^{(\infty)}$ можно использовать последние уравнения. Когда число состояний $m = \infty$, цепь Маркова неприводима и неперiodическая, а система линейных уравнений $\sum_{i=1}^{\infty} u_i p_{ij} = u_j \quad (j = 1, 2, \dots)$ имеет ненулевое решение, для которого $\sum_{i=1}^{\infty} |u_i| < \infty$, вероятности $p_j^{(\infty)}$ ($p_j^{(\infty)} > 0, j = 1, 2, \dots$) находятся как решение системы $\sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} p_i^{(\infty)} = p_j^{(\infty)} \quad (j = 1, 2, \dots)$, где $\sum_{j=1}^{\infty} p_j^{(\infty)} = 1$.

Если можно выделить группу состояний системы так, чтобы был невозможным переход из любого состояния этой

группы в любое из оставшихся состояний системы, то эту группу можно рассматривать как самостоятельную цепь Маркова. Группа может состоять из одного состояния Q_k ; при этом $p_{kk} = 1$, а Q_k — состояние поглощения.

В общем случае из состояний Q_1, Q_2, \dots, Q_m можно выделить независимые друг от друга группы C_1, C_2, \dots, C_h состояний, называемых существенными; оставшиеся состояния образуют группу T несущественных состояний. При соответствующей нумерации состояний матрица \mathcal{P} приводится к виду

$$\mathcal{P} = \begin{vmatrix} R_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & R_h & \dots & 0 \\ U & & & & & W \end{vmatrix},$$

где R_1, R_2, \dots, R_h — матрицы вероятностей перехода групп состояний C_1, C_2, \dots, C_h ; W — квадратная матрица, соответствующая несущественным состояниям группы T , а U — ненулевая (при наличии несущественных состояний) в общем случае прямоугольная матрица.

Если все характеристические числа матриц R_1, R_2, \dots, R_h , кроме точно равных единице, по модулю меньше единицы, то

$$\mathcal{P}^\infty = \begin{vmatrix} R_1^\infty & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_2^\infty & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & R_h^\infty & \dots & 0 \\ U_\infty & & & & & 0 \end{vmatrix},$$

где U_∞ — некоторая прямоугольная матрица.

Пусть в матрице \mathcal{P} $h = 1$, т. е. имеется одна группа C состояний поглощения. Если цепь Маркова из состояний этой группы неперiodическая, то вероятности p_{*j} перехода системы из несущественного состояния Q_j в группу C существенных состояний находятся с помощью уравнений

$$p_{*j} = \sum_T p_{jv} p_{*v} + \sum_C p_{jr}.$$

где в первом слагаемом суммирование ведется по номерам несущественных состояний, а во втором — по номерам существенных состояний.

Пусть κ_j ($j=1, 2, \dots, h$) — число характеристических чисел (с учетом их кратности) матрицы R_j , не равных точно единице, но по модулю равных единице. Наименьшее общее кратное этих чисел является периодом κ цепи Маркова. Если цепь неприводимая, то все состояния периодической цепи можно разбить на группы $G_0, G_1, \dots, G_{\kappa-1}$ так, что переход из состояния, входящего в G_r , за один шаг всегда приводит к состоянию, входящему в G_{r+1} ($G_\kappa = G_0$). В цепи Маркова с матрицей \mathcal{P}^κ каждую группу G_r можно рассматривать как самостоятельную цепь. Существуют пределы при $r=0, 1, \dots, \dots, \kappa-1$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{jk}^{(n\kappa+r)} = \begin{cases} p_{k,\kappa} & \text{если } Q_j \text{ из } G_\nu, \text{ а } Q_k \text{ из } G_{\nu+r}, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

при этом вероятности $p_{k,\kappa}$ определяются, как при $\kappa=0$.

В общем случае также существуют матрица $(\mathcal{P}^\kappa)^\infty$ и матрицы $\mathcal{P}_r = \mathcal{P}^r (\mathcal{P}^\kappa)^\infty$ ($r=0, 1, \dots, \kappa-1$). Матрица $\hat{\mathcal{P}} = \|\hat{p}_{ij}\|$ средних предельных вероятностей перехода определяется формулой

$$\hat{\mathcal{P}} = \frac{1}{\kappa} (\mathcal{P} + \mathcal{P} + \dots + \mathcal{P}^{\kappa-1}) (\mathcal{P}^\kappa)^\infty.$$

Столбец \hat{p} средних предельных абсолютных вероятностей равен $\hat{p} = \hat{\mathcal{P}}' p(0)$. Если в матрице \mathcal{P} $h=1$, то средние предельные абсолютные вероятности \hat{p}_j ($j=1, 2, \dots, m$)

однозначно определяются равенствами: $\mathcal{P}' \hat{p} = \hat{p}, \sum_{j=1}^m \hat{p}_j = 1$.

Решение типовых примеров

Пример 38.1. Из таблицы случайных чисел, содержащей все целые числа от 1 до m включительно, выбираются числа наудачу. Система находится в состоянии Q_j , если наибольшее из выбранных чисел равно j ($j=1, 2, \dots, m$). Найти вероятности $p_{ik}^{(n)}$ ($i, k=1, 2, \dots, m$) того, что после

выбора из этой таблицы n случайных чисел наибольшее число будет равно k , если раньше им было число l .

Решение. В таблице случайных чисел любое число от 1 до m равновозможно, поэтому переход из состояния Q_1 (наибольшее выбранное число равно единице) в любое состояние Q_j равновероятен. Тогда $p_{1j} = \frac{1}{m}$ ($j = 1, 2, \dots, m$). Из состояния Q_2 в Q_1 переход невозможен, поэтому $p_{21} = 0$. В состоянии Q_2 можно остаться в двух случаях, когда очередное выбираемое число равно 1 или 2, поэтому $p_{22} = \frac{2}{m}$, $p_{2j} = \frac{1}{m}$ ($j = 3, 4, \dots, m$). В общем случае получаем

$$p_{ii} = \frac{i}{m}; \quad p_{ij} = 0 \text{ при } i > j; \quad p_{ij} = \frac{1}{m} \text{ при } i < j \\ (i, j = 1, 2, \dots, m).$$

Матрица вероятностей перехода записывается в виде

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m} & \frac{1}{m} & \frac{1}{m} & \dots & \frac{1}{m} & \frac{1}{m} \\ 0 & \frac{2}{m} & \frac{1}{m} & \dots & \frac{1}{m} & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 & \frac{3}{m} & \dots & \frac{1}{m} & \frac{1}{m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{m-1}{m} & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение

$$|\lambda \mathcal{E} - \mathcal{P}| = \prod_{k=1}^m \left(\lambda - \frac{k}{m} \right) = 0$$

имеет простые корни $\lambda_k = \frac{k}{m}$ ($k = 1, 2, \dots, m$). Для определения вероятностей $p_{ik}^{(n)}$, являющихся элементами матрицы \mathcal{P}^n , воспользуемся формулой Перрона. Алгебраические

дополнения $A_{ki}(\lambda)$ элементов определителя $|\lambda \mathcal{L} - \mathcal{P}|$ следующие:

$$\text{при } i > k \quad A_{ki}(\lambda) = 0; \quad A_{kk}(\lambda) = \frac{|\lambda \mathcal{L} - \mathcal{P}|}{\lambda - \frac{k}{m}};$$

$$\begin{aligned} \text{при } i < k \quad A_{ki}(\lambda) &= \frac{1}{m} \prod_{v=1}^{k-2} \left(\lambda - \frac{v}{m} \right) \prod_{r=k+1}^m \left(\lambda - \frac{r}{m} \right) = \\ &= \frac{|\lambda \mathcal{L} - \mathcal{P}|}{m \left(\lambda - \frac{k}{m} \right) \left(\lambda - \frac{k-1}{m} \right)}. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в формулу Перрона, получаем

$$p_{ik}^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{при } i > k, \\ \left(\frac{k}{m} \right)^n & \text{при } i = k, \\ \left(\frac{k}{m} \right)^n - \left(\frac{k-1}{m} \right)^n & \text{при } i < k. \end{cases}$$

Аналогично решаются задачи 38.3—38.10.

Пример 38.2. Автомат для продажи билетов в метро может работать при получении монет достоинством в 5 коп. и 10 коп. В первом случае автомат выдает билет, если приемник, вмещающий m пятикопеечных монет, не заполнен, и выключается в противном случае. При получении десятикопеечной монеты автомат выдает билет и 5 коп. сдачи, если в приемнике имеется хотя бы одна пятикопеечная монета. В противном случае автомат также выключается. Известно, что монеты по 5 коп. и по 10 коп. в автомат поступают с вероятностями p и $q = 1 - p$. Определить вероятности $p_{ik}^{(n)}$ ($i, k = 0, 1, \dots, m$) того, что после n требований билета в автомате будет k пятикопеечных монет, если их начальный запас в автомате был равен i .

Решение. Пусть состояние Q_j означает, что в приемнике автомата имеется j пятикопеечных монет ($j = 0, 1, \dots, m$). При $1 \leq j \leq m - 1$ возможен переход из Q_j в Q_{j+1} с вероятностью p и в Q_{j-1} с вероятностью q . При достижении состояний Q_0 или Q_m , которые являются состояниями поглощения, автомат отключается. Поэтому $p_{00} = 1, p_{mm} = 1, p_{j, j+1} = p, p_{j, j-1} = q$ ($j = 1, 2, \dots, m - 1$).

Матрица вероятностей перехода имеет вид

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ U & W & V \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где W — квадратная матрица порядка $m-1$, а U и V — столбцы порядка $m-1$;

$$W = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & \dots & 0 & 0 \\ q & 0 & p & \dots & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} q \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ p \end{pmatrix},$$

причем матрица W соответствует несущественным состояниям Q_1, Q_2, \dots, Q_{m-1} .

Искомые вероятности являются элементами матрицы

$$\mathcal{P}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ U_n & W^n & V_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

поэтому $p_{00}^{(n)} = 1$, $p_{mm}^{(n)} = 1$, $p_{0r}^{(n)} = 0$ ($r = 1, 2, \dots, m$), $p_{mj}^{(n)} = 0$ ($j = 0, 1, \dots, m-1$).

Чтобы определить элементы матрицы W^n , составим характеристическое уравнение $\Delta_{m-1} = |\lambda \mathcal{E} - W| = 0$. Для определителей такого вида справедливо следующее рекуррентное соотношение:

$$\Delta_k = \lambda \Delta_{k-1} - pq \Delta_{k-2} \quad (k = 2, 3, \dots, m-1),$$

причем $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = \lambda$. Тогда

$$\Delta_{m-1} = \lambda^{m-1} - C_{m-2}^1 pq \lambda^{m-3} + C_{m-3}^2 (pq)^2 \lambda^{m-5} - \dots = 0.$$

Последний член получившегося уравнения равен $(-1)^{\frac{m-1}{2}} (pq)^{\frac{m-1}{2}}$ при нечетном m и $(-1)^{\frac{m-2}{2}} \frac{m}{2} (pq)^{\frac{m-2}{2}} \lambda$ при четном m .

Если произвести подстановку $\lambda = \sqrt{pq} \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right)$, то уравнение $\Delta_{m-1} = 0$ можно записать в виде

$$\Delta_{m-1} = \left(\frac{pq}{\mu^2} \right)^{\frac{m-1}{2}} \frac{1 - \mu^{2m}}{1 - \mu^2}.$$

Отсюда следует, что $\mu_k = e^{i \frac{k\pi}{m}}$ ($k = 1, 2, \dots, m-1$). Поэтому характеристические числа будут $\lambda_k = 2 \sqrt{pq} \cos \frac{k\pi}{m}$ ($k = 1, 2, \dots, m-1$).

Матрица W может быть приведена к виду $W = HJH^{-1}$, где $J = \left\| 2 \sqrt{pq} \cos \frac{k\pi}{m} \delta_{jk} \right\|$, а $H = \| h_{jk} \|$ — пока неизвестная матрица.

Матричное равенство $WH = HJ$ эквивалентно следующим уравнениям:

$$ph_{2,k} = h_{1,k} \lambda_k, \quad qh_{m-2,k} = h_{m-1,k} \lambda_k,$$

$$qh_{j-1,k} + ph_{j+1,k} = h_{j,k} \lambda_k$$

$$(j = 2, 3, \dots, m-2; \quad k = 1, 2, \dots, m-1).$$

С точностью до общего множителя решением этой системы являются элементы $h_{jk} = \left(\frac{q}{p} \right)^{j/2} \sin \frac{kj\pi}{m}$ ($k, j = 1, 2, \dots, m-1$). Поэтому матрица $H = \left\| \left(\frac{q}{p} \right)^{j/2} \sin \frac{kj\pi}{m} \right\|$.

Обратную матрицу H^{-1} можно записать в виде $H^{-1} = \| h_{jk}^{(-1)} \| = \left\| C_k \left(\frac{p}{q} \right)^{k/2} \sin \frac{jk\pi}{m} \right\|$. Из условия $HH^{-1} = \mathcal{E}$ находим $C_k = \frac{2}{m}$ ($k = 1, 2, \dots, m-1$). Используя равенство

$W^n = HJ^n H^{-1}$, получаем

$$p_{ik}^{(n)} = \sum_{j=1}^{m-1} h_{ij} \lambda_j^n h_{jk}^{(-1)} =$$

$$= \frac{2^{n+1}}{m} p^{\frac{1}{2}(n+k-l)} q^{\frac{1}{2}(n-k+l)} \sum_{j=1}^{m-1} \cos \frac{j\pi}{m} \sin \frac{ij\pi}{m} \sin \frac{jk\pi}{m}$$

($l, k = 1, 2, \dots, m-1$).

Для определения элементов $p_{j0}^{(n)}$ ($j = 1, 2, \dots, m-1$) столбца U_n воспользуемся формулой Перрона. Характеристическим многочленом матрицы \mathcal{P} будет $|\lambda \mathcal{L} - \mathcal{P}| = (\lambda - 1)^2 \prod_{k=1}^{m-1} (\lambda - \lambda_k)$. Для алгебраических дополнений $A_{0j}(\lambda)$ элементов определителя $|\lambda \mathcal{L} - \mathcal{P}|$ получаются следующие выражения:

$$A_{0j}(\lambda) = q^j (\lambda - 1) \prod_{k=1}^{m-j-1} \left(\lambda - 2 \sqrt{pq} \cos \frac{k\pi}{m-j} \right)$$

($j = 1, 2, \dots, m-2$),

$$A_{0, m-1}(\lambda) = q^{m-1} (\lambda - 1).$$

Тогда

$$p_{j0}^{(n)} = \frac{A_{0j}'(1)}{\prod_{k=1}^{m-1} (1 - \lambda_k)} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\lambda_k^n A_{0j}(\lambda_k)}{(\lambda_k - 1)^2 \prod_{\substack{v=1 \\ v \neq k}}^{m-1} (\lambda_k - \lambda_v)},$$

где звездочка означает, что из произведения нужно выбросить множитель при $k = v$.

Вероятности $p_{jm}^{(n)}$ ($j = 1, 2, \dots, m-1$) вычисляются аналогично. Для их определения можно также воспользоваться равенствами

$$p_{jm}^{(n)} = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} p_{jk}^{(n)} \quad (j = 1, 2, \dots, m-1).$$

Аналогично решаются задачи 38.11—38.14.

Пример 38.3. Препарат облучается потоком радиоактивных частиц через равные интервалы времени Δt . Вероят-

ность того, что за время облучения препарат поглотит r радиоактивных частиц, определяется формулой $\beta_r = \frac{a^r}{r!} e^{-a}$.

Каждая радиоактивная частица, содержащаяся в препарате, за время между двумя последовательными облучениями может распасться с вероятностью q . Определить предельные вероятности числа частиц в препарате.

Решение. Пусть состояние Q_i означает, что после очередного облучения препарат будет содержать i радиоактивных частиц ($i=0, 1, \dots$). За интервал времени Δt переход из состояния Q_i в Q_k произойдет в том случае, если $i-v$ частиц ($v=0, 1, \dots, i$) распадутся, а $k-v$ ($k \geq v$) будут поглощены препаратом. Вероятности перехода

$$p_{ik} = \sum_{v=0}^{i(k)} C_i^v p^v q^{i-v} \frac{a^{k-v}}{(k-v)!} e^{-a} \quad (i, k=0, 1, \dots),$$

где $p=1-q$, а суммирование производится до i , если $i \leq k$, и до k , если $k < i$.

В препарате возможно нахождение любого числа частиц, т. е. все состояния системы достижимы. Поэтому цепь Маркова неприводимая. Так как вероятности p_{ii} отличны от нуля, то цепь неперiodическая.

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_i p_{ij} = u_j \quad (j=0, 1, \dots).$$

Положим

$$G(z) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j z^j.$$

Умножив обе части системы на z^j , просуммировав по j от 0 до ∞ и применив формулу $n-1$ раз, получим

$$G(z) = e^{a(z-1)} G[1 + (z-1)p] = e^{a(z-1)(1+p+p^2+\dots+p^{n-1})} G[1 + (z-1)p^n].$$

Отсюда находим

$$G(z) = e^{\frac{a}{q}(z-1)} G(1) = e^{-\frac{a}{q}} G(1) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a}{q}z\right)^j}{j!}.$$

Из сравнения двух выражений для $G(z)$ получаем

$$u_j = e^{-\frac{a}{q}} G(1) \frac{\left(\frac{a}{q}\right)^j}{j!} \quad (j=0, 1, \dots).$$

Так как $\sum_{j=0}^{\infty} |u_j| = |G(1)|$, а произвольную постоянную $G(1)$ можно взять отличной от нуля и бесконечности, то алгебраическая система имеет ненулевое решение, причем ряд $\sum_{j=0}^{\infty} |u_j|$ сходится. Поэтому $p_i^{(\infty)}$ могут быть найдены из системы $\sum_{i=0}^{\infty} p_{ij} p_i^{(\infty)} = p_j^{(\infty)}$ ($j=0, 1, \dots$). Система для $p_i^{(\infty)}$ аналогична решенной выше системе для u_j , следовательно,

$$p_j^{(\infty)} = e^{-\frac{a}{q}} G(1) \frac{\left(\frac{a}{q}\right)^j}{j!} \quad (j=0, 1, \dots).$$

Так как $\sum_{j=0}^{\infty} p_j^{(\infty)} = 1$, то $G(1) = 1$, поэтому искомые вероятности

$$p_j^{(\infty)} = \frac{\left(\frac{a}{q}\right)^j}{j!} e^{-\frac{a}{q}} \quad (j=0, 1, \dots).$$

Аналогично решаются задачи 38.16—38.22.

Пример 38.4. Число X дефектных изделий в каждой независимой выборке объема N из бесконечно большой партии подчиняется биномиальному закону, т. е. $P(X=k) = p_k = C_N^k p^k q^{N-k}$ ($k=0, 1, \dots, N$), $q=1-p$. Если при очередной выборке получено r дефектных изделий, то считается, что по условиям приема партия изменила свое предыдущее состояние Q_v на Q_{v+r-1} , причем партия бракуется, если $v+r-1 \geq m$, и принимается, когда $v+r-1=0$. Определить вероятности того, что партия будет принята, если начальное состояние партии по условиям приема Q_j ($j=1, 2, \dots, m-1$).

Решение. Возможны $m+1$ состояний партии Q_i ($i=0, 1, \dots, m$). При достижении состояния Q_0 партия принимается, а при достижении Q_m — бракуется. Так как эти

два состояния являются состояниями поглощения, то $p_{00} = 1$, $p_{mm} = 1$. Когда $i \neq 0$ и $i \neq m$, $p_{i, i+j-1} = p_j$ ($j = 0, 1, \dots, \dots, m-i$), $p_{im} = 1 - \sum_{j=0}^{m-i} p_j$ ($i = 1, 2, \dots, m-1$).

Матрица вероятностей перехода

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_{m-2} & p_{m-1} & p_{1,m} \\ 0 & p_0 & p_1 & p_2 & \dots & p_{m-3} & p_{m-2} & p_{2,m} \\ 0 & 0 & p_0 & p_1 & \dots & p_{m-4} & p_{m-3} & p_{3,m} \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & p_1 & p_2 & p_{m-2,m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & p_0 & p_1 & p_{m-1,m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Искомые вероятности p_{*j} ($j = 1, 2, \dots, m-1$) являются вероятностями перехода из несущественных состояний Q_1, Q_2, \dots, Q_{m-1} в существенное состояние Q_0 и определяются с помощью алгебраической системы

$$p_{*j} = \sum_{v=1}^{m-1} p_{jv} p_{*v} + p_{j0} \quad (j = 1, 2, \dots, m-1),$$

которую можно записать в виде

$$(p_1 - 1) p_{*1} + \sum_{k=2}^{m-1} p_k p_{*k} = -p_0,$$

$$p_0 p_{*,r-1} + (p_1 - 1) p_{*r} + \sum_{k=r+1}^{m-1} p_k p_{*k} = 0$$

$$(r = 2, 3, \dots, m-1).$$

Определитель Δ_{m-1} этой системы находится с помощью рекуррентной формулы

$$\Delta_{m-r} = (p_1 - 1) \Delta_{m-r-1} - \sum_{j=2}^{m-r} (-1)^j p_j p_0^{j-1} \Delta_{m-r-j}$$

$$(r = 1, 2, \dots, m-1).$$

где $\Delta_0 = 1$. Искомые вероятности определяются равенствами

$$p_{*j} = (-1)^j p_0 \frac{\Delta_{m-j-1}}{\Delta_{m-1}} \quad (j = 1, 2, \dots, m-1).$$

Аналогично решаются задачи 38.23—38.25.

Пример 38.5. Автомашина используется для перевозки грузов между $2m$ пунктами, которые расположены на кольцевой трассе. Грузы перевозятся из каждого пункта только в следующий с вероятностью p или в предыдущий с вероятностью $q = 1 - p$. Определить вероятности $p_{jk}^{(n)}$ ($j, k = 1, 2, \dots, 2m$) того, что после n перевозок автомашина из j -го пункта перейдет в k -й. Найти эти вероятности при $n \rightarrow \infty$ и вычислить средние предельные вероятности перехода.

Решение. Пусть нахождение автомашины в j -м пункте — состояние Q_j ($j = 1, 2, \dots, 2m$). Вероятности перехода:

$$p_{j, j+1} = p \quad (j = 1, 2, \dots, 2m-1),$$

$$p_{j, j-1} = q \quad (j = 2, 3, \dots, 2m-1),$$

$$p_{2m, 1} = p, \quad p_{1, 2m} = q.$$

Матрица вероятностей перехода

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & q \\ q & 0 & p & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q & 0 & p \\ p & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & q & 0 \end{pmatrix}.$$

Введем матрицу $H = \|h_{jk}\| = \|e^{(j-1)(k-1)}\|$ порядка $2m$, в которой $\varepsilon = e^{2\pi i/m}$. Непосредственным перемножением получаем, что $\mathcal{P}H = H \|(p\varepsilon^{k-1} + q\varepsilon^{-(k-1)})\delta_{jk}\|$, поэтому характеристическими числами матрицы \mathcal{P} будут $\lambda_k = p\varepsilon^{k-1} + q\varepsilon^{-(k-1)}$ ($k = 1, 2, \dots, 2m$).

Наибольшие по абсолютной величине характеристические числа $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_{m+1} = -1$ простые, поэтому цепь периоди-

ческая с периодом $\kappa = 2$. Обратная матрица $H^{-1} = \|h_{jk}^{(-1)}\| =$
 $= \frac{1}{2m} \| \varepsilon^{-(j-1)(k-1)} \|.$

Из равенства $\mathcal{P}^n = HJ^nH^{-1}$, где $J^n = \|\lambda_k^n \delta_{jk}\|$, находим

$$p_{jk}^{(n)} = \frac{1}{2m} \sum_{v=1}^{2m} [p\varepsilon^{(v-1)} + q\varepsilon^{-(v-1)}]^n \varepsilon^{(v-1)(j-k)},$$

что можно записать в виде

$$p_{jk}^{(n)} = \frac{1}{2m} [1 + (-1)^{n+j-k}] \sum_{v=1}^m [p\varepsilon^{v-1} + q\varepsilon^{-(v-1)}]^n \varepsilon^{(v-1)(j-k)}$$

$(j, k = 1, 2, \dots, 2m).$

В сумме все слагаемые, кроме первого, по модулю меньше единицы, поэтому при $n \rightarrow \infty$

$$p_{jk}^{(n)} \rightarrow \frac{1}{2m} [1 + (-1)^{n+j-k}].$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{jk}^{(2n)} = \begin{cases} \frac{1}{m}, & \text{если } j+k \text{ — четное число,} \\ 0, & \text{если } j+k \text{ — нечетное число;} \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{jk}^{(2n+1)} = \begin{cases} \frac{1}{m}, & \text{если } j+k \text{ — нечетное число,} \\ 0, & \text{если } j+k \text{ — четное число.} \end{cases}$$

Последние равенства можно записать, не используя выражение для $p_{jk}^{(n)}$, так как цепь неприводимая, а переход за один шаг из группы C_0 состояний с нечетными номерами всегда приводит к группе C_1 состояний с четными номерами и наоборот.

Средние предельные вероятности перехода

$$\hat{p}_{jk} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (p_{jk}^{(2n)} + p_{jk}^{(2n+1)}) = \frac{1}{2m} \quad (j, k = 1, 2, \dots, 2m).$$

Аналогично решаются задачи 38.26, 38.27.

Пример 38.6. При обсуждении основных положений кинетической теории материи Эренфестом была предложена следующая модель: m молекул, распределенных в двух

резервуарах, случайно по одной перемещаются из своего резервуара в другой. Найти средние предельные абсолютные вероятности числа молекул в первом резервуаре.

Решение. Пусть состояние Q_i заключается в том, что в первом резервуаре i молекул ($i=0, 1, \dots, m$). Тогда $p_{i, i-1} = \frac{i}{m}$, $p_{i, i+1} = 1 - \frac{i}{m}$ ($i=0, 1, \dots, m$). Матрица вероятностей перехода записывается в виде

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & 1 - \frac{1}{m} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{m} & 0 & 1 - \frac{2}{m} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из любого состояния Q_i возвращение в Q_i возможно лишь за число шагов, кратное двум. Поэтому в данном случае цепь Маркова периодическая с периодом $\kappa=2$. Цепь неприводимая, так как каждое состояние достижимо из любого другого состояния.

Столбец \hat{p} средних предельных абсолютных вероятностей определяется из условия $\mathcal{P}'\hat{p} = \hat{p}$, т. е.

$$\frac{1}{m} \hat{p}_1 = \hat{p}_0, \quad \left(1 - \frac{k-1}{m}\right) \hat{p}_{k-1} + \frac{k+1}{m} \hat{p}_{k+1} = \hat{p}_k, \\ \hat{p}_m = \frac{1}{m} \hat{p}_{m-1} \\ (k=1, 2, \dots, m-1).$$

Отсюда находим $\hat{p}_k = \hat{p}_0 C_m^k$. Используя равенство $\sum_{k=0}^m \hat{p}_k = 1$,

получаем $\frac{1}{\hat{p}_0} = \sum_{k=0}^m C_m^k = 2^m$; поэтому искомые вероятности

$$\hat{p}_k = \frac{1}{2^m} C_m^k \quad (k=0, 1, \dots, m).$$

Аналогично решаются задачи 38.28, 38.29.

Задачи

- 38.1. Показать, что для однородной цепи Маркова вероятности перехода $p_{ij}^{(n)}$ связаны равенством

$$p_{ij}^{(\alpha+\beta)} = \sum_{\nu=1}^m p_{i\nu}^{(\alpha)} p_{\nu j}^{(\beta)} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m).$$

- 38.2. Заданы столбец начальных вероятностей $p(0) = \{\alpha; \beta; \gamma\}$ и матрицы вероятностей перехода для моментов времени t_1, t_2, t_3 :

$$\mathcal{P}_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_3 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_1 \end{vmatrix}, \quad \mathcal{P}_2 = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_3 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix}, \quad \mathcal{P}_3 = \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}.$$

Определить столбец абсолютных вероятностей $p(3)$.

38.3. По условиям соревнований спортсмен прекращает борьбу при потере двух очков, что может быть при одном проигрыше или при двух ничьих. При каждой встрече спортсмен, не имеющий ничьих, выигрывает с вероятностью α , делает ничью с вероятностью β и проигрывает с вероятностью $1 - \alpha - \beta$. Если ничейный исход был, то вероятность выигрыша в каждой встрече равна γ . Определить вероятность потери различного числа очков за n встреч для спортсмена, результаты предыдущих встреч для которого известны.

38.4. При повышении напряжения в сети электрического тока с вероятностью α выходит из строя блокирующее устройство прибора, а с вероятностью β прекращается работа этого прибора. Если блокирующее устройство вышло из строя, то последующее повышение напряжения приводит к прекращению работы прибора с вероятностью γ . Определить вероятности исправной работы схемы, выхода из строя только блокирующего устройства и прекращения работы прибора после повышения напряжения n раз, если начальное состояние прибора известно.

38.5. В соревнованиях от каждой команды выступают по три спортсмена, которые встречаются только со спортсменами из других команд. По условиям состязаний ничьих не может быть, а проигравший один раз выбывает из соревнований. Пусть α, β и γ — вероятности того, что в очередном туре соответственно из одного, двух и трех остав-

шихся членов команды никто не проиграет; β_1 и γ_1 — вероятности того, что в очередном туре соответственно из двух и из трех оставшихся спортсменов проиграет один, а γ_2 — вероятность проигрыша в очередном туре двух из трех участников. Определить вероятности $p_{ik}^{(n)}$ ($i, k = 0, 1, 2, 3$) того, что после n очередных туров в дальнейших соревнованиях от команды будут участвовать k спортсменов, если до этих туров в соревнованиях участвовали i членов команды.

38.6. Автоматическое устройство может работать, если из общего числа N однотипных элементов вышло из строя не больше $m - 1$ элементов, которые могут выходить из строя только во время цикла работы устройства. Известны вероятности p_{ik} перехода системы за один цикл из состояния Q_i в состояние Q_k , где в качестве номера состояния взято число вышедших из строя элементов, так что при $k < i$ $p_{ik} = 0$ ($i, k = 0, 1, \dots, m$), $p_{mm} = 1$. Доказать, что вероятности перехода $p_{ik}^{(n)}$ за n циклов, в течение которых не производится замена неисправных элементов, при различных вероятностях $p_k = p_{kk}$ ($k = 0, 1, \dots, m$) определяются формулами:

$$p_{kk}^{(n)} = p_k^n \quad (k = 0, 1, \dots, m),$$

при $i > k$ $p_{ik}^{(n)} = 0$ ($i, k = 0, 1, \dots, m$), а при $k > i$

$$p_{ik}^{(n)} = \sum_{v=i}^k \frac{p_v^n D_{ki}(p_v)}{(p_v - p_i)(p_v - p_{i+1}) \dots (p_v - p_{v-1})(p_v - p_{v+1}) \dots \dots (p_v - p_{k-1})(p_v - p_k)},$$

где

$$D_{ki}(\lambda) = \begin{vmatrix} p_{i, i+1} & p_{i, i+2} & p_{i, i+3} & \dots & p_{i, k-1} & p_{ik} \\ p_{i+1} - \lambda & p_{i+1, i+2} & p_{i+1, i+3} & \dots & p_{i+1, k-1} & p_{i+1, k} \\ 0 & p_{i+2} - \lambda & p_{i+2, i+3} & \dots & p_{i+2, k-1} & p_{i+2, k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{k-2, k-1} & p_{k-2, k} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{k-1} - \lambda & p_{k-1, k} \end{vmatrix}.$$

38.7. Доказать, что если в условиях предыдущей задачи $p_{kk} = p$ ($k = 0, 1, \dots, m - 1$), то

$$p_{mm}^{(n)} = 1, \quad p_{kk}^{(n)} = p^n \quad (k = 0, 1, \dots, m - 1);$$

при $i > k$ $p_{ik}^{(n)} = 0$ ($i, k = 0, 1, \dots, m$), а при $k > i$

$$p_{ik}^{(n)} = \frac{(m-k+i-1)!}{(m-1)!} \left\{ \frac{d^{k-i}}{d\lambda^{k-i}} [\lambda^n D_{ki}(\lambda)] \right\}_{\lambda=p},$$

$$p_{im}^{(n)} = \frac{(i-1)!}{(m-1)!} \left\{ \frac{d^{m-i}}{d\lambda^{m-i}} \left[\frac{\lambda^n}{\lambda-1} D_{mi}(\lambda) \right] \right\}_{\lambda=p} + \frac{D_{mi}(1)}{(1-p)^{m-i}},$$

где $D_{ki}(\lambda)$ определяется формулой из условия предыдущей задачи при $p_k = p$ ($k = 0, 1, \dots, m-1$).

38.8. Из урны, содержащей N шаров белого и черного цвета, одновременно извлекают m шаров. Извлеченные черные шары возвращают в урну, а белые заменяют на черные. Всего белых шаров в урне было m , а после нескольких извлечений осталось i . Определить вероятности $p_{ik}^{(n)}$ ($i, k = 0, 1, \dots, m$) того, что после дополнительных n извлечений в урне останется k белых шаров. Рассчитать эти вероятности при $N = 6, m = 3$.

38.9. При данной серии выстрелов каждый стрелок группы с равной вероятностью получает любое количество очков от $N+1$ до $N+m$. Определить вероятность того, что среди следующих n стрелков из этой группы хотя бы один стрелок получит $N+k$ очков, если наибольшее число очков, полученных предыдущими стрелками, равно $N+i$ ($k \geq i = 1, 2, \dots, m$).

38.10. На горизонтальной плоскости вдоль прямой AB через интервал l между центрами расположены вертикально одинаковые цилиндры с радиусом основания r . Перпендикулярно этой линии бросаются шары радиуса R , причем пересечение линии движения шара с прямой AB равновозможно в любой части участка длины L , на котором стоят m цилиндров. Расстояние между центрами цилиндров $l > 2(r+R)$; каждое столкновение шара с цилиндром приводит к уменьшению числа цилиндров на один. Определить вероятности $p_{ik}^{(n)}$ ($i, k = 0, 1, \dots, m$) того, что после очередных n бросков останется k цилиндров, если до этого их было i .

38.11. В области D , разделенной на m равновеликих частей, последовательно ставятся точки, положение каждой из которых равновозможно в любом месте области D . Определить вероятности $p_{ik}^{(n)}$ ($i, k = 1, 2, \dots, m$) того, что после

постановки новой серии из n точек число частей области D , в которых имеется хотя бы одна точка, увеличится с i до k .

38.12. В моменты t_1, t_2, t_3, \dots судно может изменять направление движения, выбирая один из m курсов: Q_1, Q_2, \dots, Q_m . Вероятность p_{ij} того, что в момент t_r судно изменит курс Q_i на Q_j , равна $p_{ij} = \alpha_{m-t+r+1}$, причем

$\alpha_{m+k} = \alpha_k \neq 0$ ($k = 1, 2, \dots, m$), $\sum_{k=1}^m \alpha_k = 1$. Определить

вероятность $p_{jk}^{(n)}$ того, что при $t_n < t < t_{n+1}$ направление движения судна будет Q_k , если начальное направление было Q_j ($j, k = 1, 2, \dots, m$). Найти эту вероятность при $n = \infty$.

38.13. Рассмотреть следующую схему процесса диффузии при наличии центральной силы. Частица может находиться только на отрезке AB в точках с координатами $x_k = x_A + k\Delta$ ($k = 0, 1, \dots, m$), где $x_m = x_B$, перемещаясь скачками в соседнюю точку, причем по направлению к точке A из x_j с вероятностью j/m , а по направлению к точке B — с вероятностью $1 - \frac{j}{m}$. Определить вероятности $p_{ik}^{(n)}$ ($i, k =$

$= 0, 1, \dots, m$) того, что после n скачков частица будет в точке x_k , если вначале она была в точке x_i .

38.14. Условия задачи такие же, как в примере 38.2, но автомат не выключается. В тех случаях, когда в приемнике нет пятикопеечных монет, а поступает монета достоинством в 10 коп., или имеется m пятикопеечных монет и поступает пятикопеечная монета, автомат возвращает последнюю поступившую монету, не выдавая билет. Определить вероятности $p_{ik}^{(n)}$ ($i, k = 0, 1, \dots, m$) того, что после n требований билета в приемнике будет k монет по 5 коп., если вначале их там было i .

38.15. Два стрелка A и B поочередно стреляют по мишени, причем после каждого попадания стреляет A , а после каждого промаха стреляет B . Право первого выстрела стрелкам предоставляется на тех же условиях по результату предварительного выстрела, который производит наудачу выбранный стрелок. Определить вероятность поражения мишени n -м выстрелом независимо от предыдущих попаданий, если вероятности поражения мишени при каждом выстреле для этих стрелков равны соответственно α и β .

♦ 38.16. Дана матрица $\mathcal{P} = \|p_{ij}\|$ вероятностей перехода, которая неприводима, непериодическая и дважды стохастическая, т. е. суммы элементов каждого столбца и каждой строки равны единице. Определить предельные вероятности $p_j^{(\infty)}$ ($j = 1, 2, \dots, m$).

38.17. m белых и m черных шаров перемешаны и поровну распределены между двумя урнами. Из каждой урны наудачу извлекается один шар и перекладывается в другую урну. Найти вероятности $p_{ik}^{(\infty)}$ ($i, k = 0, 1, \dots, m$) того, что после бесконечного числа таких обменов в первой урне окажется k белых шаров, если вначале там было i белых шаров.

38.18. Отрезок AB разделен на m равных интервалов. Частица может находиться только в серединах интервалов, перемещаясь скачками на величину интервала по направлению к точке B с вероятностью p , а по направлению к точке A — с вероятностью $q = 1 - p$. В крайних точках отрезка AB имеются отражающие экраны, которые при достижении частицей точки A и B возвращают ее в исходное положение. Определить предельные абсолютные вероятности $p_k^{(\infty)}$ ($k = 1, 2, \dots, m$) нахождения частицы в каждом интервале.

38.19. Даны следующие вероятности перехода для цепи Маркова с бесконечным числом состояний:

$$p_{i1} = \frac{i}{i+1}, \quad p_{i, i+1} = \frac{1}{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Определить предельные вероятности $p_j^{(\infty)}$ ($j = 1, 2, \dots$).

38.20. Вероятности перехода для цепи Маркова с бесконечным числом состояний определяются равенствами $p_{i1} = q$, $p_{i, i+1} = p = 1 - q$ ($i = 1, 2, \dots$). Определить предельные вероятности $p_j^{(\infty)}$ ($j = 1, 2, \dots$).

38.21. Цепь Маркова с бесконечным числом состояний имеет следующие вероятности перехода:

$$p_{11} = \frac{1}{2}, \quad p_{12} = \frac{1}{2}, \quad p_{i1} = \frac{1}{i}, \quad p_{i, i+1} = \frac{i-1}{i} \quad (i = 2, 3, \dots).$$

Определить предельные вероятности $p_{ik}^{(\infty)}$ ($i, k = 1, 2, \dots$).

38.22. Случайное блуждание частицы происходит на положительной части оси Ox . Частица, перемещаясь на один шаг Δ вправо с вероятностью α , влево с вероятностью β или оставаясь на месте, может находиться только в точках с координатами

татами x_j ($j = 1, 2, \dots$). Из точки с координатой $x_1 = \Delta$ частица перемещается вправо с вероятностью α или остается на месте с вероятностью $1 - \alpha$. Определить предельные вероятности перехода $p_k^{(\infty)}$ ($k = 1, 2, \dots$).

38.23. Матрица вероятностей перехода задана в виде

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ U & W \end{pmatrix},$$

где R — матрица, соответствующая неприводимой непериодической группе C существенных состояний Q_1, Q_2, \dots, Q_s , а квадратная матрица W соответствует несущественным состояниям $Q_{s+1}, Q_{s+2}, \dots, Q_m$. Определить предельные вероятности p_{sj} ($j = s+1, s+2, \dots, m$) того, что система перейдет в состояние из группы C .

38.24. Матрица вероятностей перехода задана в виде

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R_1 & 0 \\ U & U_1 & W \end{pmatrix},$$

где R — матрица, соответствующая непериодической группе C существенных состояний Q_1, Q_2, \dots, Q_s , а квадратная матрица W соответствует несущественным состояниям $Q_{r+1}, Q_{r+2}, \dots, Q_m$. Определить вероятности p_{sj} ($j = r+1, r+2, \dots, m$) того, что система перейдет в состояние, принадлежащее к группе C , если все элементы матрицы W равны α , а сумма элементов любой строки матрицы U равна β .

38.25. Два игрока A и B продолжают игру до полного разорения одного из них. Вероятности выигрыша каждой партии для этих игроков равны соответственно p и q ($p + q = 1$). В каждой партии выигрыш одного (проигрыш другого) равен одному рублю, а общий капитал этих игроков составляет m рублей. Определить вероятности разорения игроков, если до игры A имел j рублей ($j = 1, 2, \dots, m-1$).

38.26. Даны вероятности перехода $p_{j,j+1} = 1$ ($j = 1, 2, \dots, m-1$), $p_{m1} = 1$. Определить вероятности перехода $p_{jk}^{(n)}$ и средние предельные вероятности перехода \hat{p}_{jk} ($j, k = 1, 2, \dots, m$).

• 38.27. Матрица вероятностей перехода

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\alpha \neq 1$. Определить вероятности перехода $p_{jk}^{(n)}$ и средние предельные вероятности перехода \hat{p}_{jk} ($j, k = 1, 2, 3, 4$).

38.28. Даны элементы матрицы вероятностей перехода

$$\begin{aligned} p_{j, j+1} &= p & (j = 1, 2, \dots, 2m-1), \\ p_{j, j-1} &= q = 1-p & (j = 2, 3, \dots, 2m). \end{aligned}$$

Не определяя характеристических чисел матрицы \mathcal{P} , найти предельные вероятности перехода и средние предельные абсолютные вероятности.

• 38.29. Частица перемещается по прямой под влиянием случайных толчков и может находиться в точках с координатами $x_j = x_A + j\Delta$ ($j = 0, 1, \dots, m$). В крайних точках A и B находятся отражающие экраны. Каждый толчок перемещает частицу вправо с вероятностью p и влево с вероятностью $q = 1-p$. Если частица находится у стенки, то любой толчок переводит ее внутрь промежутка между стенками на одно деление. Определить средние предельные абсолютные вероятности нахождения частицы в каждой точке деления отрезка AB .

§ 39. Марковские процессы с дискретным числом состояний

Основные формулы

Поведение системы, возможными состояниями которой являются $Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_m$, может быть описано случайной функцией $X(t)$, принимающей значение k , если в момент времени t система находилась в состоянии Q_k . Если переход системы из одного состояния в другое возможен в любой момент времени t , а вероятности $P_{ik}(t, \tau)$ перехода системы из состояния Q_i в момент времени t в состояние Q_k в момент времени τ ($\tau \geq t$) не зависят от поведения системы до

момента времени t , то $X(t)$ является марковским случайным процессом с дискретным числом состояний. (Число состояний может быть конечным или бесконечным.)

Для вероятностей перехода $P_{ik}(t, \tau)$ справедливо соотношение

$$P_{ik}(t, \tau) = \sum_{j=0}^m P_{ij}(t, s) P_{jk}(s, \tau), \quad t \leq s \leq \tau.$$

Процесс называется однородным, если

$$P_{ik}(t, \tau) = P_{ik}(\tau - t).$$

В этом случае для марковского процесса

$$P_{ik}(\tau - t) = \sum_{j=0}^m P_{ij}(s - t) P_{jk}(\tau - s), \quad t \leq s \leq \tau.$$

Марковский процесс называется регулярным, если:

а) для каждого состояния Q_k существует предел

$$c_k(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [1 - P_{kk}(t, t + \Delta t)];$$

б) для каждой пары состояний Q_i и Q_k имеется непрерывная по t временная плотность вероятности перехода $P_{ik}(t)$, определяемая равенством

$$P_{ik}(t) = \frac{1}{c_i(t)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_{ik}(t, t + \Delta t)}{\Delta t},$$

где предел существует равномерно по t , а при фиксированном k — равномерно по t .

Для регулярных марковских процессов вероятности $P_{ik}(t, \tau)$ определяются двумя системами дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial P_{ik}(t, \tau)}{\partial \tau} = -c_k(t) P_{ik}(t, \tau) + \sum_{j \neq k} P_{ij}(t, \tau) c_j(\tau) p_{jk}(\tau) \quad (1\text{-я система}),$$

$$\frac{\partial P_{ik}(t, \tau)}{\partial t} = c_i(t) P_{ik}(t, \tau) - c_i(t) \sum_{j \neq i} P_{jk}(t, \tau) p_{ij}(t) \quad (2\text{-я система})$$

$$(i, j, k = 0, 1, 2, \dots, m)$$

при начальных условиях

$$P_{ik}(t, 0) = \delta_{ik},$$

где

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k, \\ 0, & \text{если } i \neq k. \end{cases}$$

Для однородного марковского процесса $c_i(t)$ и $p_{ij}(t)$ не зависят от времени, а $P_{ik}(t, \tau) = P_{ik}(\tau - t)$ и системы дифференциальных уравнений приобретают вид

$$\frac{dP_{ik}(t)}{dt} = -c_k P_{ik}(t) + \sum_{j \neq k} c_j p_{jk} P_{ij}(t) \quad (1\text{-я система}),$$

$$\frac{dP_{ik}(t)}{dt} = -c_i P_{ik}(t) + c_i \sum_{j \neq k} p_{ij} P_{jk}(t) \quad (2\text{-я система})$$

$$(i, j, k = 0, 1, 2, \dots, m)$$

при начальных условиях

$$P_{ik}(0) = \delta_{ik}.$$

Вероятности $P_k(t)$ нахождения системы в состоянии Q_k в момент времени t определяются системой уравнений

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = -c_k(t) P_k(t) + \sum_{j \neq k} c_j(t) p_{jk}(t) P_j(t)$$

$$(j, k = 0, 1, 2, \dots, m)$$

при соответствующих начальных условиях для $P_j(t)$. Если начальное состояние Q_i задано, то начальными условиями будут

$$P_k(t) = \delta_{ik} \quad \text{при } t = 0.$$

Для однородных марковских процессов последняя система уравнений принимает вид

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = -c_k P_k(t) + \sum_{j \neq k} c_j p_{jk} P_j(t)$$

$$(j, k = 0, 1, 2, \dots, m)$$

и начальные условия будут

$$P_k(t) = \delta_{ik} \quad \text{при } t = 0.$$

Если для однородного марковского процесса существует такой промежуток времени $t > 0$, что $P_{ik}(t) > 0$ для всех i и k , то процесс называется транзитивным и для него существует не зависящий от номера исходного состояния предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{ik}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_k(t) = p_k.$$

Предельные вероятности p_k в этом случае находятся из системы алгебраических уравнений

$$c_k p_k = \sum_{j \neq k} c_j p_j p_j \quad (j, k = 0, 1, 2, \dots, m).$$

Уравнения для вероятностей $P_{ik}(t, \tau)$ и $P_i(t)$ могут быть получены или путем применения общих формул, приведенных выше, или путем нахождения изменения вероятностей различных состояний системы за малый интервал времени Δt и перехода к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$.

Примером процесса Маркова является простейший поток событий, обладающий следующими свойствами:

стационарностью — при любом $\Delta t > 0$ и целом $k \geq 0$ вероятность того, что за промежуток $(t, t + \Delta t)$ произойдет k событий, одна и та же для всех $t \geq 0$;

отсутствием последствия — вероятность наступления k событий за промежуток $(t, t + \Delta t)$ не зависит от числа наступлений событий до момента t ;

ординарностью —

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R_2(\Delta t)}{\Delta t} = 0,$$

где $R_2(\Delta t)$ — вероятность наступления не менее двух событий за промежуток времени Δt .

Решение типовых примеров

Пример 39.1. Система может находиться в одном из состояний Q_0, Q_1, Q_2, \dots , переходя за время Δt в состояние с номером, на единицу большим, с вероятностью $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$. Найти вероятности $P_{ik}(t)$ перехода системы из состояния Q_i в состояние Q_k ($k \geq i$) за время t .

Решение. По условию процесс марковский. Кроме того, он регулярный, так как

$$c_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [\lambda \Delta t + o(\Delta t)] = \lambda = \text{const.}$$

$$p_{i, i+1}(t) = \frac{1}{c_i} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\lambda \Delta t + o(\Delta t)}{\Delta t} = 1,$$

остальные $p_{ik} = 0$.

Следовательно, применимы уравнения для регулярного однородного марковского процесса

$$\frac{dP_{ii}(t)}{dt} = -\lambda P_{ii}(t),$$

$$\frac{dP_{ik}(t)}{dt} = -\lambda P_{ik}(t) + \lambda P_{i, k-1}(t) \quad (k \geq i+1)$$

при начальных условиях $P_{ik}(0) = \delta_{ik}$. Умножая обе части полученных уравнений на u^k и суммируя по k от i до ∞ , получим

$$\frac{\partial G(t, u)}{\partial t} = \lambda(u-1)G(t, u),$$

где $G(t, u) = \sum_{k=i}^{\infty} P_{ik}(t) u^k$.

Решение последнего уравнения имеет вид

$$\ln G(t, u) = \lambda(u-1)t + \ln G(0, u).$$

Так как по определению

$$G(0, u) = \sum_{k=i}^{\infty} P_{ik}(0) u^k = u^i,$$

то

$$G(t, u) = u^i e^{\lambda(u-1)t} = u^i e^{-\lambda t} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^m}{m!} u^m =$$

$$= e^{-\lambda t} \sum_{k=i}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-i}}{(k-i)!} u^k.$$

Сравнивая последнее выражение с определением $G(t, u)$, получим

$$P_{ik}(t) = \frac{(\lambda t)^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\lambda t}.$$

Исходная система дифференциальных уравнений для $P_{ik}(t)$ может быть получена и иначе: вероятность $P_{ik}(t + \Delta t)$ равна сумме вероятности $P_{ik}(t) [1 - \lambda \Delta t - o(\Delta t)]$ того, что переход из состояния Q_i в состояние Q_k ($k > i$) произошел за время t , и вероятности $P_{i, k-1}(t) [\lambda \Delta t + o(\Delta t)]$ того, что этот переход совершен в интервале времени $(t, t + \Delta t)$, т. е.

$$P_{ik}(t + \Delta t) = P_{ik}(t) [1 - \lambda \Delta t - o(\Delta t)] +$$

$$+ P_{i, k-1}(t) [\lambda \Delta t + o(\Delta t)].$$

Перенося $P_{ik}(t)$ в левую часть равенства, деля обе части равенства на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим искомого уравнение. Так же выводится уравнение и при $k = i$.

Аналогично решается задача 39.6.

Пример 39.2. Система массового обслуживания состоит из большого (практически бесконечного) числа однотипных приборов, каждый из которых может одновременно обслуживать только одно требование, затрачивая на обслуживание случайное время, распределенное по показательному закону, т. е. имеющее плотность вероятности $\mu e^{-\mu t}$. В систему поступает простейший поток требований с параметром λ . Определить:

а) вероятность $P_n(t)$ того, что в момент t в системе ровно n приборов будут заняты обслуживанием ($n \leq m$), если в начальный момент все приборы были свободны;

б) предельные вероятности $p_n = \lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t)$;

в) математическое ожидание числа занятых приборов в момент t .

Решение. Так как поток требований простейший, а время обслуживания подчиняется показательному закону распределения, то за промежуток времени $(t, t + \Delta t)$ система может претерпеть более одного изменения только с вероятностями высшего порядка малости относительно Δt .

Поэтому, учитывая только однократные изменения состояния системы за промежуток времени Δt , получим:

$$P_{n, n+1}(t, t + \Delta t) = \lambda \Delta t (1 - n\mu \Delta t) + o(\Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t),$$

$$P_{n, n-1}(t, t + \Delta t) = (1 - \lambda \Delta t) n\mu \Delta t + o(\Delta t) = n\mu \Delta t + o(\Delta t),$$

$$P_{n, n}(t, t + \Delta t) = (1 - \lambda \Delta t) (1 - n\mu \Delta t) + o(\Delta t) =$$

$$= 1 - (\lambda + n\mu) \Delta t + o(\Delta t).$$

Система регулярна, так как

$$c_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1 - P_{n,n}(t, t + \Delta t)}{\Delta t} = \lambda + n\mu = \text{const.}$$

$$P_{n,n+1} = \frac{1}{c_n} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_{n,n+1}(t, t + \Delta t)}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\lambda + n\mu},$$

$$P_{n,n-1} = \frac{1}{c_n} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_{n,n-1}(t, t + \Delta t)}{\Delta t} = \frac{n\mu}{\lambda + n\mu}.$$

а) Подставляем найденные значения c_n , $P_{n,n+1}$ и $P_{n,n-1}$ в систему дифференциальных уравнений для $P_n(t)$:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -(\lambda + n\mu)P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + (n+1)\mu P_{n+1}(t),$$

если $n \geq 1$, и

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t).$$

Если считать, что в начальный момент $t=0$ все приборы были свободны, то начальные условия будут

$$P_n(0) = \delta_{n0}.$$

Полученную систему решаем с помощью производящей функции

$$G(t, u) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) u^n.$$

Умножая обе части дифференциальных уравнений системы на u^n и суммируя их, получим после простых преобразований

$$\frac{\partial G(t, u)}{\partial t} = (1-u) \left\{ -\lambda G(t, u) + \mu \frac{\partial G(t, u)}{\partial u} \right\}.$$

Начальные условия: $G(0, u) = 1$.

Полученное линейное неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных заменяем эквивалентным однородным¹⁾

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \mu(1-u) \frac{\partial V}{\partial u} - \lambda(1-u)G \frac{\partial V}{\partial G} = 0$$

с начальным условием: $V = G - 1$ при $t = 0$.

¹⁾ Н. М. Гюнтер, Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных, ГТТИ, 1934.

Для решения последнего необходимо решить сначала систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dt}{1} = -\frac{du}{\mu(1-u)} = -\frac{dG}{\lambda(1-u)G},$$

которая имеет независимые интегралы

$$t - \frac{1}{\mu} \ln(1-u) = c_1,$$

$$\frac{\lambda}{\mu} u - \ln G = c_2.$$

Используя начальные условия $t=0$, $u=u_0$, $G=G_0$, находим интегралы Коши системы

$$u_0 = 1 - (1-u)e^{-\mu t},$$

$$G_0 = G \exp\left\{\frac{\lambda}{\mu}(1-u)(1-e^{-\mu t})\right\}.$$

Правые части являются главными решениями однородного дифференциального уравнения в частных производных. На их основе составляем решение задачи Коши для однородного дифференциального уравнения в частных производных

$$V = G \exp\left\{\frac{\lambda}{\mu}(1-u)(1-e^{-\mu t})\right\} - 1.$$

Решением задачи Коши для исходного уравнения является функция G , при которой $V=0$; отсюда

$$G = \exp\left\{-\frac{\lambda}{\mu}(1-u)(1-e^{-\mu t})\right\}.$$

Вероятности $P_n(t)$ связаны с производящей функцией $G(t, u)$ равенством

$$P_n(t) = \frac{1}{n!} \frac{\partial G(t, u)}{\partial u} \Big|_{u=0},$$

которое дает

$$P_n(t) = \frac{1}{n!} \left\{\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})\right\}^n \exp\left\{-\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})\right\},$$

т. е. закон Пуассона с параметром

$$a = \frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t}).$$

б) Предельные вероятности p_n получаются предельным переходом из найденных вероятностей $P_n(t)$:

$$p_n = \lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$$

т. е. p_n подчинены закону Пуассона с параметром $a = \frac{\lambda}{\mu}$. (Тот же результат можно получить, решая систему алгебраических уравнений, получаемую из системы дифференциальных уравнений для $P_n(t)$ после замены в ней $P_n(t)$ на p_n , $\frac{dP_n(t)}{dt}$ нулями.)

в) Математическое ожидание числа занятых приборов

$$M(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(t).$$

Составим для него дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{dM(t)}{dt} = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{dP_n(t)}{dt} = \sum_{n=0}^{\infty} n \{ & -(\lambda + n\mu)P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \\ & + (n+1)\mu P_{n+1}(t) \} = \lambda - \mu M(t). \end{aligned}$$

Так как в начальный момент все приборы свободны, то

$$M(t) = \frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t}).$$

Аналогично решаются задачи 39.17 — 39.19.

Пример 39.3. Система массового обслуживания состоит из m приборов, каждый из которых может обслужить одновременно только одно требование, затрачивая на обслуживание случайное время, распределенное по показательному закону с параметром μ . В систему поступает простейший поток требований с параметром λ . Обслуживание требования начинается сразу после его поступления, если в этот момент имеется хотя бы один свободный прибор; в противном случае требование получает отказ и не возвращается в систему. Определить предельную вероятность отказа в обслуживании.

Решение. Обозначая Q_i состояние системы, при котором i приборов заняты обслуживанием, имеем $P_{ik}(t) > 0$ для конечного промежутка времени. Следовательно, применима

теорема Маркова, утверждающая, что существуют предельные вероятности

$$p_n = \lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t),$$

которые определяются по формуле

$$c_n p_n = c_{n-1} p_{n-1} + c_{n+1} p_{n+1}.$$

Аналогично предыдущему примеру имеем

$$\begin{aligned} c_n &= \lambda + n\mu, & p_{n, n+1} &= \frac{\lambda}{\lambda + n\mu}, \\ p_{n, n-1} &= \frac{n\mu}{\lambda + n\mu} & (0 \leq n \leq m-1), \\ c_m &= m\mu, & p_{m, m+1} &= 0, \end{aligned}$$

а остальные вероятности $p_{jk} = 0$. Подставляя эти значения p_{jk} в уравнения для p_n , получим

$$\begin{aligned} (\lambda + n\mu) p_n &= \lambda p_{n-1} + (n+1)\mu p_{n+1} & (0 \leq n \leq m-1; p_{-1} = 0), \\ m\mu p_m &= \lambda p_{m-1}. \end{aligned}$$

Подстановкой $z_n = \lambda p_{n-1} - n\mu p_n$ система приводится к виду

$$z_1 = 0, \quad z_n - z_{n+1} = 0 \quad (0 < n < m), \quad z_m = 0,$$

откуда $z_n = 0$ для всех n , а это значит, что

$$p_n = \frac{\lambda}{n\mu} p_{n-1} \quad \text{или} \quad p_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0.$$

Система достоверно находится в одном из состояний Q_n ($n = 0, 1, 2, \dots, m$), поэтому

$$\sum_{n=0}^m p_n = 1;$$

отсюда вероятность p_0 иметь все приборы свободными равна

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^m \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}.$$

Вероятность отказа требованию в обслуживании

$$p_m = \frac{\frac{1}{m!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m}{\sum_{n=0}^m \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n} \quad (\text{формула Эрланга}).$$

Аналогично решаются задачи 39.8, 39.10, 39.11, 39.14.

Задачи

39.1. Частицы, вылетающие из радиоактивного вещества в процессе его распада, образуют простейший поток с параметром λ . Каждая частица независимо от другой с вероятностью p регистрируется счетчиком. Определить вероятность того, что за время t будет зарегистрировано n частиц.

39.2. По двум линиям связи в один пункт поступает два независимых простейших потока телеграмм. Найти вероятность того, что за время t в пункт приема придет n телеграмм, если параметры составляющих потоков равны λ_1 и λ_2 .

39.3. Электронная эмиссия с катода электронной лампы представляет собой простейший поток электронов с параметром λ . Времена полета для различных электронов — независимые случайные величины, имеющие одну и ту же функцию распределения $F(x)$. Определить вероятность того, что спустя время t после включения между электродами лампы будет ровно n электронов, и предельную вероятность того же события.

39.4. Для простейшего потока событий определить коэффициент корреляции между числами появлений событий в интервалах $(0, t)$ и $(0, t + \tau)$.

39.5. Для случайного момента времени T_n появления n -го события в простейшем потоке с параметром λ определить функцию распределения $F_n(t)$, плотность вероятности $f_n(t)$ и начальные моменты m_k .

39.6. Найти вероятность перехода системы из состояния Q_i в состояние Q_k за время t в однородном марковском процессе, если при однократном изменении состояния она может перейти только из состояния Q_n в состояние Q_{n+1} , а вероятность изменения состояния системы в промежуток времени $(t, t + \Delta t)$ равна $[\lambda \Delta t + o(\Delta t)]$.

39.7. Клиенты, обращающиеся в мастерскую бытового обслуживания, образуют простейший поток с параметром λ .

Каждый клиент обслуживается одним мастером в течение случайного времени, подчиняющегося показательному закону с параметром μ . В случае отсутствия свободных мастеров клиент не ждет, а отказывается от обслуживания. Определить, сколько необходимо иметь мастеров, чтобы вероятность отказа клиенту в немедленном обслуживании не превосходила 0,015, если $\mu = \lambda$.

39.8. Один рабочий обслуживает m автоматических станков, которые при нормальной работе не требуют его вмешательства. Остановки каждого станка вследствие неполадок образуют независимый простейший поток с параметром λ . Для устранения неполадки рабочий тратит случайное время, распределенное по показательному закону с параметром μ . Найти предельные вероятности того, что k станков не работают (ремонтируются и ожидают ремонта), и математическое ожидание числа станков в очереди на ремонт.

39.9. Решить задачу 39.8 при условии, что число обслуживающих рабочих равно r ($r < m$).

39.10. В электронно-вычислительной машине могут быть применены либо элементы A , либо B . Отказы этих элементов образуют простейший поток с параметрами $\lambda_A = 0,1$ ед./час и $\lambda_B = 0,01$ ед./час. Суммарная стоимость всех элементов A равна a , суммарная стоимость элементов B равна b ($b > a$). Неисправность элемента вызывает простой машины на случайное время ремонта, подчиняющееся показательному закону распределения со средним временем, равным двум часам. Стоимость каждого часа простоя машины равна c . Найти математическое ожидание экономии от применения более надежных элементов за 1000 часов работы машины.

39.11. В систему обслуживания, состоящую из n однотипных аппаратов, поступает простейший поток требований с параметром λ . Обслуживание требования начинается немедленно, если имеется хотя бы один свободный аппарат, и оно требует работы только одного аппарата, который тратит на обслуживание случайное время, подчиняющееся показательному закону распределения с параметром μ ($\mu n > \lambda$). Если в момент поступления требования нет ни одного свободного аппарата, то требование становится в очередь.

Определить предельные значения:

а) вероятности p_k того, что в системе обслуживания находится ровно k требований (обслуживаемых и находящихся в очереди);

б) вероятности p^* того, что все аппараты заняты обслуживанием;

в) функции распределения $F(t)$ и математического ожидания \bar{t} времени ожидания начала обслуживания;

г) математического ожидания m_1 числа требований, ожидающих начала обслуживания, m_2 числа требований, находящихся в системе обслуживания, m_3 числа свободных от обслуживания аппаратов.

39.12. Поток поступления неисправной аппаратуры в мастерскую гарантийного ремонта является простейшим с параметром $\lambda = 10$ ед./час. Продолжительность ремонта одной единицы является случайной величиной, имеющей показательный закон распределения с параметром $\mu = 5$ ед./час. Определить среднее время, проходящее от момента поступления неисправной аппаратуры до начала ремонта, если в мастерской 4 ремонтных рабочих, каждый из которых одновременно ремонтирует только один прибор.

39.13. Сколько позиций должен иметь испытательный стенд для того, чтобы в среднем не более 1% изделий ожидало начала испытаний дольше $2/3$ смены, если продолжительность испытаний — показательно распределенная случайная величина, имеющая среднее значение 0,2 смены, а поступающие на испытания приборы образуют простейший поток со средним числом поступлений 10 единиц в смену?

39.14. Система обслуживания состоит из n аппаратов, каждый из которых обслуживает одновременно лишь одно требование. Время обслуживания является показательно распределенной случайной величиной с параметром μ . В систему поступает простейший поток требований с параметром λ ($\mu n > \lambda$). Обслуживание требования начинается немедленно, если есть хотя бы один свободный аппарат. Если все аппараты заняты, а число требований в очереди на обслуживание менее m , то требование становится в очередь; если же в очереди m требований, то вновь поступившее требование получает отказ.

Определить предельные значения:

а) вероятности p_k того, что в системе обслуживания находится ровно k требований;

б) вероятности того, что поступившее требование получит отказ;

в) вероятности того, что все обслуживающие аппараты будут заняты;

г) функции распределения $F(t)$ времени ожидания начала обслуживания;

д) математического ожидания m_1 числа требований, ожидающих начала обслуживания, m_2 числа требований, находящихся в системе обслуживания, m_3 числа свободных от обслуживания аппаратов.

39.15. Парикмахерская имеет трех мастеров, каждый из которых в среднем на обслуживание одного клиента тратит 10 мин. Клиенты образуют простейший поток со средним числом поступлений 12 человек в час. Клиенты становятся в очередь, если к моменту их прихода в очереди менее трех человек, в противном случае они покидают парикмахерскую.

Определить вероятность p_0 отсутствия клиентов в парикмахерской; вероятность p того, что клиент покинет парикмахерскую необслуженным; вероятность p^* того, что все мастера будут заняты работой; среднее число m_1 клиентов в очереди; среднее число клиентов m_2 в парикмахерской вообще.

39.16. Электрическая линия обслуживает m однотипных машин, каждая из которых независимо от других может нуждаться в электроэнергии. Вероятность того, что в промежутке времени $(t, t + \Delta t)$ машина прекратит использование электроэнергии, равна $\mu \Delta t + o(\Delta t)$, а вероятность того, что машине потребуется энергия в том же промежутке времени, равна $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$. Определить предельную вероятность того, что к линии будет подключено n машин.

39.17. Ливень космических частиц вызван попаданием в начальный момент времени в атмосферу одной частицы. Определить вероятность того, что спустя время t будет n частиц, если каждая частица в промежутке времени $(t, t + \Delta t)$ с вероятностью $[\lambda \Delta t + o(\Delta t)]$ может вызвать возникновение новой частицы, имеющей практически ту же самую вероятность размножения.

39.18. Ливень космических частиц вызван попаданием в начальный момент времени в атмосферу одной частицы. Определить вероятность того, что в момент времени t будет n частиц, если каждая частица в промежутке времени $(t, t + \Delta t)$ с вероятностью $[\lambda \Delta t + o(\Delta t)]$ может вызвать возникновение

новой частицы и с вероятностью $[\mu \Delta t + o(\Delta t)]$ может исчезнуть.

39.19. В неоднородном процессе чистого размножения (размножение без гибели) n частиц в момент t могут превратиться либо в $n+1$ частиц в промежутке $(t, t+\Delta t)$ с вероятностью $\lambda_n(t) \Delta t + o(\Delta t)$, где

$$\lambda_n(t) = \frac{1+an}{1+at},$$

либо оставаться в неизменном количестве. Определить вероятность того, что в момент t будет ровно n частиц.

§ 40. Непрерывные марковские процессы

Основные формулы

Непрерывный случайный процесс $U(t)$ называется марковским, если функция распределения $F(u_n | u_1, \dots, u_{n-1})$ ординаты процесса $U(t)$ в момент t_n , вычисленная при условии, что значения ординат процесса u_1, u_2, \dots, u_{n-1} в моменты времени t_1, t_2, \dots, t_{n-1} заданы ($t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n$), зависит только от значения последней ординаты, т. е.

$$F(u_n | u_1, \dots, u_{n-1}) = F(u_n | u_{n-1}).$$

Условная плотность вероятности $f(u_n | u_{n-1})$ является функцией $f(t, x; \tau, y)$ четырех переменных, где для краткости обозначено:

$$U(t) = X, \quad U(\tau) = Y, \quad t \leq \tau.$$

Функция $f(t, x; \tau, y)$ удовлетворяет системе уравнений Колмогорова¹⁾

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + a(t, x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} b(t, x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \quad (1\text{-е уравнение}),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y} [a(\tau, y) f] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [b(\tau, y) f] = 0 \quad (2\text{-е уравнение}).$$

¹⁾ Второе уравнение Колмогорова иногда называют уравнением Фоккера—Планка или Фоккера—Планка—Колмогорова, поскольку до его строгого вывода А. Н. Колмогоровым оно встречалось ранее в работах физиков.

где

$$a(t, x) = \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{1}{\tau - t} M\{[Y - X] | X = x\},$$

$$b(t, x) = \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{1}{\tau - t} M\{[Y - X]^2 | X = x\}.$$

Функция $f(t, x; \tau, y)$ обладает общими свойствами плотности вероятности:

$$f(t, x; \tau, y) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t, x; \tau, y) dy = 1$$

и удовлетворяет начальному условию

$$f(t, x; \tau, y) = \delta(y - x) \quad \text{при } \tau = t.$$

Если область изменения ординат случайной функции ограничена:

$$\alpha \leq U(t) \leq \beta,$$

то кроме указанных выше условий должны быть выполнены еще граничные условия для функции

$$G(\tau, y) \equiv a(\tau, y) f - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} [b(\tau, y) f],$$

которую можно рассматривать как «поток вероятности»:

$$G(\tau, \alpha) = G(\tau, \beta) = 0 \quad \text{для любого } \tau.$$

Совокупность n случайных функций $U_1(t), \dots, U_n(t)$ является марковским процессом, если плотность вероятности f (функция распределения) для ординат Y_1, Y_2, \dots, Y_n этих функций в момент времени τ , вычисленная при условии, что в момент времени t ординаты случайных функций имели значения X_1, X_2, \dots, X_n , не зависит от значений ординат случайных функций $U_1(t), \dots, U_n(t)$ для моментов времени, предшествующих t . В этом случае функция f удовлетворяет

системе многомерных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^n a_j(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^n b_{jl}(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_l} = 0 \text{ (1-е уравнение),}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial y_j} [a_j(\tau, y_1, \dots, y_n) f] - \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^n \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_l} [b_{jl}(\tau, y_1, \dots, y_n) f] = 0 \text{ (2-е уравнение),}$$

где коэффициенты a_j и b_j определяются равенствами

$$a_j(t, x_1, \dots, x_n) = \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{1}{\tau - t} \mathbf{M}[(Y_j - X_j) | X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n],$$

$$b_{jl}(t, x_1, \dots, x_n) = \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{1}{\tau - t} \mathbf{M}[(Y_j - X_j)(Y_l - X_l) | X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n],$$

а начальными условиями будут

$$\tau = t, f(t, x_1, \dots, x_n; \tau, y_1, \dots, y_n) = \delta(y_1 - x_1) \delta(y_2 - x_2) \dots \delta(y_n - x_n).$$

Если дано дифференциальное уравнение для компонент марковского процесса $U_1(t), U_2(t), \dots, U_n(t)$, то для определения коэффициентов a_j и b_{jl} (a и b — в линейном случае) нужно вычислить отношение приращений ординат случайных функций $U_j(t)$ за малый интервал времени к $(\tau - t)$, найти условные математические ожидания этих приращений и их произведений и перейти к пределу при $\tau \rightarrow t$.

Всякому многомерному уравнению Колмогорова соответствует система дифференциальных уравнений для компонент процесса

$$\frac{\partial U_l}{\partial t} = \psi_l(t, U_1, \dots, U_n) + \sum_{m=1}^n g_{lm}(t, U_1, \dots, U_n) \xi_m(t),$$

$l = 1, 2, \dots, n,$

где $\xi_m(t)$ — взаимно независимые случайные функции с независимыми ординатами («белый шум»), корреляционные функции которых $K_m(\tau) = \delta(\tau)$, а функции ψ_l и g_{lm} однозначно определяются системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n g_{lj} g_{jm} &= b_{lm}; \quad g_{lj} = g_{jl}, \\ \psi_l &= a_l \end{aligned} \right\} (l, m = 1, 2, \dots, n).$$

Для решения уравнений Колмогорова могут быть использованы общие методы теории дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа (см., например, [24]). Когда a_l и b_{lm} являются линейными функциями ординат $U_l(t)$, решение может быть получено, если от плотности вероятности $f(t, x_1, \dots, x_n; \tau, y_1, \dots, y_n)$ перейти к характеристической функции

$$\begin{aligned} E(z_1, \dots, z_n) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{t(z_1 y_1 + \dots + z_n y_n)\} \times \\ &\quad \times f(t, x_1, \dots, x_n; \tau, y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n, \end{aligned}$$

для которой имеет место линейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка, решаемое общими методами (см., например, Гюнтер Н. М., Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных, ГТТИ, 1934).

В том случае, когда коэффициенты a_l , b_{lm} не зависят от t , имеет смысл задача нахождения стационарных решений уравнений Колмогорова. Для отыскания стационарного решения второго уравнения Колмогорова нужно положить $\frac{\partial f}{\partial \tau} = 0$ и искать решение полученного уравнения в виде функции только y_1, y_2, \dots, y_n . В частном случае одномерного марковского процесса решение получается в квадратурах.

Любой стационарный нормальный процесс, обладающий дробно-рациональной спектральной плотностью, можно рассматривать как компоненту многомерного марковского процесса.

Вероятность $W(T)$ того, что ордината одномерного марковского процесса в течение времени $T = \tau - t$ после момента времени t , для которого задана плотность вероятности ординат

случайной функции $f_0(x)$, ни разу не выйдет за пределы интервала (α, β) , определяется равенством

$$W(T) = \int_{\alpha}^{\beta} \omega(\tau, y) dy, \quad \tau = t + T,$$

где плотность вероятности $\omega(\tau, y)$ является решением второго уравнения Колмогорова при условиях:

$$\begin{aligned} \omega(\tau, y) &= f_0(y) && \text{при } \tau = t, \\ \omega(\tau, \alpha) &= \omega(\tau, \beta) = 0 && \text{при } \tau \geq t. \end{aligned}$$

В частном случае, когда начальное значение ординаты задано, $f_0(y) = \delta(y - x)$. Плотность вероятности $f(T)$ времени пребывания случайной функции в интервале (α, β) определяется равенством

$$f(T) = - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial \omega(\tau, y)}{\partial \tau} dy, \quad T = \tau - t.$$

Среднее время пребывания \bar{T} случайной функции в интервале

(α, β) связано с $\omega(\tau, y)$ соотношением $\bar{T} = \int_0^{\infty} W(T) dT$.

При $\alpha \neq \infty, \beta = \infty$ последние формулы дают: вероятность $W(T)$ пребывания случайной функции выше заданного уровня α , плотность вероятности $f(T)$ времени выброса и среднее время выброса T .

Среднее число выбросов за уровень α в единицу времени для одномерного марковского процесса равно бесконечности, однако среднее число выбросов в единицу времени $n(\tau_0)$ для выбросов, длительность которых больше $\tau_0 > 0$, конечно и для стационарного процесса определяется формулой

$$n(\tau_0) = f(\alpha) \int_{\alpha}^{\infty} v(\tau_0, y) dy,$$

где $f(\alpha)$ — плотность вероятности для ординаты процесса, взятая при аргументе α , $v(\tau, y)$ — решение второго уравнения Колмогорова для случайного процесса при условиях:

$$\tau < t, v(\tau, y) = 0; \quad \tau \geq t, v(\tau, \alpha) = \delta(\tau - t).$$

что эквивалентно решению уравнения для преобразования $\bar{v}(p, y)$ Лапласа — Карсона. Для стационарного процесса $\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (b\bar{v}) - a\bar{v} \right] = p\bar{v}$, $\bar{v} = p$ при $y = \alpha$, $\bar{v} = 0$ при $y = \infty$. Изображение $\bar{n}(\tau_0)$ равно

$$\bar{n}(p) = -\frac{1}{p} f(\alpha) \frac{\partial(b\bar{v})}{\partial y} \Big|_{y=\alpha} + f(\alpha) a(\alpha).$$

Вероятность $W(T)$ того, что ордината $U_1(t)$ компоненты многомерного марковского процесса не выйдет за пределы интервала (α, β) , если в начальный момент закон распределения компонент процесса $U_1(t), U_2(t), \dots, U_n(t)$ известен, определяется равенством

$$W(T) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \omega(\tau, y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_{n-1} dy_n,$$

$$T = \tau - t,$$

где $\omega(\tau, y_1, \dots, y_n)$ — плотность вероятности для компоненты процесса попасть к моменту времени τ в элемент объема $dy_1 \dots dy_n$ при условии, что за интервал времени (t, τ) ордината $U_1(t)$ ни разу не вышла за пределы интервала (α, β) . Функция $\omega(\tau, y_1, \dots, y_n)$ является решением второго уравнения Колмогорова при условиях:

$$\omega(\tau, y_1, \dots, y_n) = f_0(y_1, \dots, y_n) \text{ при } \tau = t;$$

$$\omega(\tau, \alpha, y_2, \dots, y_n) = \omega(\tau, \beta, y_2, \dots, y_n) = 0 \text{ при } \tau \geq t.$$

Плотность вероятности $f(T)$ времени пребывания компоненты $U_1(t)$ в интервале (α, β) определяется формулой

$$f(T) = - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial \omega(\tau, y_1, \dots, y_n)}{\partial \tau} dy_1 \dots dy_{n-1} dy_n,$$

$$T = \tau - t.$$

В последней формуле α может быть равно $-\infty$ или β равно $+\infty$, что будет соответствовать вероятностям пребывания не выше или не ниже заданного уровня.

Решение типовых примеров

Пример 40.1. Составить уравнения Колмогорова для многомерного марковского процесса, компоненты которого $U_1(t), U_2(t), \dots, U_n(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dU_j(t)}{dt} = \psi_j(t, U_1, \dots, U_n) + c_j \xi_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

где ψ_j — заданные непрерывные функции, c_j — заданные постоянные, а $\xi_j(t)$ — независимые случайные функции, обладающие свойством «белого шума», т. е.

$$\bar{\xi}_j(t) = 0, \quad K_{\xi_j}(\tau) = \delta(\tau).$$

Решение. Для составления уравнений Колмогорова достаточно определить коэффициенты a_j и b_{ji} этих уравнений.

Обозначая ординату случайной функции $U_j(t)$ в момент времени t через X_j , а ординату ее в момент времени τ через Y_j , после интегрирования исходных уравнений получим

$$Y_j - X_j = \int_t^\tau \psi_j(t_1, U_1(t_1), \dots, U_n(t_1)) dt_1 + c_j \int_t^\tau \xi_j(t_1) dt_1.$$

Считая разность $\tau - t$ малой, с точностью до величин второго порядка малости, в первом интеграле ψ_j можно вынести из-под знака интеграла, положив $t_1 = t, U_1 = X_1, U_2 = X_2, \dots, U_n = X_n$, что дает

$$Y_j - X_j = \psi_j(t, X_1, \dots, X_n)(\tau - t) + c_j \int_t^\tau \xi_j(t_1) dt_1,$$

т. е.

$$\frac{Y_j - X_j}{\tau - t} = \psi_j(t, X_1, \dots, X_n) + \frac{c_j}{\tau - t} \int_t^\tau \xi_j(t_1) dt_1.$$

Полагая случайные величины X_1, \dots, X_n равными x_1, \dots, x_n , находя математическое ожидание последнего равенства и переходя к пределу при $\tau \rightarrow t$, получим

$$a_j(t, x_1, \dots, x_n) = \psi_j(t, x_1, \dots, x_n).$$

Перемножив выражения для $(Y_j - X_j)$ и $(Y_l - X_l)$ и находя математическое ожидание полученного произведения, получим

$$\begin{aligned} M[(Y_j - X_j)(Y_l - X_l) | x_1, \dots, x_n] &= \\ &= \psi_j(t, x_1, \dots, x_n) \psi_l(t, x_1, \dots, x_n) (\tau - t)^2 + \\ &+ c_j c_l \int_t^\tau \int_t^\tau \delta(t_2 - t_1) dt_1 dt_2 = \\ &= \psi_j(t, x_1, \dots, x_n) \psi_l(t, x_1, \dots, x_n) (\tau - t)^2 + c_j c_l (\tau - t), \end{aligned}$$

что после деления на $(\tau - t)$ и перехода к пределу дает

$$b_{jl}(t, x_1, \dots, x_n) = c_j c_l \tau$$

Пример 40.2. Дано первое уравнение Колмогорова для условной плотности вероятности $f(t, x_1, x_2; \tau, y_1, y_2)$ нормального марковского процесса:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} - (k^2 x_1 + 2h x_2) \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 0.$$

Определить систему дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют компоненты процесса $U_1(t)$ и $U_2(t)$.

Решение. В соответствии с принятыми обозначениями для коэффициентов уравнений Колмогорова имеем

$$a_1 = x_2, \quad a_2 = -k^2 x_1 - 2h x_2, \quad b_{11} = b_{12} = 0, \quad b_{22} = \sigma^2.$$

Искомая система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\frac{\partial U_l}{\partial t} = \psi_l(t, U_1, U_2) + \sum_{m=1}^2 g_{lm}(t, U_1, U_2) \xi_m(t), \quad l = 1, 2,$$

где $\xi_m(t)$ — «белый шум» с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. В соответствии с общей формулой, приведенной во вводной части параграфа, имеем

$$\begin{aligned} g_{11}^2 + g_{12}^2 &= 0, & g_{11} g_{12} + g_{12} g_{22} &= 0, \\ g_{12}^2 + g_{22}^2 &= \sigma^2, & \psi_l &= a_l. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$g_{11} = g_{12} = 0, \quad g_{22} = \sigma, \quad \psi_1 = x_2, \quad \psi_2 = -k^2 x_1 - 2h x_2.$$

а искомая система уравнений имеет вид

$$\frac{\partial U_1(t)}{\partial t} = U_2(t),$$

$$\frac{\partial U_2(t)}{\partial t} = -[k^2 U_1(t) + 2h U_2(t)] + \sigma \xi(t).$$

Исключая из второго уравнения $U_2(t)$, получим для $U_1(t)$ уравнение второго порядка

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} + 2h \frac{\partial U_1}{\partial t} + k^2 U_1 = \sigma \xi(t).$$

Пример 40.3. Нормальный стационарный процесс $U(t)$ имеет спектральную плотность

$$S_u(\omega) = \frac{|P_m(i\omega)|^2}{|Q_n(i\omega)|^2},$$

где

$$P_m(x) = \beta_0 x^m + \beta_1 x^{m-1} + \dots + \beta_m,$$

$$Q_n(x) = x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_n, \quad n > m,$$

а α_j и β_j — известные постоянные. Рассматривая $U(t)$ как компоненту многомерного марковского процесса, определить коэффициенты уравнений Колмогорова для этого процесса.

Решение. Стационарная нормальная случайная функция с дробно-рациональной спектральной плотностью является решением линейного дифференциального уравнения, содержащего в правой части «белый шум». В данном случае уравнение имеет вид

$$\frac{d^n U}{dt^n} + \alpha_1 \frac{d^{n-1} U}{dt^{n-1}} + \dots + \alpha_n U = \beta_0 \frac{d^m \xi}{dt^m} + \beta_1 \frac{d^{m-1} \xi}{dt^{m-1}} + \dots + \beta_m \xi.$$

Перейдем от уравнения n -го порядка, содержащего в правой части производные от функции $\xi(t)$, к системе уравнений первого порядка, не содержащих в правых частях равенств производных от $\xi(t)$. Обозначив $U(t) = U_1(t)$, введем новые переменные, определяемые равенствами:

$$U_2 = \dot{U}_1, \quad U_3 = \dot{U}_2, \quad \dots, \quad U_{n-m} = \dot{U}_{n-m-1},$$

$$U_{n-m+1} = \dot{U}_{n-m} - c_{n-m} \xi, \quad U_{n-m+2} = \dot{U}_{n-m+1} - c_{n-m+1} \xi,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$U_n = \dot{U}_{n-1} - c_{n-1} \xi,$$

где c_i — пока произвольные постоянные. Выписанные равенства

дают систему $n - 1$ уравнений первого порядка. Для получения последнего (n -го) уравнения в исходном дифференциальном уравнении n -го порядка необходимо все производные от U выразить через U_j и их первые производные. Выполнив эти преобразования, получим

$$\begin{aligned} \frac{dU_n}{dt} + \alpha_1 U_n + \dots + \alpha_n U_1 + c_{n-m} \xi^{(m)} + \\ + (c_{n-m+1} + \alpha_1 c_{n-m}) \xi^{(m-1)} + (c_{n-m+2} + \alpha_1 c_{n-m+1} + \\ + \alpha_2 c_{n-m}) \xi^{(m-2)} + \dots + (c_{n-1} + \alpha_1 c_{n-2} + \alpha_2 c_{n-3} + \dots + \\ + \alpha_{m-1} c_{n-m}) \xi' + (\alpha_1 c_{n-1} + \alpha_2 c_{n-2} + \dots + \alpha_m c_{n-m}) \xi = \\ = \beta_0 \xi^{(m)} + \beta_1 \xi^{(m-1)} + \dots + \beta_{m-1} \xi' + \beta_m \xi. \end{aligned}$$

Определяя коэффициенты c_j так, чтобы из уравнения исчезли производные от $\xi(t)$, получим рекуррентные соотношения

$$c_l = \beta_{l+m-n} - \sum_{j=n-m}^{l-1} \alpha_{l-j} c_j, \quad l = n-m, \dots, n-1,$$

что для последнего уравнения системы дает

$$\frac{dU_n}{dt} + \alpha_1 U_n + \dots + \alpha_n U_1 = c_n \xi, \quad c_n = \beta_m - \sum_{j=n-m}^{n-1} \alpha_{n-j} c_j.$$

Так как компоненты n -мерного процесса удовлетворяют системе уравнений первого порядка, в правых частях которых стоит «белый шум», то процесс является n -мерным марковским процессом. Определение коэффициентов уравнений Колмогорова производится так же, как в примере 40.1.

Пример 40.4. Условная плотность вероятности $f(t, x_1, x_2; \tau, y_1, y_2)$ двумерного случайного процесса $U_1(t), U_2(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial y_1} (\beta y_2 f) - \frac{\partial}{\partial y_2} (\alpha y_1 f) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} (\beta \sqrt{1+y_2^2} f) - \\ - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} (\alpha \sqrt{1+y_1^2} f) = 0, \end{aligned}$$

где α и β — постоянные.

Определить систему дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют функции $U_1(t)$ и $U_2(t)$.

Решение. Заданное уравнение является вторым уравнением Колмогорова, следовательно, процесс является двумерным марковским процессом.

Коэффициенты уравнения имеют значения

$$a_1 = -\beta y_2, \quad a_2 = -\alpha y_1, \quad b_{11} = \beta \sqrt{1+y_2^2} \\ b_{22} = \alpha \sqrt{1+y_1^2}, \quad b_{12} = 0.$$

Искомая система уравнений имеет вид

$$\frac{dU_1}{dt} = \psi_1(t, U_1, U_2) + \sum_{m=1}^2 g_{1m}(t, U_1, U_2) \xi_m(t), \\ \frac{dU_2}{dt} = \psi_2(t, U_1, U_2) + \sum_{m=1}^2 g_{2m}(t, U_1, U_2) \xi_m(t),$$

где $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ — некоррелированные случайные функции типа «белого шума» с единичной дисперсией. Согласно общей теории, для определения g_{lm} имеем систему алгебраических уравнений

$$g_{11}^2 + g_{12}^2 = \beta \sqrt{1+y_2^2}, \quad g_{21}^2 + g_{22}^2 = \alpha \sqrt{1+y_1^2}, \\ g_{11}g_{12} + g_{12}g_{22} = 0.$$

Отсюда находим

$$g_{12} = 0, \quad g_{11} = \sqrt{\beta \sqrt{1+y_2^2}}, \quad g_{22} = \sqrt{\alpha \sqrt{1+y_1^2}}, \\ \psi_1 = -\beta y_2, \quad \psi_2 = -\alpha y_1.$$

Следовательно, искомая система имеет вид

$$\frac{dU_1}{dt} + \beta U_2 = \sqrt{\beta \sqrt{1+U_2^2}} \xi_1(t), \\ \frac{dU_2}{dt} + \alpha U_1 = \sqrt{\alpha \sqrt{1+U_1^2}} \xi_2(t).$$

Пример 40.5. Определить асимметрию S_k и эксцесс E_k ординаты случайной функции $Z(t)$, определяемой равенством

$$\frac{dZ(t)}{dt} + k^2 Z(t) = \zeta^2(t),$$

если $\zeta(t)$ — нормальная случайная функция, $\bar{\zeta} = 0$, $K_\zeta(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$, а переходный процесс предполагается закончившимся (ср. с задачей 35.29).

Решение. Так как спектральная плотность

$$S_\zeta(\omega) = \frac{\alpha\sigma^2}{\pi} \frac{1}{\omega^2 + \alpha^2}$$

является дробно-рациональной функцией частоты, то $\zeta(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\zeta}{dt} + \alpha\zeta = \sigma \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \xi(t),$$

где $\xi(t)$ — «белый шум» с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Поэтому, введя в рассмотрение двумерный случайный процесс с компонентами $U_1(t) = Z(t)$, $U_2(t) = \zeta(t)$, для условной плотности вероятности $f(t, x_1, x_2; \tau, y_1, y_2)$ этого процесса получим второе уравнение Колмогорова в следующем виде:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y_1} [(y_2^2 - k^2 y_1) f] - \alpha \frac{\partial}{\partial y_2} (y_2 f) - \alpha \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2} = 0.$$

Для установившегося режима $f(t, x_1, x_2; \tau, y_1, y_2) = f(y_1, y_2)$ и уравнение Колмогорова примет вид

$$\frac{\partial}{\partial y_1} [(y_2^2 - k^2 y_1) f] - \alpha \frac{\partial}{\partial y_2} (y_2 f) - \alpha \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2} = 0.$$

По условию задачи необходимо определить начальные моменты m_l ординаты функции $Y_1(\tau)$ до четвертого включительно. Искомые моменты связаны с двумерной плотностью вероятности $f(y_1, y_2)$ соотношением

$$m_l = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y_1^l f(y_1, y_2) dy_1 dy_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_l(y_2) dy_2,$$

где обозначено

$$\chi_l(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} y_1^l f(y_1, y_2) dy_1.$$

Умножив обе части уравнения Колмогорова на y_1^l , интегрируя полученный результат по y_1 в бесконечных пределах и учитывая, что

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} y_1^l \frac{\partial}{\partial y_1} [(y_2^2 - k^2 y_1) f(y_1, y_2)] dy_1 = \\ & = y_1^l (y_2^2 - k^2 y_1) f(y_1, y_2) \Big|_{-\infty}^{\infty} - l \int_{-\infty}^{\infty} y_1^{l-1} (y_2^2 - k^2 y_1) f(y_1, y_2) dy_1 = \\ & = k^2 l \chi_l(y_2) - l y_2^2 \chi_{l-1}(y_2). \end{aligned}$$

получим рекуррентное соотношение между $\chi_l(y_2)$ и $\chi_{l-1}(y_2)$:

$$\alpha\sigma^2 \frac{d^2\chi_l}{dy_2^2} + \alpha \frac{d}{dy_2}(y_2\chi_l) - k^2l\chi_l = -ly_2^2\chi_{l-1}.$$

Умножая обе части последнего равенства последовательно на 1, y_2^2 , y_2^4 и y_2^6 , после интегрирования по частям и отбрасывания обращающихся в нуль внеинтегральных членов получим ряд равенств:

$$\begin{aligned} m_l &= \frac{1}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} y_2^2 \chi_{l-1}(y_2) dy_2, \\ m_{l+1} &= \frac{1}{k^2(k^2l+2\alpha)} \left\{ l \int_{-\infty}^{\infty} y_2^4 \chi_{l-1}(y_2) dy_2 + 2\alpha\sigma^2 m_l \right\}, \\ m_{l+2} &= \frac{l+1}{k^2(k^2l+4\alpha)[(l+1)k^2+2\alpha]} \left\{ l \int_{-\infty}^{\infty} y_2^6 \chi_{l-1}(y_2) dy_2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\alpha\sigma^2(6k^2+7k^2l+4\alpha)}{l+1} m_{l+1} \right\}, \\ m_{l+3} &= \frac{(l+1)(l+2)}{k^2(k^2l+6\alpha)(k^2l+k^2+4\alpha)[k^2(l+2)+2\alpha]} \times \\ &\quad \times \left\{ l \int_{-\infty}^{\infty} y_2^8 \chi_{l-1}(y_2) dy_2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\sigma^2\alpha[(13k^2+7k^2l+4\alpha)(k^2l+6\alpha)+15k^2(k^2l+k^2+2\alpha)(l+2)]}{(l+1)(l+2)} m_{l+2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{60\sigma^4\alpha^2}{l+1} m_{l+1} \right\}. \end{aligned}$$

Положив в этих равенствах $l=1$, получим возможность выразить четыре начальных момента через $\chi_0(y_2)$. Вследствие нормальности функции $Y_2(\tau) = \zeta(\tau)$

$$\chi_0(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) dy_1 = f(y_2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_2^2}{2\sigma^2}}.$$

Следовательно, все интегралы, входящие в предыдущие равенства, вычисляются, и мы получим ответ, совпадающий с ответом задачи 35.29, решенной более сложным образом.

Пример 40.6. Определить условную плотность вероятности $f(t, x_1, \dots, x_n; \tau, y_1, \dots, y_n)$ многомерного марковского процесса, если во втором уравнении Колмогорова

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial y_k} (a_k f) - \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_k} (b_{jk} f) = 0$$

коэффициенты $b_{jk} = \text{const}$, коэффициенты a_l — линейные функции y_j :

$$a_l = \alpha_l + \sum_{j=1}^n \alpha_{lj} y_j, \quad l, j = 1, 2, \dots, n,$$

а область изменения y_j есть $(-\infty, \infty)$.

Решение. В соответствии с условием задачи решение уравнения должно быть найдено при начальном условии

$$f = \prod_{l=1}^n \delta(y_l - x_l) \quad \text{при} \quad \tau = t$$

и при условии, что функция f обращается в нуль при $|y_l| \rightarrow \infty$,

а $\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f dy_1 \dots dy_n = 1$ для любого τ .

Переходим от плотности вероятности f системы случайных величин Y_1, Y_2, \dots, Y_n к характеристической функции

$$E(z_1, z_2, \dots, z_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i \sum_{l=1}^n z_l y_l \right\} f dy_1 \dots dy_n.$$

Для этого умножаем обе части второго уравнения Колмогорова на $\exp \left\{ i \sum_{l=1}^n z_l y_l \right\}$ и интегрируем по y_1, y_2, \dots, y_n в бесконечных пределах.

Если учесть при этом, что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i \sum_{j=1}^n z_j y_j \right\} \frac{\partial}{\partial y_l} (a_l f) dy_1 \dots dy_n = \\ = -i \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i \sum_{j=1}^n z_j y_j \right\} z_l a_l f dy_1 \dots dy_n = \\ = -i z_l a_l E - z_l \sum_{j=1}^n a_{lj} \frac{\partial E}{\partial z_j}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial y_j \partial y_l} \exp \left\{ i \sum_{m=1}^n z_m y_m \right\} dy_1 \dots dy_n = -z_j z_l E, \end{aligned}$$

то уравнение для E примет вид

$$\frac{\partial E}{\partial \tau} - \sum_{l, m=1}^n a_{ml} z_m \frac{\partial E}{\partial z_l} = \left(i \sum_{m=1}^n z_m a_m - \frac{1}{2} \sum_{m, l=1}^n z_m z_l b_{ml} \right) E.$$

Положив $E = \exp \{-V\}$, для V получим уравнение

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} - \sum_{j, l=1}^n a_{jl} z_j \frac{\partial V}{\partial z_l} = -i \sum_{j=1}^n z_j a_j + \frac{1}{2} \sum_{j, l=1}^n z_j z_l b_{jl},$$

которое, в соответствии с начальными условиями для f , нужно интегрировать при условии

$$\tau = t, \quad V = i \sum_{j=1}^n z_j x_j.$$

Из общей теории известно, что закон распределения для рассматриваемого процесса является нормальным. Поэтому ищем решение для V в виде полинома второй степени от z_j , т. е. в виде

$$V = \frac{1}{2} \sum_{j, l=1}^n k_{jl} z_j z_l - i \sum_{j=1}^n \bar{y}_j z_j,$$

где k_{jl} и \bar{y}_j — вещественные функции от τ . Для определения этих функций подставляем последнее выражение в дифференциальное уравнение для V и приравниваем коэффициенты

при одинаковых степенях z_l в левой и правой частях уравнения. В результате получим

$$\frac{d\bar{y}_j}{d\tau} - \sum_{l=1}^n \alpha_{jl} \bar{y}_l = \alpha_j, \quad (j, l = 1, 2, \dots, n).$$

$$\frac{dk_{jl}}{d\tau} - \sum_{m=1}^n \alpha_{jm} k_{ml} = b_{jl}$$

Система уравнений для определения \bar{y}_j не зависит от k_{jl} и должна быть решена при начальных условиях: $\tau = t$, $\bar{y}_j = x_j$. Система уравнений для k_{jl} не зависит от \bar{y}_j и должна быть решена при начальных условиях: $\tau = t$, $k_{jl} = 0$. Из общей теории линейных дифференциальных уравнений следует, что y_j и k_{jl} являются линейными комбинациями экспоненциальных функций вида $e^{\lambda(\tau-t)}$, где λ — корни соответствующего характеристического уравнения (при наличии кратных корней коэффициентами у экспонент могут быть полиномы от τ). Общие формулы могут быть получены методами матричного исчисления.

Пример 40.7. Найти условную плотность вероятности $f(t, x; \tau, y)$ для процесса, определяемого уравнением

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\beta y - \frac{\alpha^2}{2y} \right) f \right] - \frac{\alpha^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < y < \infty,$$

если α и β — постоянные.

Решение. Применяем метод Фурье, т. е. ищем сначала две функции $\psi(\tau)$ и $\chi(y)$, произведение которых удовлетворяет данному уравнению независимо от вида начальных условий. Подстановка в уравнение дает

$$\frac{1}{\psi} \frac{d\psi}{d\tau} = \frac{1}{\chi} \left\{ \frac{d}{dy} \left[\left(\beta y - \frac{\alpha^2}{2y} \right) \chi \right] + \frac{\alpha^2}{2} \frac{d^2 \chi}{dy^2} \right\}.$$

Так как левая часть равенства не зависит от y , а правая не зависит от τ , то обе части равенства равны постоянной. Обозначив эту постоянную через $-\lambda$, получим

$$\frac{d\psi}{d\tau} + \lambda \psi = 0,$$

$$\frac{\alpha^2}{2} \frac{d^2 \chi}{dy^2} + \frac{d}{dy} \left[\left(\beta y - \frac{\alpha^2}{2y} \right) \chi \right] + \lambda \chi = 0.$$

Первое уравнение имеет очевидное решение

$$\psi(\tau) = e^{-\lambda(\tau-t)}.$$

Второе уравнение имеет решение, стремящееся к нулю на бесконечности, только при дискретных значениях $\lambda = 2n\beta$, $n = 0, 1, \dots$. В этом случае уравнение для $\chi(y)$ имеет решение

$$\chi(y) = \frac{1}{n!} \frac{y}{\sigma^2} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} L_n \left(\frac{y^2}{2\sigma^2} \right),$$

где $L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n)$ — ортогональные полиномы Лагерра, а $\sigma^2 = \frac{a^2}{2\beta^2}$. Так как найденные функции $\psi(\tau)$ и $\chi(y)$ зависят от целого числа n , то решение f исходного дифференциального уравнения можно искать в виде линейной комбинации произведений этих функций, т. е. в виде

$$f(t, x; \tau, y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-2n\beta(\tau-t)} \frac{1}{n!} \frac{y}{\sigma^2} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} L_n \left(\frac{y^2}{2\sigma^2} \right),$$

где коэффициенты c_n должны быть определены так, чтобы при $\tau = t$ функция $f(t, x; \tau, y)$ обратилась в $\delta(y - x)$, т. е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{1}{n!} \frac{y}{\sigma^2} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} L_n \left(\frac{y^2}{2\sigma^2} \right) = \delta(y - x).$$

Для определения постоянных c_n достаточно умножить последнее равенство на $y e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} L_n \left(\frac{y^2}{2\sigma^2} \right)$ и проинтегрировать по y в пределах $(0, \infty)$. Пользуясь ортогональностью полиномов Лагерра и свойствами δ -функции, получим

$$c_n = \frac{1}{n!} \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} L_n \left(\frac{x^2}{2\sigma^2} \right),$$

т. е.

$$f(t, x; \tau, y) = \frac{xy}{\sigma^4} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} L_n \left(\frac{x^2}{2\sigma^2} \right) L_n \left(\frac{y^2}{2\sigma^2} \right) e^{-2n\beta(\tau-t)}.$$

Пример 40.8. Найти вероятность $W(\tau)$ того, что ордината процесса $U(t)$, определяемого уравнением $\frac{dU}{dt} + \alpha U = \xi(t)$,

где $S_\xi(\omega) = c^2 = \text{const}$, $\bar{\xi} = 0$, к моменту τ ни разу не перейдет уровень $y=0$, если при $t=0$ $U(t) = -\beta$; $\beta > 0$.

Решение. Плотность вероятности $w(\tau, y)$ того, что в момент времени τ ордината случайного процесса, ни разу не перейдя нулевой уровень, будет находиться в интервале $(y, y+dy)$, определяется вторым уравнением Колмогорова

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} - \alpha \frac{\partial}{\partial y}(yw) - \frac{c^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

которое в данном случае нужно решать для $y \leq 0$ при условиях: $w(\tau, y) = \delta(y + \beta)$ при $\tau = 0$; $w(\tau, 0) = 0$ при любом τ . Искомая вероятность

$$W(\tau) = \int_{-\infty}^0 w(\tau, y) dy.$$

Для упрощения коэффициентов уравнения введем безразмерные переменные

$$\tau_1 = \alpha \tau, \quad y_1 = \frac{\sqrt{\alpha}}{c} y,$$

после чего уравнение примет вид

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2} + \frac{\partial}{\partial y_1}(y_1 w) - \frac{\partial w}{\partial \tau_1} = 0;$$

$$w(\tau_1, y_1) = \frac{\sqrt{\alpha}}{c} \delta(y_1 + \beta_1) \quad \text{при} \quad \tau_1 = 0,$$

$w(\tau_1, 0) = 0$ при $\tau_1 > 0$, где $\beta_1 = \frac{\sqrt{\alpha}}{c} \beta$.

Решая уравнение методом Фурье, положим $w(\tau_1, y_1) = \psi(\tau_1) \chi(y_1)$, что для функций $\psi(\tau_1)$ и $\chi(y_1)$ дает уравнения

$$\frac{1}{\psi} \frac{d\psi}{d\tau_1} = -\lambda^2, \quad \frac{d^2 \chi}{dy_1^2} + 2y_1 \frac{d\chi}{dy_1} + 2(\lambda^2 + 1)\chi = 0.$$

Первое уравнение имеет очевидное решение $\psi(\tau_1) = e^{-\lambda^2 \tau_1}$, второе уравнение имеет конечные на бесконечности решения только при $\lambda^2 = n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), когда

$$\chi(y_1) = e^{-y_1^2} H_n(y_1),$$

где

$$H_n(y_1) = (-1)^n e^{y_1^2} \frac{d^n}{dy_1^n} (e^{-y_1^2}) - \text{полином Эрмита.}$$

Следовательно, решение можно искать в виде

$$\omega = e^{-y_1^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-n\tau_1} H_n(y_1).$$

Так как при $y_1 = 0$ ω должно обращаться в нуль при любом τ_1 , то ряд может содержать только полиномы $H_n(y_1)$ с нечетными индексами ($H_{2k+1}(0) = 0$, $H_{2k}(0) \neq 0$ при любом целом $k \geq 0$). Следовательно, решение должно иметь вид

$$\omega = e^{-y_1^2} \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} e^{-(2k+1)\tau_1} H_{2k+1}(y_1).$$

Для определения коэффициентов a_{2k+1} необходимо удовлетворить начальному условию, т. е. условию

$$e^{-y_1^2} \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} H_{2k+1}(y_1) = \frac{\sqrt{a}}{c} \delta(y_1 + \beta_1), \quad y_1 \leq 0.$$

Этому условию эквивалентно условие для области изменения y_1 от $-\infty$ до $+\infty$:

$$e^{-y_1^2} \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} H_{2k+1}(y_1) = \frac{\sqrt{a}}{c} \delta(y_1 + \beta_1) - \frac{\sqrt{a}}{c} \delta(y_1 - \beta_1).$$

Умножая обе части последнего равенства на $H_{2k+1}(y_1)$, интегрируя по y_1 от $-\infty$ до $+\infty$ и учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{mn}$$

($\delta_{nn} = 1$, $\delta_{mn} = 0$ при $n \neq m$), получим

$$a_{2k+1} = - \frac{1}{2^{2k+1} (2k+1)! \sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{a}}{c} \cdot 2H_{2k+1}(\beta_1).$$

Таким образом,

$$\omega = - e^{-y_1^2} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(2k+1)\tau_1} \frac{\sqrt{a}}{2^{2k} (2k+1)! \sqrt{\pi} c} H_{2k+1}(\beta_1) H_{2k+1}(y_1).$$

Возвращаясь к переменным y и τ , будем иметь

$$\omega(\tau, y) = -\frac{\sqrt{\alpha}}{c\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(2k+1)\tau\alpha} e^{-\frac{\alpha}{c^2}y^2} \times \\ \times \frac{1}{2^{2k}(2k+1)!} H_{2k+1}\left(\frac{\sqrt{\alpha}\beta}{c}\right) H_{2k+1}\left(\frac{\sqrt{\alpha}y}{c}\right).$$

Подставляя полученный ряд в формулу для $W(\tau)$ и учитывая, что

$$\int_{-\infty}^0 e^{-\frac{\alpha y^2}{c^2}} H_{2k+1}\left(\frac{\sqrt{\alpha}y}{c}\right) \frac{\sqrt{\alpha}}{c} dy = \\ = \int_{-\infty}^0 e^{-y_1^2} H_{2k+1}(y_1) dy_1 = (-1)^{k+1} \frac{(2k)!}{k!},$$

получим

$$W(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(2k+1)\tau\alpha} \frac{(-1)^k}{2^{2k}(2k+1)k!} H_{2k+1}\left(\frac{\sqrt{\alpha}\beta}{c}\right).$$

Задачи

40.1. Найти коэффициенты уравнений Колмогорова для n -мерного марковского процесса, если его компоненты $U_1(t)$, $U_2(t)$, ..., $U_n(t)$ определяются системой уравнений

$$\frac{dU_j}{dt} = \psi_j(t, U_1, \dots, U_n) + \varphi_j(t, U_1, \dots, U_n) \xi_j(t), \\ j = 1, 2, \dots, n,$$

где ψ_j и φ_j — заданные непрерывные функции своих переменных, а $\xi_j(t)$ — независимые случайные функции, обладающие свойствами «белого шума»:

$$\bar{\xi}_j = 0, \quad K_{\xi_j}(\tau) = \delta(\tau).$$

40.2. Дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dU_j}{dt} = \psi_j(t, U_1, \dots, U_n, Z), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

где ψ_j — заданные непрерывные функции своих аргументов, а $Z(t)$ — нормальный стационарный случайный процесс, имеющий спектральную плотность

$$S_z(\omega) = \frac{c^2}{(\omega^2 + \alpha^2)^3}.$$

Добавить к многомерному процессу $U_1(t), \dots, U_n(t)$ необходимое количество компонент таким образом, чтобы полученный процесс был марковским. Составить для него уравнения Колмогорова.

40.3. Дано, что $U(t)$ — стационарный нормальный процесс, спектральная плотность которого

$$S_u(\omega) = \frac{c^2 \omega^2}{[(\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\beta^2 \omega^2]},$$

где c , α и β — постоянные.

Показать, что $U(t)$ можно рассматривать как компоненту многомерного марковского процесса, определить число измерений процесса и коэффициенты уравнений Колмогорова для этого процесса.

40.4. Определить коэффициенты уравнений Колмогорова для многомерного марковского процесса, заданного системой уравнений

$$\frac{dU_j}{dt} = \varphi_j(t, U_1, \dots, U_n) + Z_j(t),$$

где

$$\bar{z}_j(t) = 0, \quad \mathbf{M}[Z_j(t) Z_l(t + \tau)] = \psi_{jl}(t) \delta(\tau), \\ j, l = 1, 2, \dots, n,$$

а φ_j и ψ_{jl} — заданные непрерывные функции своих аргументов.

40.5. Случайные функции $U_j(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dU_j}{dt} = \varphi_j(t, U_1, \dots, U_r, Z), \quad j = 1, 2, \dots, r,$$

где φ_j — заданные непрерывные функции своих аргументов, а $Z(t)$ — стационарная нормальная случайная функция с дробно-рациональной плотностью:

$$\bar{z} = 0, \quad S_z(\omega) = \frac{|P_m(i\omega)|^2}{|Q_n(i\omega)|^2}, \quad n > m,$$

где полиномы

$$P_m(x) = \beta_0 x^m + \beta_1 x^{m-1} + \dots + \beta_m,$$

$$Q_n(x) = x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_n$$

имеют корни только в верхней полуплоскости.

Показать, что $U_1(t), \dots, U_r(t)$ можно рассматривать как компоненты многомерного марковского процесса, определить число измерений этого процесса и найти для него коэффициенты уравнений Колмогорова.

40.6. Показать, что если для многомерного марковского процесса справедливо уравнение Колмогорова

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\left(\alpha_j - \sum_{m=1}^n \alpha_{jm} y_m \right) f \right] -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{j,m=1}^n \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_m} (b_{jm} f) = 0,$$

где $\alpha_j, \alpha_{jm}, b_{jm}$ ($j, m = 1, 2, \dots, n$) — постоянные, то случайный процесс удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dU_j}{dt} + \sum_{m=1}^n \alpha_{jm} U_m = \eta_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

где

$$\bar{\eta}_j = \alpha_j, \quad K_{\eta_j}(\tau) = b_{jj} \delta(\tau), \quad R_{\eta_j \eta_m}(\tau) = b_{jm} \delta(\tau).$$

40.7. Вывести систему дифференциальных уравнений для компонент двумерного марковского процесса $U_1(t), U_2(t)$, если условная плотность вероятности $f(t, x_1, x_2; \tau, y_1, y_2)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{1}{\mu} \left[y_2 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \psi(y_1) \frac{\partial f}{\partial y_2} \right] -$$

$$- \frac{1}{\mu^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} (y_2 f) + \frac{\kappa^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2} \right] = 0,$$

$$\mu = \text{const}, \quad \kappa = \text{const}.$$

40.8. Определить закон распределения ординаты случайной функции $U(t)$ для установившегося режима, если

$$\frac{d^2 U}{dt^2} + \frac{\alpha^2}{2} \frac{dU}{dt} + \varphi(U) = \xi(t),$$

где α — постоянная, $\varphi(U)$ — заданная функция, обеспечивающая существование установившегося режима,

$$\bar{\xi}(t) = 0, \quad K_{\xi}(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau).$$

Решить задачу в частном случае $\varphi(U) = \beta^2 U^3$.

40.9. Определить стационарный закон распределения ординаты случайной функции $U(t)$, если

$$\frac{dU}{dt} = \varphi(U) + \psi(U) \xi(t),$$

где $\varphi(U)$ и $\psi(U)$ — заданные функции, а $\xi(t)$ — «белый шум» с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

40.10. На вход диодного детектора, являющегося последовательным соединением нелинейного элемента с вольт-амперной характеристикой $F(V)$ и параллельной цепочки RC , поступает случайный сигнал $\xi(t)$. Определить стационарный закон распределения напряжения $U(t)$ на цепочке RC , если уравнение детектора имеет вид

$$\frac{dU}{dt} + \frac{1}{RC} U = \frac{1}{C} F(\xi - U),$$

где R и C — постоянные, а $\xi(t)$ — нормальная стационарная функция, для которой

$$\bar{\xi}(t) = 0, \quad K_{\xi}(\tau) = \sigma^2 e^{-\frac{|\tau|}{RC}}.$$

Решить задачу для частного случая, когда

$$F(v) = \begin{cases} kv, & v \geq 0, \\ 0, & v < 0. \end{cases}$$

40.11. Определить закон распределения ординаты случайной функции $U(t)$ для момента времени $\tau > 0$, если

$$\alpha \frac{dU}{dt} - \frac{\sigma^2}{2U} = \sigma \xi(t), \quad \bar{\xi} = 0, \quad K_{\xi}(\tau) = \alpha \delta(\tau),$$

$$f_0(x) = \frac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, \quad U(t) = X \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (x \geq 0).$$

40.12. Уравнение, определяющее напряжение $U(t)$ экспоненциального детектора, на вход которого поступает

нормальный случайный процесс $\zeta(t)$, обладающий малым временем корреляции, имеет вид

$$\frac{dU}{dt} + \frac{1}{RC} U = \frac{i_0}{C} e^{a\zeta - aU},$$

где R , C , a , i_0 — постоянные детектора, $\bar{\zeta} = 0$,

$$K_{\zeta}(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}.$$

Представляя приближенно

$$e^{a\zeta(t)} = M[e^{a\zeta(t)}] + \xi(t)$$

и считая

$$\xi(t) = e^{a\zeta(t)} - M[e^{a\zeta(t)}]$$

дельта-коррелированным процессом:

$$K_{\xi}(\tau) \approx \sigma_{\xi}^2 \delta(\tau),$$

где

$$\sigma_{\xi}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} K_{\xi}(\tau) d\tau,$$

определить стационарный закон распределения для ординаты $U(t)$.

40.13. Случайный процесс $U(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dU}{dt} = -\varphi(U) + \sigma_{\xi}^2(t),$$

где $\varphi(U)$ — заданная функция, $\xi(t)$ — «белый шум» с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, а при заданном виде функции $\varphi(U)$ возможен установившийся режим. Определить плотность вероятности $f(y)$ для установившегося режима.

40.14. Случайная функция $U(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dU}{dt} = \alpha(t) + \beta(t)U + \gamma(t)\xi(t)$$

при начальных условиях $\tau = t$, $U(t) = x$.

Найти закон распределения ординат случайной функции для момента времени $\tau \geq t$, если $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ — заданные функции времени, $\xi(t)$ — «белый шум» с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

40.15. Отклонение руля высоты самолета, сообщаемое автопилотом для ликвидации воздействия пульсаций ветра, характеризуемых случайной функцией $\varepsilon(t)$, приближенно описывается дифференциальным уравнением

$$T_0 \frac{d\Delta}{dt} + \Delta = i_0 \varepsilon(t),$$

где T_0 и i_0 — постоянные.

Определить условную плотность вероятности $f(t, x; \tau, y)$ ординаты случайной функции $\Delta(t)$, если математическое ожидание $\varepsilon(t) = 0$ и приближенно можно считать, что $K_\varepsilon(\tau) = \sigma_\varepsilon^2 \delta(\tau)$, а $\Delta = x$ при $\tau = t$.

40.16. На вход динамической системы второго порядка поступает случайное возмущение $\zeta(t)$:

$$\frac{d^2 U}{dt^2} + 2h \frac{dU}{dt} + k^2 U = \zeta(t), \quad k > h > 0.$$

Определить условный закон распределения ординаты случайного процесса $U(t)$ в момент времени $\tau \geq t$, если в момент времени t $U(t) = x$, $\dot{U}(t) = 0$, $\bar{\zeta}(t) = 0$, $K_\zeta(\tau) = c^2 \delta(\tau)$; c, h, k — заданные постоянные.

40.17. Уравнение, определяющее работу звена системы автоматического регулирования, имеет вид

$$\frac{dU}{dt} = -\alpha \operatorname{sgn} U + c \xi(t),$$

где α, c — постоянные,

$$\bar{\xi}(t) = 0, \quad K_\xi(\tau) = \delta(\tau).$$

Составить уравнение Колмогорова для определения условной плотности вероятности $f(t, x; \tau, y)$.

40.18. Движущаяся заряженная частица находится под действием трех сил, направленных параллельно вектору скорости частицы $U(t)$: силы, создаваемой электрическим полем напряженностью $\xi(t)$; ускоряющей силы, создаваемой полем напряженностью которого может быть принята обратно пропорциональной скорости частицы, и силы трения, пропорциональной скорости частицы. Уравнение движения частицы имеет вид

$$\frac{dU}{dt} = -\beta U + \frac{\gamma}{U} + \alpha \xi(t).$$

Определить плотность вероятности $f(t, x; \tau, y)$ для величины скорости частицы $U(t)$, если α , β и γ — постоянные, а $\bar{\xi}(t) = 0$, $K_{\xi}(\tau) = \delta(\tau)$; масса частицы равна m .

40.19. На вход радиоприемника поступает случайная помеха $U(t)$, которая воспринимается только в том случае, если абсолютная величина сигнала больше порога чувствительности приемника u_0 . Определить вероятность $W(T)$ того, что в течение времени T не будет принято ни одного ложного сигнала, если $U(t)$ — нормальный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией

$$K_u(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|},$$

где u_0 , α и σ — постоянные, а $U(t) = 0$ при $t = 0$.

40.20. На вход радиоприемника поступает случайная помеха $U(t)$, которая воспринимается только в том случае, если величина сигнала больше порога чувствительности приемника u_0 . Определить вероятность $W(T)$ того, что в течение времени T не будет принято ни одного ложного сигнала, если $U(t)$ — нормальный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией

$$K_u(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|},$$

где u_0 , α и σ — постоянные, а $U(t) = 0$ при $t = 0$.

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ

§ 41. Определение моментов случайных величин по результатам опытов

Основные формулы

Приближенные значения моментов случайных величин, получаемые при обработке результатов опытов, называются оценками (подходящими значениями) этих величин и обозначаются далее теми же буквами, что и оцениваемые числовые характеристики случайных величин, но с волнистой чертой сверху (например, $\tilde{M}[X]=\tilde{x}$, $\tilde{D}[X]$, \tilde{k}_{xy} , $\tilde{\sigma}_x$ и т. д.). Набор значений (x_1, x_2, \dots, x_n) случайной величины X , полученных в результате n опытов, называется выборкой объема n . Предполагается, что опыты произведены в одинаковых условиях и независимо. При неограниченном возрастании объема выборки n оценка должна сходиться по вероятности к оцениваемому параметру. Оценка называется несмещенной, если при любом объеме выборки ее математическое ожидание совпадает с искомым параметром. Несмещенной оценкой математического ожидания является среднее арифметическое

$$\tilde{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j = C + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - C),$$

где C — произвольное число, вводимое для удобства расчетов («ложный нуль»).

При неизвестном значении математического ожидания несмещенной оценкой дисперсии будет

$$\begin{aligned}\tilde{D}[X] &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \tilde{x})^2 = \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - C)^2 - \frac{n}{n-1} (\tilde{x} - C)^2.\end{aligned}$$

Если исследуемая случайная величина распределена нормально, то несмещенная оценка среднего квадратического отклонения определяется формулой

$$\tilde{\sigma} = k_n \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \tilde{x})^2} \approx \sqrt{\frac{1}{n-1,45} \sum_{j=1}^n (x_j - \tilde{x})^2},$$

где $k_n = \sqrt{\frac{n-1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}}$.

Значения коэффициента k_n приведены в таблице 23.

Таблица 23

n	k_n	n	k_n	n	k_n
3	1,1284	10	1,0280	30	1,0087
4	1,0853	12	1,0230	35	1,0072
5	1,0640	15	1,0181	40	1,0064
6	1,0506	20	1,0134	45	1,0056
7	1,0423	25	1,0104	50	1,0051

При известном математическом ожидании несмещенная оценка дисперсии

$$\tilde{D}[X] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2.$$

¹⁾ Если исследуемая величина нормальна, то несмещенная оценка для среднего квадратического отклонения определяется по формуле

$$\tilde{\sigma} = k_{n+1} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2}.$$

Если $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$ — значения случайных величин X и Y , полученные в результате n независимых опытов, произведенных в одинаковых условиях, то несмещенная оценка корреляционного момента случайных величин:

при неизвестных математических ожиданиях X и Y

$$\tilde{k}_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \tilde{x})(y_j - \tilde{y});$$

при известных математических ожиданиях

$$\tilde{k}_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y}).$$

Оценка коэффициента корреляции находится по формуле

$$\tilde{r}_{xy} = \frac{\tilde{k}_{xy}}{\tilde{\sigma}_x \tilde{\sigma}_y}.$$

При большом объеме выборки элементы статистического ряда объединяют в группы (разряды), представляя результаты опыта в виде упорядоченного вариационного ряда (табл. 24).

Таблица 24

№ разряда	1	2	...	k
Границы разряда $x_{j-1} - x_j$	$x_0 - x_1$	$x_1 - x_2$...	$x_{k-1} - x_k$
Среднее значение для разряда x_j^*	x_1^*	x_2^*	...	x_k^*
Численность разряда m_j	m_1	m_2	...	m_k
Частота разряда $p_j = \frac{m_j}{n}$	p_1^*	p_2^*	...	p_k^*

Оценки математического ожидания, дисперсии и моментов более высокого порядка в этом случае приближенно определяются формулами:

$$\begin{aligned}\tilde{x} &\approx \sum_{j=1}^k x_j^* p_j^*, \\ \tilde{D}[X] &\approx \sum_{j=1}^k (x_j^* - \tilde{x})^2 p_j^*, \\ \tilde{\mu}_s[X] &\approx \sum_{j=1}^k (x_j^* - \tilde{x})^s p_j^*, \\ \tilde{m}_s[X] &\approx \sum_{j=1}^k (x_j^*)^s p_j^*,\end{aligned}$$

или более точными формулами (с учетом поправок Шепарда):

$$\begin{aligned}\tilde{m}_1[X] &\approx \sum_{j=1}^k x_j^* p_j^*, \\ \tilde{m}_2[X] &\approx \sum_{j=1}^k (x_j^*)^2 p_j^* - \frac{h^2}{12}, \\ \tilde{m}_3[X] &\approx \sum_{j=1}^k (x_j^*)^3 p_j^* - \frac{h^2}{4} \sum_{j=1}^k x_j^* p_j^*, \\ \tilde{m}_4[X] &\approx \sum_{j=1}^k (x_j^*)^4 p_j^* - \frac{h^2}{2} \sum_{j=1}^k (x_j^*)^2 p_j^* + \frac{7h^4}{240}, \\ \tilde{\mu}_2[X] &\approx \sum_{j=1}^k (x_j^* - \tilde{x})^2 p_j^* - \frac{h^2}{12}, \\ \tilde{\mu}_3[X] &\approx \sum_{j=1}^k (x_j^* - \tilde{x})^3 p_j^*, \\ \tilde{\mu}_4[X] &\approx \sum_{j=1}^k (x_j^* - \tilde{x})^4 p_j^* - \frac{h^2}{2} \sum_{j=1}^k (x_j^* - \tilde{x})^2 p_j^* + \frac{7h^4}{240},\end{aligned}$$

где h — длина интервала разряда.

Решение типовых примеров

Пример 41.1. Для определения точности измерительного прибора, систематическая ошибка которого практически равна нулю, было произведено пять независимых измерений, результаты которых представлены в таблице 25.

Таблица 25

№ измерения	1	2	3	4	5
$x_j, м$	2781	2836	2807	2763	2858

Определить несмещенную оценку дисперсии ошибок измерительного прибора, если: значение измеряемой величины а) известно и равно 2800 м; б) неизвестно.

Решение. Значение измеряемой величины равно \bar{x} . Поэтому в случае а) несмещенная оценка дисперсии определяется по формуле

$$\tilde{D}[X] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2 = \frac{6439}{5} = 1287,8 \text{ м}^2.$$

Когда значение измеряемой величины неизвестно, ее оценка

$$\tilde{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j = 2809 \text{ м}.$$

Таблица 26

№ опыта	$x_j, м$
1	92
2	101
3	103
4	98
5	96

Поэтому в случае б) несмещенная оценка дисперсии

$$\begin{aligned} \tilde{D}[X] &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \tilde{x})^2 = \\ &= \frac{6034}{4} = 1508,5 \text{ м}^2. \end{aligned}$$

Аналогично решаются задачи 41.1—41.4, 41.13—41.16.

Пример 41.2. Для определения оценки среднего квадратического отклонения ошибок измерительного прибора, систематические ошибки которого практически равны нулю, было произведено пять независимых опытов, результаты которых приведены в таблице 26.

При обработке результатов измерений использовались две формулы, позволяющие определить несмещенные оценки σ :

$$\tilde{\sigma}_1 = k_n \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \tilde{x})^2},$$

$$\tilde{\sigma}_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2n(n-1)} \sum_{j=1}^n |x_j - \tilde{x}|} \equiv k \sum_{j=1}^n |x_j - \tilde{x}|.$$

Найти $\tilde{\sigma}_1$ и $\tilde{\sigma}_2$ и определить дисперсии этих оценок, считая, что ошибки прибора подчиняются нормальному закону.

Решение. Заполнив таблицу 27 и суммируя по ее колонкам, получим:

$$A_1 = \sum_j x_j = 490,$$

$$A_2 = \sum_j |x_j - \tilde{x}| = 16,$$

$$A_3 = \sum_j (x_j - \tilde{x})^2 = 74,$$

$$\tilde{x} = \frac{A_1}{n} = 98 \text{ м.}$$

$$\tilde{\sigma}_1 = k_n \sqrt{\frac{A_3}{n-1}} = 1,064 \sqrt{\frac{74}{4}} = 4,57 \text{ м.}$$

$$\tilde{\sigma}_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2n(n-1)}} A_2 = 4,48 \text{ м.}$$

Таблица 27

x_j	$ x_j - \tilde{x} $	$(x_j - \tilde{x})^2$
92	6	36
101	3	9
103	5	25
98	0	0
96	2	4

Полученные таким образом оценки $\tilde{\sigma}_1$ и $\tilde{\sigma}_2$ являются случайными величинами, математическое ожидание которых $\mathbf{M}[\tilde{\sigma}_1] = \mathbf{M}[\tilde{\sigma}_2] = \sigma$. Для нахождения дисперсии $\tilde{\sigma}_1$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{D}[\tilde{\sigma}_1] &= \mathbf{M}[(\tilde{\sigma}_1)^2] - \{\mathbf{M}[\tilde{\sigma}_1]\}^2 = \mathbf{M}\left[k_n^2 \frac{\sum_{j=1}^n (x_j - \tilde{x})^2}{n-1}\right] - \sigma^2 = \\ &= k_n^2 \mathbf{M}[\tilde{\mathbf{D}}[X]] - \sigma^2 = k_n^2 \sigma^2 - \sigma^2 = (k_n^2 - 1) \sigma^2 \end{aligned}$$

Для дисперсии случайной величины $\tilde{\sigma}_2$ имеем

$$\mathbf{D}[\tilde{\sigma}_2] = \mathbf{M}[(\tilde{\sigma}_2)^2] - \{\mathbf{M}[\tilde{\sigma}_2]\}^2,$$

где $\mathbf{M}[(\tilde{\sigma}_2)^2] = k^2 \mathbf{M}\left[\left(\sum_{i=1}^n |x_i - \tilde{x}|\right)^2\right]$.

Обозначим $z_i = x_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$. Так как z_i — линейная функция нормальных случайных величин, то она также имеет нормальное распределение, параметры которого

$$\begin{aligned} M[z_i] &= M\left[x_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j\right] = 0, \\ D[z_i] &= D\left[x_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j\right] = D\left[\frac{n-1}{n} x_i - \frac{1}{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_j\right] = \\ &= \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \sigma^2 + \frac{n-1}{n^2} \sigma^2 = \frac{n-1}{n} \sigma^2. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} M[(\tilde{\sigma}_z^2)] &= \\ &= k^2 M\left[\left(\sum_{j=1}^n |z_j|\right)^2\right] = k^2 M\left[\sum_{i=1}^n z_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n |z_i||z_j|\right] = \\ &= k^2 \{nD[z_i] + n(n-1)M[|z_i||z_j|]\}, \end{aligned}$$

где ($j \neq i$)

$$\begin{aligned} M[|z_i||z_j|] &= \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_z^2 \sqrt{1-r^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |z_1||z_2| e^{-\frac{z_1^2+z_2^2-2rz_1z_2}{2\sigma_z^2(1-r^2)}} dz_1 dz_2. \end{aligned}$$

После перехода к полярной системе координат имеем

$$\begin{aligned} M[|z_i||z_j|] &= \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_z^2 \sqrt{1-r^2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} R^3 |\sin \varphi| |\cos \varphi| e^{-\frac{R^2(1-r \sin 2\varphi)}{2\sigma_z^2(1-r^2)}} dR d\varphi = \\ &= \frac{2\sigma_z^2}{\pi} [\sqrt{1-r^2} + r \arcsin r]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Здесь } r &= \frac{M[z_i z_j]}{\sigma_z^2} = \frac{1}{\sigma_z^2} M\left[\left(\frac{n-1}{n} x_i - \frac{1}{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^n x_l\right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{n-1}{n} x_j - \frac{1}{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n x_k\right)\right] = -\frac{1}{n-1}. \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$D[\tilde{\sigma}_2] = M[(\tilde{\sigma}_2)^2] - \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \left(\frac{\pi}{2} + \sqrt{n(n-2)} - n + \arcsin \frac{1}{n-1} \right).$$

Соотношение между дисперсиями для случайных величин $\tilde{\sigma}_1$ и $\tilde{\sigma}_2$ при различных n показаны в таблице 28.

Таблица 28

n	5	10	20	50
$\frac{D[\tilde{\sigma}_2]}{D[\tilde{\sigma}_1]}$	1,053	1,096	1,150	1,170

Из решения примера следует, что оценка σ по формуле

$$\tilde{\sigma}_1 = k_n \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (x_j - \tilde{x})^2}{n-1}}$$

имеет меньшую дисперсию, чем результат, полученный по формуле $\tilde{\sigma}_2 = k \sum_{j=1}^n |x_j - \tilde{x}|$, т. е. оценка $\tilde{\sigma}_1$ является более эффективной.

Аналогично решаются задачи 41.7, 41.12, 41.20.

Пример 41.3. Из текущей продукции прецизионного токарного автомата был произведен выбор 200 валиков. Результаты измерений отклонений диаметров валиков от номинала даны в таблице 29.

Определить оценки математического ожидания, дисперсии, асимметрии и эксцесса отклонений диаметров валиков от номинала.

Решение. Для упрощения промежуточных расчетов введем случайную величину

$$z_j = \frac{x_j^* - C}{h},$$

где в качестве «ложного нуля» примем $C = 2,5$ мм, а ширина разряда $h = 5$ мм.

Таблица 29

№ разряда	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Границы разрядов, <i>мкс</i>	От -20 до -15	От -15 до -10	От -10 до -5	От -5 до 0	От 0 до +5	От +5 до +10	От +10 до +15	От +15 до +20	От +20 до +25	От +25 до +30
Среднее значение разряда, <i>мкс</i> (x_j)	-17,5	-12,5	-7,5	-2,5	+2,5	+7,5	+12,5	+17,5	+22,5	+27,5
Численность разряда	7	11	15	24	49	41	26	17	7	3
Частота разряда	0,035	0,055	0,075	0,120	0,245	0,205	0,130	0,085	0,035	0,015

Определим оценки первых четырех моментов случайной величины с учетом поправок Шеппарда.

Расчеты сводим в таблицу 30.

Таблица 30

№ раз-ряда	p_j^*	x_j^*	$z_j = \frac{x_j^* - C}{h}$	z_j^2	z_j^3	z_j^4	$p_j^* z_j$	$p_j^* z_j^2$	$p_j^* z_j^3$	$p_j^* z_j^4$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0,035	-17,5	-4	16	-64	256	-0,140	0,560	-2,240	8,960
2	0,055	-12,5	-3	9	-27	81	-0,165	0,495	-1,485	4,455
3	0,075	-7,5	-2	4	-8	16	-0,150	0,300	-0,600	1,200
4	0,120	-2,5	-1	1	-1	1	-0,120	0,120	-0,120	0,120
5	0,245	+2,5	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0,205	+7,5	1	1	1	1	0,205	0,205	0,205	0,205
7	0,130	+12,5	2	4	8	16	0,260	0,520	1,040	2,080
8	0,085	+17,5	3	9	27	81	0,255	0,765	2,295	6,885
9	0,035	+22,5	4	16	64	256	0,140	0,560	2,240	8,960
10	0,015	+27,5	5	25	125	625	0,075	0,375	1,875	9,375
Σ							A	B	D	E
$A = 0,36; D = 3,21;$ $B = 3,90; E = 42,24.$										

Учитывая поправки Шеппарда, получим:

$$\tilde{x} \approx hA + C = 4,30 \text{ мк},$$

$$\tilde{D}[X] \approx h^2 \left(B - A^2 - \frac{1}{12} \right) = 92,25 \text{ мк}^2,$$

$$\tilde{\mu}_3[X] \approx h^3 (D - 3AB + 2A^3) = -113,75 \text{ мк}^3,$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_4[X] \approx h^4 \left[E - A \left(4D - \frac{A}{2} \right) + B \left(6A^2 - \frac{1}{2} \right) - 3A^4 + \frac{7}{240} \right] = \\ = 24\,215,62 \text{ мк}^4, \end{aligned}$$

$$\tilde{S}_k[X] \approx \frac{\tilde{\mu}_3[X]}{\tilde{\sigma}_x^3} = \frac{-113,75}{885,97} = -0,128,$$

$$\tilde{E}_x[X] \approx \frac{\tilde{\mu}_4[X]}{\tilde{\sigma}_x^4} - 3 = \frac{24\,215,62}{8510,06} - 3 = -0,16.$$

Для тех же величин без учета поправок Шеппарда имеем (см. пример 43.2 и 43.4):

$$\begin{aligned}\tilde{x} &\approx 4,30 \text{ мк}, & \tilde{\mu}_4[X] &\approx 25\,375,00 \text{ мк}^4, \\ \tilde{S}_k[X] &\approx -0,125, & \tilde{E}_x[X] &\approx -0,145, \\ \tilde{D}[X] &\approx 94,26 \text{ мк}^2,\end{aligned}$$

Аналогично решаются задачи 41.5, 41.8, 41.18, 41.19.

Задачи

41.1. При 12 независимых измерениях одним и тем же прибором базы длиной 232,38 м получены следующие результаты: 232,50; 232,48; 232,15; 232,53; 232,45; 232,30; 232,48; 232,05; 232,45; 232,60; 232,47; 232,30 м. Предполагая, что ошибки измерений имеют нормальное распределение и не содержат систематической ошибки, определить несмещенную оценку среднего отклонения ошибок измерительного прибора.

41.2. Даны результаты 8 независимых измерений одной и той же величины прибором, не имеющим систематических ошибок: 369, 378, 315, 420, 385, 401, 372, 383 м. Определить несмещенную оценку дисперсии ошибок измерений, если: а) длина измеряемой базы известна: $\bar{x} = 375$ м; б) длина измеряемой базы неизвестна.

• **41.3.** При обработке данных 15 испытаний спортивного самолета были получены следующие значения его максимальной скорости: 422,2; 418,7; 425,6; 420,3; 425,8; 423,1; 431,5; 428,2; 438,3; 434,0; 411,3; 417,2; 413,5; 441,3; 423,0 м/сек. Определить несмещенные оценки математического ожидания и среднего квадратического отклонения максимальной скорости самолета, полагая, что максимальная скорость самолета имеет нормальное распределение.

41.4. При обработке данных 6 испытаний спортивного катера были получены следующие значения его максимальной скорости: 27, 38, 30, 37, 35, 31 м/сек. Определить несмещенные оценки математического ожидания и среднего отклонения максимальной скорости катера, полагая, что максимальная скорость катера имеет нормальное распределение.

• **41.5.** Чувствительность телевизора к видеопрограмме характеризуется данными, приведенными в таблице 31.

Таблица 31

x_j^* , МКВ	m_j	x_j^* , МКВ	m_j	x_j^* , МКВ	m_j
200	10	350	20	550	3
225	1	375	10	600	19
250	26	400	29	625	3
275	8	425	5	650	1
300	23	450	26	700	6
325	9	500	24	800	4

Определить оценки математического ожидания и среднего квадратического отклонения для чувствительности телевизора к видеопрограмме.

41.6. Для определения частоты события A производится n независимых опытов. Определить, при каком значении $P(A)$ дисперсия частоты будет максимальной.

41.7. Произведено n независимых измерений одной и той же неизвестной постоянной величины. Ошибки измерения подчиняются нормальному закону с математическим ожиданием, равным нулю.

Для определения оценки дисперсии по результатам опыта были использованы две формулы:

$$\tilde{\sigma}_1^2 = \sum_{j=1}^n \frac{(x_j - \tilde{x})^2}{n}, \quad \tilde{\sigma}_2^2 = \sum_{j=1}^n \frac{(x_j - \tilde{x})^2}{n-1}.$$

Определить дисперсию случайных величин $\tilde{\sigma}_1^2$ и $\tilde{\sigma}_2^2$.

41.8. Полученные в результате опыта значения случайной величины X разбиты на группы. Среднее значение x_j^* для каждой группы и число элементов в группе m_j даны в таблице 32.

Таблица 32

x_j^*	m_j	x_j^*	m_j	x_j^*	m_j
44	7	47	48	50	1
45	18	48	33	52	1
46	120	49	5	58	2

Определить оценки для коэффициента асимметрии и эксцесса.

41.9. Выборка из генеральной совокупности x_1, x_2, \dots, x_n подвергается обработке по разностям с целью определения оценки дисперсии. Для обработки результатов опыта применяется формула

$$\tilde{\sigma}_x^2 = k \sum_{j=1}^{n-1} (x_{j+1} - x_j)^2.$$

Каким должно быть k , чтобы $\tilde{\sigma}_x^2$ являлась несмещенной оценкой σ_x^2 , если случайная величина X является нормальной?

41.10. Пусть x_1, x_2, \dots, x_n — результаты независимых измерений неизвестной постоянной величины. Ошибки измерений подчиняются одному и тому же закону нормального распределения. Среднее квадратическое отклонение ошибок измерений определяется по формуле

$$\tilde{\sigma} = k \sum_{j=1}^n |x_j - \tilde{x}|,$$

где

$$\tilde{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j.$$

Определить значение k , при котором $\tilde{\sigma}$ является несмещенной оценкой σ .

41.11. Даны результаты независимых измерений x_1, x_2, \dots, x_n известной постоянной величины \bar{x} . Ошибки измерений подчиняются одному и тому же закону нормального распределения. Обработка наблюдений для определения оценки среднего квадратического отклонения ошибок измерений ведется по формуле

$$\tilde{\sigma} = k \sum_{j=1}^n |x_j - \bar{x}|.$$

Каким должно быть k , чтобы были несмещенными оценки: а) среднего квадратического отклонения ошибок; б) дисперсии ошибок?

41.12. Произведено n независимых неравноточных измерений x_1, x_2, \dots, x_n одной и той же неизвестной постоянной

величины. Оценка измеряемой величины определяется по формуле

$$\tilde{x} = \frac{\sum_{j=1}^n A_j x_j}{\sum_{j=1}^n A_j}.$$

Какими должны быть A_j , чтобы дисперсия \tilde{x} была минимальной, если среднее квадратическое отклонение ошибок j -го измерения равно σ_j ?

41.13. Произведено n независимых опытов над системой двух случайных величин, имеющей нормальное распределение на плоскости; в опытах определяются значения этих величин (x_k, y_k) ($k = 1, 2, \dots, n$). Главные оси рассеивания параллельны координатным осям. Определить несмещенные оценки математического ожидания и средних отклонений этих величин.

41.14. Решить задачу 41.13 для случая, когда результаты независимых испытаний даны в таблице 33.

Таблица 33

№ опыта (k)	$x_k, \text{ м}$	$y_k, \text{ м}$	№ опыта (k)	$x_k, \text{ м}$	$y_k, \text{ м}$
1	55	77	9	41	31
2	43	46	10	36	60
3	63	34	11	56	48
4	57	61	12	72	78
5	44	84	13	48	62
6	26	54	14	16	49
7	59	53	15	49	31
8	72	21	16	36	64

41.15. Для условий задачи 41.13 определить оценки параметров единичного эллипса рассеивания, если до проведения опытов направление главных осей рассеивания неизвестно.

41.16. Решить задачу 41.15 для случая, когда результаты 16 независимых испытаний даны в таблице 34.

Таблица 34

№ опыта	Отклонения, м										
	x_i	y_i									
1	+2	+59	5	+2	+72	9	+1	+7	13	+4	+103
2	+3	+88	6	0	+34	10	-2	+57	14	0	+65
3	+2	+32	7	+2	-12	11	-1	+42	15	+1	+16
4	-2	-24	8	+3	+50	12	+2	+23	16	+1	+28

41.17. Выборка из нормальной генеральной совокупности x_1, x_2, \dots, x_n подвергается обработке с целью определения оценки среднего квадратического отклонения по формуле

$$\tilde{\sigma} = k \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (x_j - \tilde{x})^2}{n}},$$

где $\tilde{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$.

Определить, каким должно быть k , чтобы $\tilde{\sigma}$ являлась несмещенной оценкой среднего квадратического отклонения σ .

41.18. Из таблицы случайных чисел взято 150 двузначных чисел (00 принималось за 100). Эти числа были разбиты по десяткам на интервалы (табл. 35).

Таблица 35

1—10	11—20	21—30	31—40	41—50	51—60	61—70	71—80	81—90	91—100
16	15	19	13	14	19	14	11	13	16

Построить гистограмму и график накопленной частоты. Определить оценки математического ожидания и дисперсии.

41.19. С помощью таблицы случайных однозначных чисел образовано 250 сумм по 5 чисел. По разрядам числа распределены так, как указано в таблице 36 (если число

попадает на границу разрядов, то в смежных разрядах прибавляется по $1/2$). Построить гистограмму и определить оценки математического ожидания и дисперсии.

Таблица 36

0—3	3—6	6—9	9—12	12—15	15—18	18—21	21—24
0	0,5	1,5	10,0	17,5	28,5	39	41
24—27	27—30	30—33	33—36	36—39	39—42	42—45	
45	30,5	27,0	7,5	1	1	0	

41.20. Произведено n независимых измерений одной и той же неизвестной постоянной величины. Систематические ошибки измерения равны нулю, а случайные ошибки распределены нормально. Для определения оценок дисперсии ошибок измерения были использованы две формулы:

$$\tilde{\sigma}_1^2 = \frac{\sum_{j=1}^n (x_j - \tilde{x})^2}{n-1}, \quad \tilde{\sigma}_2^2 = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{j=1}^{n-1} (x_{j+1} - x_j)^2.$$

Являются ли $\tilde{\sigma}_1^2$ и $\tilde{\sigma}_2^2$ несмещенными оценками для дисперсии? Какая из этих формул позволяет определять подходящее значение дисперсии с большей точностью?

§ 42. Доверительные вероятности и доверительные интервалы

Основные формулы

Доверительным интервалом называется интервал, который с заданной доверительной вероятностью α покрывает оцениваемый параметр Θ .

Для симметричного доверительного интервала его ширина 2ε определяется условием

$$P \{ |\Theta - \tilde{\Theta}| \leq \varepsilon \} = \alpha,$$

где $\tilde{\Theta}$ — оценка параметра Θ , а вероятность $\mathbf{P}\{|\Theta - \tilde{\Theta}| \leq \varepsilon\}$ определяется законом распределения оценки $\tilde{\Theta}$.

Если (x_1, x_2, \dots, x_n) — выборка из нормальной генеральной совокупности, то доверительная вероятность α определяется формулами:

а) для математического ожидания при известном σ

$$\alpha = \mathbf{P}\{|\tilde{x} - \bar{x}| \leq \varepsilon\} = \Phi\left(\frac{\varepsilon \sqrt{n}}{\sigma}\right);$$

при неизвестном σ

$$\alpha = \int_{-t_\alpha}^{t_\alpha} S_n(t) dt,$$

где

$$S_n(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi(n-1)} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \text{ — закон распределения Стьюдента,}$$

$$t_\alpha = \frac{\varepsilon \sqrt{n}}{\tilde{\sigma}} = \frac{\varepsilon \sqrt{n}}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \tilde{x})^2}}.$$

Значения t_α даны в таблице [16Т], входами в которую являются число степеней свободы $k = n - 1$ и доверительная вероятность α .

б) для среднего квадратического отклонения

$$\begin{aligned} \alpha = \mathbf{P}\{|\tilde{\sigma} - \sigma| \leq \varepsilon\} &= \mathbf{P}\left\{\frac{\sqrt{k}}{1+q} < \chi < \frac{\sqrt{k}}{1-q}\right\} = \\ &= \int_{\frac{\sqrt{k}}{1+q}}^{\frac{\sqrt{k}}{1-q}} P_k(\chi) d\chi, \end{aligned}$$

где $P_k(\chi) = \frac{\chi^{k-1} e^{-\frac{\chi^2}{2}}}{2^{\frac{k-2}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}, k = n - 1, q = \frac{\varepsilon}{\tilde{\sigma}}.$

Значения интеграла $\int_{\frac{\sqrt{k}}{1+q}}^{\frac{\sqrt{k}}{1-q}} P_k(\chi) d\chi$ приведены в таблице [20Т].

Доверительный интервал для σ , $(\gamma_1\tilde{\sigma}, \gamma_2\tilde{\sigma})$, вероятность выхода σ за правую и левую границы которого одинакова и равна $\frac{1-\alpha}{2}$, определяется формулой

$$\begin{aligned} P\left\{\frac{\sigma}{\tilde{\sigma}} \leq \gamma_1\right\} &= P\left\{\frac{\sigma}{\tilde{\sigma}} \geq \gamma_2\right\} = P\left\{\chi^2 \leq \frac{n-1}{\gamma_2^2}\right\} = \\ &= P\left\{\chi^2 \geq \frac{n-1}{\gamma_1^2}\right\} = \frac{1-\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Для определения γ_1 и γ_2 по заданной доверительной вероятности α и числу степеней свободы $k = n - 1$ можно использовать таблицу [19Т] или таблицу [18Т].

При экспоненциальном законе распределения случайной величины доверительный интервал для математического ожидания $(v_1\tilde{x}, v_2\tilde{x})$ определяется выражением

$$\begin{aligned} P\left\{\frac{\tilde{x}}{x} \leq v_1\right\} &= P\left\{\frac{\tilde{x}}{x} \geq v_2\right\} = P\left\{\chi^2 \leq \frac{2n}{v_2} = \chi_{1-\delta}^2\right\} = \\ &= P\left\{\chi^2 \geq \frac{2n}{v_1} = \chi_{\delta}^2\right\} = \frac{1-\alpha}{2} = \delta. \end{aligned}$$

Отсюда $v_1 = \frac{2n}{\chi_{\delta}^2}$, $v_2 = \frac{2n}{\chi_{1-\delta}^2}$.

Значения χ_{δ}^2 и $\chi_{1-\delta}^2$ определяются из таблицы [18Т] для вероятностей, соответственно равных δ и $1 - \delta$, и числа степеней свободы $k = 2n$.

При достаточно большом объеме выборки ($n > 15$) границы доверительного интервала для \bar{x} приближенно рассчитываются по формулам

$$\frac{4 \sum_{j=1}^n x_j}{(\sqrt{4n-1} + \varepsilon_0)^2}, \quad \frac{4 \sum_{j=1}^n x_j}{(\sqrt{4n-1} - \varepsilon_0)^2},$$

где ε_0 есть решение уравнения $\alpha = \Phi(\varepsilon_0)$.

Если из одной и той же генеральной совокупности произведено N выборок каждая объемом n и событие, вероятность появления которого согласуется с законом распределения Пуассона, происходило в каждой из этих выборок m_j раз ($j = 1, 2, \dots, N$), а оценка математического ожидания

для параметра a определена формулой $\tilde{a} = \frac{\sum_{j=1}^N m_j}{N}$, то при $\tilde{a} > 0$ границы доверительного интервала определяются из соотношения

$$\mathbf{P} \{2N\tilde{a} > \chi_{\delta}^2\} = \mathbf{P} \{2N\tilde{a} < \chi_{1-\delta}^2\} = \frac{1-\alpha}{2} = \delta,$$

т. е. для нижней и верхней границ они соответственно равны

$$\frac{\chi_{1-\delta}^2}{2N}, \quad \frac{\chi_{\delta}^2}{2N},$$

где $\chi_{1-\delta}^2$ и χ_{δ}^2 при заданном δ выбираются из таблицы [18Т],

причем $\chi_{1-\delta}^2$ — для числа степеней свободы $k = 2 \sum_{j=1}^N m_j$,

а χ_{δ}^2 — для $k = 2 \left(\sum_{j=1}^N m_j + 1 \right)$.

Для $\tilde{a} = 0$ нижняя граница равна нулю, а верхняя равна $\frac{\chi_{2\delta}^2}{2N}$, где $\chi_{2\delta}^2$ находится с помощью таблицы [18Т] для $k = 2$ и вероятности $\mathbf{P} \{2N\tilde{a} > \chi_{2\delta}^2\} = 2\delta$.

При достаточно большом k (практически более 30) границы доверительного интервала приближенно определяются формулами:

$$\begin{aligned} \text{нижняя} & \frac{\left(\sqrt{4 \sum_{j=1}^N m_j - 1 - \varepsilon_0} \right)^2}{4N}, \\ \text{верхняя} & \frac{\left(\sqrt{4 \sum_{j=1}^N m_j - 1 + \varepsilon_0} \right)^2}{4N}, \end{aligned}$$

где ε_0 есть решение уравнения $\alpha = \Phi(\varepsilon_0)$.

Если при n независимых опытах некоторое событие имело место ровно m раз ($0 < m < n$), то границы p_1, p_2 доверительного интервала для вероятности появления этого события p определяются решениями уравнений

$$\sum_{j=m}^n C_n^j p_1^j (1-p_1)^{n-j} = \frac{1-\alpha}{2},$$

$$\sum_{j=0}^m C_n^j p_2^j (1-p_2)^{n-j} = \frac{1-\alpha}{2}.$$

Эти уравнения приближенно решаются с помощью неполной β -функции. В таблице [30Т] для различных m и n и двух значений вероятности α , равных 0,95 и 0,99, приведены величины p_1 и p_2 .

Когда n достаточно велико, то приближенно

$$p_1 = \tilde{p} - \varepsilon, \quad p_2 = \tilde{p} + \varepsilon,$$

где $\tilde{p} = \frac{m}{n}$, а ε является решением уравнения

$$\alpha = \Phi\left(\frac{\varepsilon \sqrt{n}}{\sqrt{\tilde{p}(1-\tilde{p})}}\right).$$

Более точное приближение дают формулы

$$\left. \begin{array}{l} p_2 \\ p_1 \end{array} \right\} = \frac{1}{n + \varepsilon_0^2} \left[n\tilde{p} + \frac{\varepsilon_0^2}{2} \pm \frac{1}{2} \pm \right. \\ \left. \pm \varepsilon_0 \sqrt{\frac{\left(n\tilde{p} \pm \frac{1}{2}\right)\left(n - n\tilde{p} \mp \frac{1}{2}\right)}{n} + \frac{\varepsilon_0^2}{4}} \right]$$

и

$$\left. \begin{array}{l} 2 \arcsin \sqrt{p_2} \\ 2 \arcsin \sqrt{p_1} \end{array} \right\} = 2 \arcsin \sqrt{\frac{n\tilde{p} \pm \frac{1}{2}}{n}} \pm \frac{\varepsilon_0}{2\sqrt{n}},$$

одна из которых дает интервал с занижением, другая — с завышением того же порядка; ε_0 — решение уравнения $\alpha = \Phi(\varepsilon_0)$.

Если $m = 0$, то $p_1 = 0$, а $p_2 = 1 - \sqrt[1-\alpha]{n}$;

если $m = n$, то $p_2 = 1$, а $p_1 = \sqrt[1-\alpha]{n}$.

Доверительный интервал для коэффициента корреляции, оценка которого получена из нормальной выборки объема n , приближенно вычисляется через вспомогательную случайную величину $Z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\tilde{r}}{1-\tilde{r}}$, границы (z_n, z_b) доверительного интервала для которой определяются формулами

$$z_n = \bar{z} - \varepsilon_0 \sigma_z, \quad z_b = \bar{z} + \varepsilon_0 \sigma_z,$$

где $\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{n-3}}$, ε_0 — решение уравнения $\alpha = \Phi(\varepsilon_0)$, $\bar{z} = \Delta_1 + \Delta_2$, $\Delta_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\tilde{r}}{1-\tilde{r}}$ (значение этой величины определяется из таблицы [31Т]), $\Delta_2 = \frac{\tilde{r}}{2(n-1)}$.

По найденным значениям z_n и z_b из таблицы [31Т] или по формуле $r = \text{th } z$ определяют границы доверительного интервала для r . В случае больших n ($n > 50$) и малых \tilde{r} ($\tilde{r} < 0,5$) границы r_n, r_b доверительного интервала для r приближенно определяются формулами

$$\left. \begin{matrix} r_n \\ r_b \end{matrix} \right\} = \tilde{r} \mp \varepsilon_0 \sigma_{\tilde{r}},$$

где ε_0 — решение уравнения $\alpha = \Phi(\varepsilon_0)$,

$$\sigma_{\tilde{r}} = \frac{1-\tilde{r}^2}{\sqrt{n-1}}.$$

Решение типовых примеров

Пример 42.1. Среднее значение расстояния до ориентира, полученное по четырем независимым измерениям, равно 2250 м. Средняя ошибка измерительного прибора $E = 40$ м. Найти с надежностью 95% доверительный интервал для измеряемой величины.

Решение. Вероятность покрыть истинное значение измеряемой величины \bar{x} интервалом $(\tilde{x} - \varepsilon, \tilde{x} + \varepsilon)$ со случайными концами при известном E определяется формулой

$$P\{|\tilde{x} - \bar{x}| \leq \varepsilon\} = \frac{\rho}{\sqrt{\pi} E_1} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\rho^2 \frac{z^2}{E_1^2}} dz = \dots \left(\frac{\varepsilon}{E_1} \right),$$

где $E_1 = \frac{E}{\sqrt{n}}$ — срединное отклонение случайной величины

$$\tilde{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j.$$

Решая уравнение $\Phi\left(\frac{\varepsilon \sqrt{n}}{E}\right) = 0,95$, из таблицы [11Т] находим

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon \sqrt{n}}{E} &= 2,91, \\ \varepsilon &= \frac{2,91}{\sqrt{n}} E = \frac{2,91 \cdot 40}{2} = 58,2 \text{ м.} \end{aligned}$$

Отсюда искомые границы доверительного интервала будут:
верхняя $2250 \text{ м} + 58,2 \text{ м} = 2308,2 \text{ м}$,
нижняя $2250 \text{ м} - 58,2 \text{ м} = 2191,8 \text{ м}$.

Аналогично решаются задачи 42.1, 42.6, 42.13.

Пример 42.2. Средняя квадратическая ошибка высотомера $\sigma = 15 \text{ м}$. Сколько надо иметь таких приборов на самолете, чтобы с надежностью 0,99 ошибка средней высоты \tilde{x} была больше -30 м , если ошибки высотомеров нормальны, а систематические ошибки отсутствуют?

Решение. Условия задачи могут быть записаны так:

$$P\{-30 < \tilde{x} - \bar{x} < \infty\} = 0,99.$$

Случайная величина

$$Z = \tilde{x} - \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j - \bar{x}$$

является линейной функцией нормально распределенных случайных величин, а поэтому также имеет нормальное распределение, параметры которого

$$\begin{aligned} M[Z] &= M\left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j - \bar{x}\right] = 0, \\ D[Z] &= \frac{\sigma^2}{n}. \end{aligned}$$

Тогда

$$P\{-30 < Z < \infty\} = \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \int_{-30}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}} dz = \\ = \frac{1}{2} \left[1 + \Phi\left(\frac{30}{\sigma_z}\right) \right] = 0,99.$$

Решая уравнение

$$\Phi\left(\frac{30\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 0,98,$$

из таблицы [8Г] находим $\frac{30\sqrt{n}}{\sigma} = 2,33$,

$$n = \left(\frac{2,33\sigma}{30}\right)^2 = 1,36.$$

Отсюда следует, что число высотомеров на самолете должно быть не менее двух.

Аналогично решаются задачи 42.7, 42.11.

Пример 42.3. На контрольных испытаниях 16 осветительных ламп были определены оценки математического ожидания и среднего квадратического отклонения их срока службы, которые оказались равными $\bar{x} = 3000$ час. и $\sigma = 20$ час. Считая, что срок службы каждой лампы является нормальной случайной величиной, определить:

а) доверительный интервал для математического ожидания и среднего квадратического отклонения при доверительной вероятности 0,9;

б) с какой вероятностью можно утверждать, что абсолютное значение ошибки определения \bar{x} не превзойдет 10 час., а ошибка в определении σ будет меньше 2 час.?

Решение. а) При определении границ доверительного интервала для математического ожидания воспользуемся уравнением

$$a = \int_{-t_a}^{t_a} S_n(t) dt.$$

В таблице [16Г] по $k = n - 1$ и $a = 0,9$ находим $t_a = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma} = 1,753$, откуда $\varepsilon = \frac{1,753\sigma}{\sqrt{n}} = 8,765$ часа.

Поэтому искомые границы доверительного интервала для \bar{x} будут:

$$\begin{aligned} \text{верхняя } 3000 + 8,765 &= 3008,765 \text{ часа,} \\ \text{нижняя } 3000 - 8,765 &= 2991,235 \text{ часа.} \end{aligned}$$

При определении границ доверительного интервала для σ воспользуемся таблицей [19Т]. Входами в эту таблицу являются величина $k = n - 1$ и доверительная вероятность α . Для $k = 15$ и $\alpha = 0,9$ имеем

$$\gamma_1 = 0,775, \quad \gamma_2 = 1,437.$$

Таким образом, при доверительной вероятности 0,9 совместимые с данными наблюдения значения σ лежат в пределах от $0,775\tilde{\sigma} = 15,50$ часа до $1,437\tilde{\sigma} = 28,74$ часа.

б) Вероятность неравенства $-10 \text{ час.} < \tilde{x} - \bar{x} < 10 \text{ час.}$ определяется распределением Стьюдента

$$\alpha = \mathbf{P} \{ |\bar{x} - \tilde{x}| < \epsilon \} = \int_{-t_\alpha}^{t_\alpha} S_n(t) dt.$$

Из таблицы [16Т] по $t_\alpha = \frac{\epsilon \sqrt{n}}{\tilde{\sigma}} = \frac{10 \sqrt{16}}{20} = 2$ и числу степеней свободы $k = n - 1 = 15$ находим $\alpha = 0,93$;

χ -распределение позволяет определить вероятность неравенства $-2 \text{ часа} < \tilde{\sigma} - \sigma < 2 \text{ часа}$;

$$\alpha = \mathbf{P} \{ |\tilde{\sigma} - \sigma| < \epsilon \} = \int_{\frac{\sqrt{k}}{1+q}}^{\frac{\sqrt{k}}{1-q}} P_k(\chi) d\chi.$$

По $q = \frac{\epsilon}{\tilde{\sigma}} = \frac{2}{20} = 0,1$ и числу степеней свободы $k = n - 1 = 15$ из таблицы [20Т] определяем вероятность $\alpha = 0,41$.

Аналогично решаются задачи 42.2—42.5, 42.8—42.10.

Пример 42.4. Случайная величина T подчиняется экспоненциальному закону распределения, имеющему плотность вероятности $f(t) = \frac{1}{t} e^{-\frac{t}{t}}$.

Оценка параметра \bar{t} определяется по формуле $\bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n t_j$.

Выразить через \tilde{t} границы доверительного интервала для \bar{t} , удовлетворяющие условию $\mathbf{P} \{v_1 \tilde{t} > \bar{t}\} = \mathbf{P} \{v_2 \tilde{t} < \bar{t}\} = \frac{1-\alpha}{2}$, для доверительной вероятности $\alpha = 0,9$ при n , равном 3, 5, 10, 20, 30, 40.

Решение. В соответствии с условиями примера имеем $\mathbf{P} \{v_1 \tilde{t} > \bar{t}\} = \mathbf{P} \{v_2 \tilde{t} < \bar{t}\} = \frac{1-\alpha}{2} = \delta$.

Тождественное преобразование неравенств в этом выражении дает

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{2n\tilde{t}}{\bar{t}} > \frac{2n}{v_1} = \chi_{\delta}^2 \right\} = \mathbf{P} \left\{ \frac{2n\tilde{t}}{\bar{t}} < \frac{2n}{v_2} = \chi_{1-\delta}^2 \right\} = \delta.$$

Случайная величина $U = \frac{2n\tilde{t}}{\bar{t}}$ имеет χ^2 -распределение с $2n$ степенями свободы, а при $n > 15$ случайная величина $Z = \sqrt{2U}$ имеет распределение, близкое к нормальному, с $z = \sqrt{2n-1}$ и $\sigma_z = 1$. Поэтому в первом случае (при $n < 15$) имеем

$$v_1 = \frac{2n}{\chi_{\delta}^2}, \quad v_2 = \frac{2n}{\chi_{1-\delta}^2}.$$

Определив из таблицы [18Т] χ_{δ}^2 и $\chi_{1-\delta}^2$ (для числа степеней свободы $2n$ и вероятностей δ и $1-\delta$), рассчитываем v_1 и v_2 (см. табл. 37).

Таблица 37

n	3	5	10
χ_{δ}^2	12,60	18,30	31,40
$\chi_{1-\delta}^2$	1,63	3,94	10,90
v_1	0,48	0,55	0,64
v_2	3,68	2,54	1,83

Во втором случае ($n > 15$) в соответствии с формулами, приведенными в начале этого параграфа, имеем (см. табл. 38)

$$v_1 = \frac{4n}{(\sqrt{4n-1} + \epsilon_0)^2}, \quad v_2 = \frac{4n}{(\sqrt{4n-1} - \epsilon_0)^2}.$$

Величина ϵ_0 определяется из таблицы [8Т] для вероятности $\alpha = 0,9$.

Таблица 38

n	20	30	40
ϵ_0	1,65	1,65	1,65
v_1	0,72	0,76	0,79
v_2	1,53	1,40	1,33

На рис. 35 показан график, характеризующий изменение v_1 и v_2 в зависимости от n для доверительной вероятности $\alpha = 0,9$.

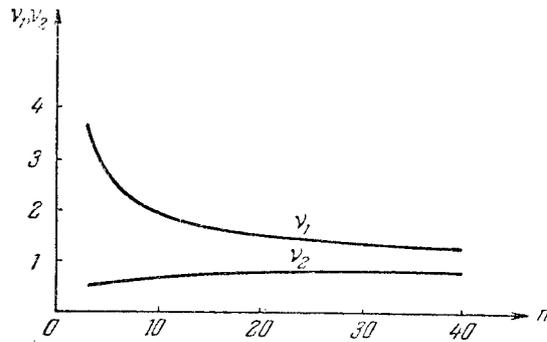


Рис. 35.

Пример 42.5. В результате 50 независимых испытаний трех типов приборов (A , B и C) в течение определенного промежутка времени фиксировалось число отказов (см. табл. 39). Найти границы доверительных интервалов для математического ожидания числа отказов каждого типа приборов за выбранный промежуток времени при доверительной вероят-

ности $\alpha = 0,9$, если число отказов для каждого типа приборов за выбранный промежуток времени подчиняется закону распределения Пуассона.

Таблица 39

Число отказов	Число наблюдений, в которых такое число отказов имело место		
	для типа A	для типа B	для типа C
0	38	4	50
1	12	16	0
2	0	20	0
3	0	6	0
4	0	4	0

Решение. При определении границ доверительного интервала для приборов типа A воспользуемся распределением χ^2 . Из таблицы [18Т] для числа степеней свободы $k = 24$ и вероятности $\frac{1+\alpha}{2} = 0,95$ определяем $\chi_{1-\delta}^2 = 13,8$, а для $k = 26$ и вероятности $\delta = \frac{1-\alpha}{2} = 0,05$ находим $\chi_{\delta}^2 = 38,9$.

Верхняя a_2 и нижняя a_1 границы доверительного интервала для \bar{a} приборов типа A соответственно равны

$$a_2 = \frac{\chi_{\delta}^2}{2N} = \frac{38,9}{100} = 0,389, \quad a_1 = \frac{\chi_{1-\delta}^2}{2N} = \frac{13,8}{100} = 0,138.$$

При определении границ доверительного интервала для математического ожидания числа отказов приборов типа B, нужно также воспользоваться распределением χ^2 , но с числом степеней свободы $k = 180$ и $k = 182$. Таблица [18Т] содержит данные только до $k = 30$. Поэтому, учитывая, что при числе степеней свободы более 30 распределение χ^2 практически совпадает с нормальным, имеем

$$a_1 \approx \frac{\left(\sqrt{4 \sum_{j=1}^N m_j - 1} - \epsilon_0 \right)^2}{4N} = \frac{(V4 \cdot 90 - 1 - 1,64)^2}{200} = 1,50,$$

$$a_2 \approx \frac{\left(\sqrt{4 \sum_{j=1}^N m_j - 1} + \epsilon_0 \right)^2}{4N} = \frac{(V4 \cdot 90 - 1 + 1,64)^2}{200} = 2,12.$$

Для приборов типа С $\sum_{j=1}^N m_j = 0$ и поэтому нижняя граница доверительного интервала достоверно равна нулю. Из таблицы [18Т] для $k=2$ и вероятности $1-\alpha=0,1$ определяем $\chi_{20}^2=4,6$ и рассчитываем значение верхней границы:

$$a_2 = \frac{\chi_{20}^2}{2N} = \frac{4,6}{100} = 0,046.$$

Пример 42.6. В процессе испытания 30 образцов изделия у 10 из них наблюдался отказ. Определить границы доверительного интервала для вероятности отказа при доверительной вероятности 0,95, если число отказов имеет биномиальное распределение. Сравнить результаты точного и приближенного решений.

Решение. Точное решение может быть получено непосредственно из таблицы [30Т]. Для $x=10$ и $n-x=20$ при 95%-ной доверительной вероятности имеем $p_1=0,173$, $p_2=0,528$.

При больших $np(1-p)$ уравнения для определения границ доверительного интервала p приближенно могут быть определены с помощью нормального распределения:

$$\sum_{x=m}^n C_n^x p_1^x (1-p_1)^{n-x} \approx \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \int_{m-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} e^{-\frac{(z-\bar{z}_1)^2}{2\sigma_1^2}} dz = \frac{1-\alpha}{2},$$

$$\sum_{x=0}^m C_n^x p_2^x (1-p_2)^{n-x} \approx \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} e^{-\frac{(z-\bar{z}_2)^2}{2\sigma_2^2}} dz = \frac{1-\alpha}{2}.$$

Отсюда

$$\left. \begin{array}{l} p_2 \\ p_1 \end{array} \right\} \approx \frac{1}{n + \varepsilon_0^2} \left[n\tilde{p} + \frac{\varepsilon_0^2}{2} \pm \frac{1}{2} \pm \pm \varepsilon_0 \sqrt{\frac{\left(n\tilde{p} \pm \frac{1}{2}\right)\left(n - n\tilde{p} \mp \frac{1}{2}\right)}{n} + \frac{\varepsilon_0^2}{4}} \right],$$

где $\tilde{p} = \frac{m}{n} = \frac{1}{3}$, а величина ϵ_0 определяется из таблицы [8Т] для вероятности $\alpha = 0,95$,

$$p_1 \approx \frac{1}{33,84} \left[10 - 0,5 + 1,92 - 1,96 \sqrt{\frac{9,5 \cdot 20,5}{30} + 0,96} \right] = 0,180,$$

$$p_2 \approx \frac{1}{33,84} \left[10 + 0,5 + 1,92 + 1,96 \sqrt{\frac{10,5 \cdot 19,5}{30} + 0,96} \right] = 0,529.$$

Приближение того же порядка дает формула

$$\left. \begin{array}{l} \arcsin \sqrt{p_2} \\ \arcsin \sqrt{p_1} \end{array} \right\} \approx \arcsin \sqrt{\frac{n\tilde{p} \pm \frac{1}{2}}{n}} \pm \frac{\epsilon_0}{2\sqrt{n}},$$

воспользовавшись которой, получим

$$p_2 \approx 0,526, \quad p_1 \approx 0,166.$$

Еще с более грубым приближением можно найти p_1 и p_2 , считая, что частота \tilde{p} распределена приближенно нормально около p с дисперсией $\frac{\tilde{p}(1-\tilde{p})}{Vn}$.

В этом случае

$$\left. \begin{array}{l} p_2 \\ p_1 \end{array} \right\} \approx \tilde{p} \pm \epsilon,$$

где ϵ — решение уравнения $\alpha = \Phi\left(\frac{\epsilon \sqrt{n}}{\sqrt{\tilde{p}(1-\tilde{p})}}\right)$.

Пользуясь таблицей [8Т] для $\alpha = 0,95$, имеем

$$\frac{\epsilon \sqrt{n}}{\sqrt{\tilde{p}(1-\tilde{p})}} = 1,96, \quad \epsilon = 1,96 \sqrt{\frac{2}{9 \cdot 30}} = 0,169,$$

откуда $p_1 \approx 0,333 - 0,169 = 0,164$, $p_2 \approx 0,333 + 0,169 = 0,502$.

Пример 42.7. Для изучения механических свойств стали произведено 30 независимых опытов, по результатам которых определены оценки коэффициентов корреляции $\tilde{r}_{12} = 0,88$ и $\tilde{r}_{13} = 0,40$, характеризующих связь предела выносливости металла соответственно с пределом прочности на разрыв и пределом текучести. Определить границы доверительного интервала для r_{12} и r_{13} при доверительной вероятности 0,95.

Решение. При большом объеме выборки n и малых значениях коэффициента корреляции r его оценка \tilde{r} имеет распределение, близкое к нормальному, с математическим ожиданием $M[\tilde{r}] = r$ и средним квадратическим отклонением $\sigma_{\tilde{r}} = \frac{1-r}{\sqrt{n-1}}$. Принимая $r \approx \tilde{r}$, имеем:

$$r_{12} \approx 0,88, \quad r_{13} \approx 0,40,$$

$$\sigma_{\tilde{r}_{12}} \approx \frac{1-0,88}{\sqrt{0,29}} = 0,022,$$

$$\sigma_{\tilde{r}_{13}} \approx \frac{1-0,40}{\sqrt{0,29}} = 0,111.$$

Из таблицы [8Т] для доверительной вероятности $\alpha = 0,95$ находим $\epsilon_0 = 1,96$ (ϵ_0 — решение уравнения $\alpha = \Phi(\epsilon_0)$) и доверительный интервал:

для r_{12} (0,84; 0,92),

для r_{13} (0,18; 0,62).

Полученный доверительный интервал можно уточнить, если преобразовать \tilde{r} так, чтобы $\sigma_{\tilde{r}}$ не зависело от r . Это приводит к новой случайной величине $Z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\tilde{r}}{1-\tilde{r}}$, распределение которой хорошо согласуется с нормальным даже при малом n .

При этом $M[Z] = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} + \frac{r}{2(n-1)} \approx \frac{1}{2} \ln \frac{1+\tilde{r}}{1-\tilde{r}} + \frac{\tilde{r}}{2(n-1)}$ и $\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{n-3}}$.

Пользуясь таблицей [31Т], определяем доверительный интервал для случайной величины Z :

при $\tilde{r}_{12} = 0,88$ (1,014; 1,768),

при $\tilde{r}_{13} = 0,40$ (0,053; 0,808).

С помощью таблицы [31Т] находим доверительный интервал:

для r_{12} (0,77; 0,94),

для r_{13} (0,05; 0,67).

Задачи

42.1. Постоянная величина измерена 25 раз с помощью прибора, систематическая ошибка которого равна нулю, а случайные ошибки измерения распределены нормально со

срединым отклонением $E = 10$ м. Определить границы доверительного интервала для значения измеряемой величины при надежности 0,99, если $\tilde{x} = 100$ м.

42.2. Результаты измерений, не содержащие систематических ошибок, записаны в виде статистического ряда (табл. 40). Ошибки измерений согласуются с нормальным распределением. Определить оценку измеряемой величины и границы доверительного интервала при надежности 0,95.

Таблица 40

j	x_j^* , м	m_j	j	x_j^* , м	m_j
1	114	2	4	117	4
2	115	5	5	118	3
3	116	8			

42.3. Произведено 40 измерений базы постоянной длины. По результатам опыта получены оценки измеряемой величины и среднего квадратического отклонения: $\tilde{x} = 10\,400$ м и $\tilde{\sigma}_x = 85$ м. Ошибки измерения подчиняются закону нормального распределения. Найти вероятности того, что доверительные интервалы со случайными границами $(0,999\tilde{x}; 1,001\tilde{x})$ и $(0,95\tilde{\sigma}; 1,05\tilde{\sigma})$ соответственно покроют неизвестные параметры \bar{x} и σ_x .

42.4. Результаты 11 измерений постоянной величины даны в таблице 41. Ошибки измерений распределены по нормальному закону, систематические ошибки отсутствуют.

Таблица 41

№ измерения	x_j , м	№ измерения	x_j , м	№ измерения	x_j , м
1	9,9	5	6,0	9	11,6
2	12,5	6	10,9	10	9,8
3	10,3	7	10,3	11	14,0
4	9,2	8	11,8		

Определить: а) оценки измеряемой величины и среднего квадратического отклонения; б) вероятность того, что абсолютное значение ошибки в определении истинного значения измеряемой величины меньше 2% от \tilde{x} ; в) вероятность того, что абсолютное значение ошибки определения среднего квадратического отклонения меньше 1% от $\tilde{\sigma}$.

42.5. На основании 100 опытов было определено, что в среднем для производства детали требуется $\tilde{\omega} = 5,5$ сек., а $\tilde{\sigma}_{\omega} = 1,7$ сек. Сделав допущение, что время для производства детали есть нормальная случайная величина, определить границы, в которых лежат истинные значения для $\bar{\omega}$ и σ_{ω} , с надежностью 85 и 90% соответственно.

42.6. Определение скорости самолета было проведено на 5 испытаниях, в результате которых вычислена оценка $\tilde{v} = 870,3$ м/сек. Найти 95%-ный доверительный интервал, если известно, что рассеивание скорости подчинено нормальному закону со средним отклонением $E_v = 2,1$ м/сек.

42.7. Глубина моря измеряется прибором, систематическая ошибка которого равна нулю, а случайные ошибки распределены нормально со средним отклонением $E = 20$ м. Сколько надо сделать независимых измерений, чтобы определить глубину с ошибкой не более 15 м при надежности 90%?

42.8. Найти при надежности 0,9 доверительные границы для расстояния до ориентира \bar{x} и для среднего отклонения E , если при 10 независимых измерениях были получены значения расстояния, приведенные в таблице 42, а ошибки измерения имеют нормальное распределение.

Таблица 42

№ опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_j , м	25 025	24 970	24 789	25 315	24 997	24 646	24 717	25 354	24 911	25 374

42.9. Произведено 5 независимых равноточных измерений для определения заряда электрона. опыты дали следующие

результаты (в абсолютных электростатических единицах):

$$\begin{array}{ll} 4,781 \cdot 10^{-10}, & 4,792 \cdot 10^{-10}, \\ 4,795 \cdot 10^{-10}, & 4,779 \cdot 10^{-10}, \\ 4,769 \cdot 10^{-10}, & \end{array}$$

Определить оценку величины заряда электрона и найти доверительные границы при надежности 99%.

42.10. По 15 независимым равноточным измерениям были рассчитаны оценки математического ожидания и среднего квадратического отклонения максимальной скорости самолета $\bar{v} = 424,7$ м/сек и $\tilde{\sigma}_v = 8,7$ м/сек.

Определить: а) доверительные границы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения при надежности 0,9; б) вероятности, с которыми можно утверждать, что абсолютное значение ошибки в определении \bar{v} и $\tilde{\sigma}_v$ не превзойдет 2 м/сек.

42.11. В качестве оценки расстояния до навигационного знака принимают среднее арифметическое результатов независимых измерений расстояния n дальномерами. Измерения не содержат систематической ошибки, а случайные ошибки распределены нормально со средним отклонением $E = 10$ м. Сколько надо иметь дальномеров, чтобы абсолютная величина ошибки при определении дальности до навигационного знака с вероятностью 0,9 не превышала 15 м?

42.12. Известно, что измерительный прибор не имеет систематических ошибок, а случайные ошибки каждого измерения подчиняются одному и тому же закону нормального распределения. Сколько надо произвести измерений для определения оценки среднего квадратического отклонения прибора, чтобы с надежностью 70% абсолютное значение ошибки в определении этой величины было не более 20% от $\tilde{\sigma}$?

42.13. Систематические ошибки измерительного прибора практически равны нулю, а случайные распределены нормально со средним отклонением $E = 20$ м. Необходимо, чтобы абсолютное значение разности между оценкой измеряемой величины и истинным ее значением не превосходило 10 м. Определить, с какой вероятностью будет выполнено это условие, если число наблюдений 3, 5, 10, 25 (построить график).

42.14. Оценка измеряемой величины определяется по формуле

$$\tilde{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j.$$

Результаты отдельных измерений подчинены одному и тому же закону нормального распределения. Определить границы доверительного интервала с надежностью 0,9 для значения измеряемой величины при следующих условиях: а) $\sigma = 20$ м, $n = 3, 5, 10, 25$; б) $\tilde{\sigma} = 20$ м, $n = 3, 5, 10, 25$.

42.15. При испытании 10 однотипных приборов зарегистрирован момент выхода каждого прибора из строя. Результаты наблюдений даны в таблице 43.

Таблица 43

№ прибора	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_i , час.	200	350	600	450	400	400	500	350	450	550

Определить оценку математического ожидания \tilde{t} времени безотказной работы прибора и доверительный интервал для \tilde{t} при доверительной вероятности 0,9, если случайная величина T имеет экспоненциальное распределение.

42.16. Случайно отобранная партия из 8 приборов была подвергнута испытаниям на срок безотказной работы. Количество часов, проработанных каждым прибором до выхода его из строя, оказалось равным 100, 170, 400, 250, 520, 680, 1500, 1200. Определить 80%-ный доверительный интервал для средней продолжительности работы прибора, если время безотказной работы прибора имеет экспоненциальный закон распределения.

42.17. Плотность вероятности для времени между последовательными отказами радиоэлектронной аппаратуры задана формулой

$$f(t) = \frac{1}{\tilde{t}} e^{-\frac{t}{\tilde{t}}},$$

где t — время работы между двумя последовательными отказами, \bar{t} — математическое ожидание случайной величины T (математическое ожидание времени исправной работы прибора, называемое в теории надежности «наработкой на отказ»).

При определении оценки параметра \bar{t} наблюдалось 25 отказов, а общая продолжительность безотказной работы с начала испытаний до последнего отказа оказалась равной

$$\sum_{j=1}^{25} t_j = 1600 \text{ час.}$$

Определить границы доверительного интервала для параметра \bar{t} , полученного по результатам этого опыта, при доверительной вероятности $\alpha = 0,8$.

42.18. Для определения токсической дозы яд был введен 30 мышам, 8 из которых погибли. Определить границы доверительного интервала для вероятности того, что данная доза окажется смертельной, при доверительной вероятности 0,95, предполагая, что число смертельных исходов в данном опыте подчиняется биномиальному закону распределения.

42.19. Произведено 100 независимых опытов, в результате которых событие A наблюдалось 40 раз. Определить границы доверительного интервала для вероятности появления этого события в одном опыте при доверительной вероятности 0,95 и 0,99, если число появлений события A имеет биномиальное распределение.

42.20. При испытаниях каждого из 10 приборов не наблюдалось ни одного отказа. Определить границы доверительного интервала для вероятности отказа при доверительной вероятности 0,8; 0,9 и 0,99, если число отказов имеет биномиальное распределение.

42.21. Стрелок A при 10 выстрелах попал в цель 5 раз, а стрелок B после 100 выстрелов по той же цели имел 50 попаданий. Определить границы доверительного интервала для вероятности попадания в цель каждым стрелком одним выстрелом при доверительной вероятности 0,99, если число попаданий в цель имеет биномиальное распределение.

42.22. За время испытаний, равное 15 час., в шести однотипных приборах было отмечено 12 отказов. Найти границы доверительного интервала для математического ожидания

числа отказов за 15 час. работы такого прибора при доверительной вероятности 0,9, если число отказов для проверяемых приборов имеет закон распределения Пуассона.

42.23. Число частиц, зафиксированное счетчиком в опыте Резерфорда, Чедвика и Эллиса за каждый из 2608 интервалов по 7,5 сек., дано в таблице 44. Считая, что число частиц, зафиксированное счетчиком, согласуется с законом распределения Пуассона, определить границы доверительного интервала для параметра этого закона, соответствующие интервалу времени 7,5 сек. и доверительной вероятности 0,9999.

Таблица 44

Число частиц, достигших счетчика	Число наблюдений, в которых такое число имело место	Число частиц, достигших счетчика	Число наблюдений, в которых такое число имело место
0	57	6	273
1	203	7	139
2	383	8	45
3	525	9	27
4	532	10	16
5	408		

42.24. При исследовании содержания повилики в семенах клевера было установлено, что выборка весом 100 г не содержит семян повилики. Найти 99%-ный доверительный интервал для среднего числа семян повилики в выборке весом 100 г, если число семян повилики, содержащееся в семенах клевера, имеет распределение Пуассона.

42.25. По результатам 190 испытаний образцов железа «армко» были определены оценки коэффициентов корреляции $\tilde{r}_{12} = 0,55$, $\tilde{r}_{13} = 0,30$, $\tilde{r}_{14} = 0,37$, характеризующих зависимость коэрцитивной силы соответственно от балла зерна, содержания углерода и содержания серы. Определить границы доверительных интервалов для определенных из этого опыта коэффициентов корреляции при доверительной вероятности 0,99 и 0,95, если можно считать, что рассматриваемые случайные величины имеют нормальное распределение.

42.26. В результате опыта получены 25 пар значений для системы случайных величин (X, Y) , имеющей нормальное

распределение. По опытным данным рассчитаны оценки параметров этой системы: $\tilde{x} = 10,5$; $\tilde{y} = 74$; $\tilde{\sigma}_x = 2,0$; $\tilde{\sigma}_y = 10,0$; $\tilde{r}_{xy} = 0,62$. Определить границы доверительных интервалов для параметров системы случайных величин (X, Y) при доверительной вероятности 0,9.

§ 43. Критерии согласия

Критерии согласия позволяют оценить вероятность того, что полученная выборка не противоречит сделанному предположению о виде закона распределения рассматриваемой случайной величины. Для этого выбирается некоторая величина κ , являющаяся мерой расхождения статистического и теоретического законов распределения, и определяется такое ее значение κ_α , чтобы $P(\kappa > \kappa_\alpha) = \alpha$, где α — достаточно малая величина (уровень значимости), значение которой устанавливается в соответствии с существом задачи. Если значение меры расхождения κ_q , полученное на опыте, больше κ_α , то отклонение от теоретического закона распределения считается значимым и предположение о виде закона распределения должно быть отвергнуто (вероятность отвергнуть правильное предположение о виде закона распределения в этом случае равна α). Если значение $\kappa_q \leq \kappa_\alpha$, то отклонение считается не значимым, т. е. данные опыта не противоречат сделанному предположению о виде закона распределения.

Проверку гипотезы о характере распределения с помощью критерия согласия можно вести и в другой последовательности: по значению κ_q определить вероятность $\alpha_q = P(\kappa > \kappa_q)$. Если полученное значение $\alpha_q < \alpha$, то отклонения значимые; если $\alpha_q \geq \alpha$, то отклонения не значимые. Значения α_q , весьма близкие к 1 (очень хорошее согласие), соответствуют событию, имеющему весьма малую вероятность, что может указывать на недоброкачественность выборки (например, из первоначальной выборки без основания выброшены элементы, дающие большие отклонения от среднего).

В различных критериях согласия в качестве меры расхождения статистического и теоретического законов распределения принимаются различные величины.

В критерии согласия К. Пирсона (критерий χ^2) за меру расхождения принимается величина χ^2 , опытное значение χ_q^2

которой определяется формулой

$$\chi_q^2 = \sum_{i=1}^l \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i},$$

где l — число разрядов, на которые разбиты все опытные значения величины X , n — объем выборки, m_i — численность i -го разряда, p_i — вероятность попадания случайной величины X в интервал i -го разряда, вычисленная для теоретического закона распределения.

При $n \rightarrow \infty$ закон распределения χ_q^2 независимо от вида закона распределения случайной величины X стремится к закону χ^2 -распределения с $k = l - r - 1$ степенями свободы, где r — число параметров теоретического закона распределения, вычисляемых по данной выборке.

Значения вероятностей $P(\chi^2 \geq \chi_q^2)$ в зависимости от χ_q^2 и k приведены в таблице [17Г].

Для применения критерия Пирсона в общем случае необходимо, чтобы объем выборки n и численности разрядов m_i были достаточно велики (практически считается достаточным, чтобы было $n \geq 50 \div 60$, $m_i \geq 5 \div 8$).

Критерий согласия Колмогорова применим в том случае, когда параметры теоретического закона распределения определяются не по данным исследуемой выборки. За меру расхождения статистического и теоретического законов распределения принимается наибольшее значение D абсолютной величины разности статистической и теоретической функций распределения. Опытное значение D_q величины D определяется формулой

$$D_q = \max |\tilde{F}(x) - F(x)|,$$

где \tilde{F} — статистическая, а F — теоретическая функции распределения.

При $n \rightarrow \infty$ закон распределения величины $\lambda = \sqrt{n}D$ независимо от вида закона распределения случайной величины X стремится к закону распределения Колмогорова. Значения вероятностей $\alpha_q = P(D \geq D_q) = P(\lambda) = 1 - K(\lambda)$ приведены в таблице [25Г].

Критерий Колмогорова применим также для статистической проверки гипотезы о принадлежности двух выборок

объемов n_1 и n_2 одной генеральной совокупности. И в этом случае $\alpha_q = P(\lambda)$, где функция $P(\lambda)$ приведена в таблице [25Т], но

$$\lambda = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \cdot \max |\tilde{F}_1(x) - \tilde{F}_2(x)|,$$

где $\tilde{F}_1(x)$ и $\tilde{F}_2(x)$ — статистические функции распределения для первой и второй выборок.

Вид теоретического закона распределения выбирается или на основании данных о механизме образования случайной величины, или путем качественного анализа вида гистограммы распределения. Если вид закона распределения не удается установить из общих соображений, то применяется его аппроксимация таким законом распределения, соответствующее число первых моментов которого равно их оценкам, полученным из рассматриваемой выборки. В качестве аппроксимирующих выражений могут быть использованы или кривые Пирсона [21], учитывающие четыре первых момента, или бесконечный ряд Эджворта [21], в котором при сравнительно небольшом отклонении статистического закона распределения от нормального можно удержать только первые члены, образующие А-ряд Шарлье

$$F(z) = 0,5 + 0,5\Phi(z) - \frac{\tilde{S}k}{6} \varphi_2(z) + \frac{\tilde{E}x}{24} \varphi_3(z),$$

где $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$ — производные второго и третьего порядка от нормальной плотности вероятности $\varphi(z)$; $z = \frac{x - M[X]}{\tilde{\sigma}}$,

$\tilde{S}k = \frac{\tilde{\mu}_3}{\tilde{\sigma}^3}$ — оценка асимметрии, $\tilde{E}x = \frac{\tilde{\mu}_4}{\tilde{\sigma}^4} - 3$ — оценка эксцесса, $\tilde{\sigma}^2$, $\tilde{\mu}_3$, $\tilde{\mu}_4$ — оценки второго, третьего и четвертого центральных моментов соответственно.

Значения функций $\Phi(z)$, $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$ приведены в таблицах [8Т], [10Т].

Критерий χ^2 позволяет также проверить гипотезу о независимости двух случайных величин X и Y . В этом случае величина χ_q^2 определяется формулой

$$\chi_q^2 = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \frac{(h_{ij} - m_{ij})^2}{m_{ij}},$$

где h_{ij} — число случаев, когда одновременно наблюдались значения $X = x_i$, $Y = y_j$,

$$m_{ij} = \frac{h_{i0}h_{0j}}{n},$$

h_{i0} — общее число случаев, когда наблюдалось значение $X = x_i$; h_{0j} — общее число случаев, когда наблюдалось значение $Y = y_j$; l и m — числа значений, которые принимали величины X и Y .

Число степеней свободы k , необходимое для вычисления вероятности $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha})$, вычисляется по формуле

$$k = (l - 1)(m - 1).$$

Решение типовых примеров

Пример 43.1. Радиоактивное вещество наблюдалось в течение 2608 равных интервалов времени (по 7,5 сек. каждый). Для каждого из этих интервалов регистрировалось число частиц, попавших в счетчик. В таблице 45 приведены числа m_i интервалов времени, в течение которых в счетчик попало ровно i частиц.

Таблица 45

i	m_i	i	m_i
0	57	6	273
1	203	7	139
2	383	8	45
3	525	9	27
4	532	10 и более	16
5	408	Итого:	$n = \sum m_i = 2608$

Проверить, используя критерий χ^2 , гипотезу о согласии наблюдаемых данных с законом распределения Пуассона

$$P(i, a) = \frac{e^{-a} a^i}{i!}.$$

Уровень значимости α принять равным 5%.

Решение. На основании наблюдаемых данных вычисляем оценку \tilde{a} параметра a закона распределения Пуассона по формуле

$$\tilde{a} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} im_i}{n},$$

где $n = \sum_{i=0}^{\infty} m_i = 2608$, $\tilde{a} = 3,870$.

Вычисляем теоретические вероятности p_i попадания в счетчик i частиц при наличии закона Пуассона, используя таблицу [6Т] для функции $P(i, \tilde{a}) = p_i$. В результате интерполирования по $a = 3$ и $a = 4$ получим значения p_i и np_i , приведенные в таблице 46.

Таблица 46

i	p_i	np_i	$m_i - np_i$	$(m_i - np_i)^2$	$\frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$
0	0,021	54,8	2,2	4,84	0,088
1	0,081	211,2	- 8,2	67,24	0,318
2	0,156	406,8	-23,8	566,44	1,392
3	0,201	524,2	0,8	0,64	0,001
4	0,195	508,6	23,4	547,56	1,007
5	0,151	393,8	14,2	201,64	0,512
6	0,097	253,0	20,0	400,00	1,581
7	0,054	140,8	- 1,8	3,24	0,023
8	0,026	67,8	-22,8	519,84	7,667
9	0,011	28,7	- 1,7	2,89	0,101
10	0,007	18,3	- 2,3	5,29	0,289
	1,000				$\chi_q^2 = 13,049$

Вычисляем значение χ_q^2 , выполняя вычисления в табл. 46:

$$\chi_q^2 = \sum_{i=0}^{10} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} = 13,05.$$

Так как число степеней свободы $k = l - r - 1$, где общее число интервалов $l = 11$, а число параметров, определенных на основании наблюдаемых данных, $r = 1$ (параметр a), то

$$k = 11 - 1 - 1 = 9.$$

По таблице [17Т], входя в нее с величинами $k=9$ и $\chi_q^2=13,05$, находим вероятность $P(\chi^2 \geq \chi_q^2)$ того, что величина χ^2 превзойдет значение χ_q^2 . Получаем

$$\alpha_q = P(\chi^2 \geq \chi_q^2) = 0,166.$$

Так как $\alpha_q > \alpha = 0,05$, то отклонения от закона Пуассона не значимы.

Аналогично решаются задачи 43.1 — 43.4.

Пример 43.2. Произведен выбор 200 деталей из текущей продукции прецизионного токарного автомата. Проверяемый размер деталей измерен с точностью до 1 мк. В таблице 47 приведены отклонения x_i от номинального размера, разбитые на разряды, численности разрядов m_i и их частоты p_i^* .

Таблица 47

№ разряда i	Границы интервала $x_i \div x_{i+1}$	m_i	p_i^*	№ разряда i	Границы интервала $x_i \div x_{i+1}$	m_i	p_i^*
1	-20 ÷ -15	7	0,035	6	5 ÷ 10	41	0,205
2	-15 ÷ -10	11	0,055	7	10 ÷ 15	26	0,130
3	-10 ÷ -5	15	0,075	8	15 ÷ 20	17	0,085
4	-5 ÷ 0	24	0,120	9	20 ÷ 25	7	0,035
5	0 ÷ 5	49	0,245	10	25 ÷ 30	3	0,015

Оценить с помощью критерия χ^2 гипотезу о согласии выборочного распределения с законом нормального распределения при уровне значимости $\alpha = 5\%$.

Решение. Определяем значения x_i^* середин интервалов и находим оценки математического ожидания и дисперсии по формулам:

$$\tilde{x} = \sum_{i=1}^{10} x_i^* p_i^* = 4,30 \text{ мк}, \quad \tilde{\sigma}^2 = \tilde{m}_2 - \tilde{x}^2 = 94,26 \text{ мк}^2,$$

$$\tilde{m}_2 = \sum_{i=1}^{10} x_i^{*2} p_i^* = 112,75 \text{ мк}^2, \quad \tilde{\sigma} = 9,71 \text{ мк}.$$

Вычисления сводим в таблицу 48.

Таблица 48

i	x_i^*	z_i	$\frac{1}{2} \Phi(z_i)$	p_i	np_i	$\frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$
1	-17,5	$-\infty$	-0,5000	0,0239	4,78	1,04
2	-12,5	-1,99	-0,4761	0,0469	9,38	0,28
3	-7,5	-1,47	-0,4292	0,0977	19,54	1,05
4	-2,5	-0,96	-0,3315	0,1615	32,30	2,13
5	2,5	-0,44	-0,1700	0,1979	39,58	2,24
6	7,5	0,07	0,0279	0,1945	38,90	0,11
7	12,5	0,59	0,2224	0,1419	28,38	0,20
8	17,5	1,10	0,3643	0,0831	16,62	0,01
9	22,5	1,62	0,4474	0,0526	10,52	0,03
10	27,5	2,13	0,4834			
11	—	∞	0,5000	—	200	$\chi_q^2 = 7,09$

Вычисляем теоретические вероятности p_i попадания отклонений в интервалы (x_i, x_{i+1}) по формуле

$$p_i = \frac{1}{2} \Phi(z_{i+1}) - \frac{1}{2} \Phi(z_i),$$

где z_i — левая граница i -го интервала относительно \tilde{x} в единицах $\tilde{\sigma}$:

$$z_i = \frac{x_i - \tilde{x}}{\tilde{\sigma}}.$$

При этом наименьшее $z_i = z_0 = 2,06$ заменяем на $-\infty$, а наибольшее $z_{11} = 3,09$ — на $+\infty$.

Значения функции Лапласа $\Phi(z)$ находим из таблицы [8Т]. Интервал $i = 10$, ввиду его малочисленности, объединяем с интервалом $i = 9$. Результаты вычислений приведены в таблице 48.

Находим значение χ_q^2 :

$$\chi_q^2 = \sum_{i=1}^9 \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} = 7,09.$$

Число степеней свободы

$$k = l - r - 1 = 9 - 2 - 1 = 6,$$

так как из-за малочисленности последних двух разрядов 9-й и 10-й разряды объединены.

Из таблицы [17Т] по входным величинам χ_q^2 и k находим $\alpha_q = P(\chi^2 \geq \chi_q^2) = 0,313$. Гипотеза о нормальности отклонений от номинального размера не противоречит наблюдениям.

Аналогично решаются задачи 43.6, 43.7, 43.9, 43.11, 43.13 — 43.21, 43.24, 43.25.

Пример 43.3. Результаты x_i измерения 1000 деталей, округленные до 0,5 мм, даны в таблице 49.

Таблица 49

i	x_i	m_i	i	x_i	m_i
1	98,0	21	6	100,5	201
2	98,5	47	7	101,0	142
3	99,0	87	8	101,5	97
4	99,5	158	9	102,0	41
5	100,0	181	10	102,5	25

(m_i — число измерений, давших результат x_i .)

Проверить, пользуясь критерием согласия Колмогорова, согласие полученных наблюдений с предположением, что величина X подчиняется закону нормального распределения с математическим ожиданием $\bar{x} = 100,25$ мм и средним квадратическим отклонением $\sigma = 1$ мм, считая, что влиянием ошибок округления можно пренебречь.

Решение. Теоретическая функция распределения $F(x)$ определяется формулой

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Phi(x - \bar{x}).$$

Статистическая функция распределения $\tilde{F}^*(x)$ может быть вычислена по формуле

$$\tilde{F}^*(x_k) = \frac{1}{1000} \left[\sum_{i=1}^k m_i + 0,5m_k \right].$$

Вычисления выполнены в таблице 50.

Таблица 50

i	$x_i - \bar{x}$	$\frac{1}{2}\Phi(x_i - \bar{x})$	$F(x_i)$	$\tilde{F}^*(x_i)$	$ \tilde{F}^*(x_i) - F(x_i) $
1	-2,25	-0,4877	0,0123	0,0105	0,0018
2	-1,75	-0,4599	0,0401	0,0445	0,0044
3	-1,25	-0,3944	0,1056	0,1115	0,0059
4	-0,75	-0,2734	0,2266	0,2340	0,0074
5	-0,25	-0,0987	0,4013	0,4035	0,0022
6	0,25	0,0987	0,5987	0,5945	0,0042
7	0,75	0,2734	0,7734	0,7660	0,0074
8	1,25	0,3944	0,8944	0,8855	0,0089
9	1,75	0,4599	0,9599	0,9545	0,0054
10	2,25	0,4877	0,9877	0,9875	0,0002

Составив для каждого значения x_i разности $\tilde{F}^*(x_i) - F(x_i)$ и выбрав из них наибольшую по абсолютному значению, в соответствии с таблицей 50 находим $D_q = 0,0089$.

Определив

$$\lambda = \sqrt{n} D_q = \sqrt{1000} \cdot 0,0089 = 0,281,$$

находим значение $P(\lambda)$ из таблицы [25Т]:

$$\alpha_q = P(\lambda) = 1,000.$$

Значение $P(\lambda)$ велико. Следовательно, отклонения не значимы и можно считать, что гипотеза о согласии наблюдаемых данных с законом нормального распределения, имеющим параметры $\bar{x} = 100,25$, $\sigma = 1$, не опровергается; однако большое значение α вызывает сомнения в доброкачественности выборки.

Аналогично решаются задачи 43.5, 43.8, 43.10, 43.12, 43.22, 43.23.

Пример 43.4. По данным примера 43.2 требуется подобрать закон распределения, пользуясь A -рядом Шарлье, и проверить, используя критерий χ^2 , улучшится ли согласие наблюдаемых данных с полученным законом распределения по сравнению с нормальным законом распределения.

Из примера 43.2 берем оценки математического ожидания \tilde{x} и среднего квадратического отклонения $\tilde{\sigma}$:

$$\tilde{x} = 4,30 \text{ мк}, \quad \tilde{\sigma} = 9,71 \text{ мк}.$$

Кроме того, используя данные таблиц 47 и 48, вычисляем оценки третьего $\tilde{\mu}_3$ и четвертого $\tilde{\mu}_4$ центральных моментов случайной величины X .

$$\tilde{\mu}_3 = \sum_{i=1}^{10} (x_i^* - \tilde{x})^3 p_i^* = -113,86 \text{ мк}^3,$$

$$\tilde{\mu}_4 = \sum_{i=1}^{10} (x_i^* - \tilde{x})^4 p_i^* = 25\,375 \text{ мк}^4.$$

Вычисления выполнены в таблице 51.

Таблица 51

i	x_i^*	$x_i - \tilde{x}$	$(x_i - \tilde{x})^3$	$(x_i - \tilde{x})^4$	$(x_i - \tilde{x})^3 p_i^*$	$(x_i - \tilde{x})^4 p_i^*$
1	-17,5	-21,8	-10 360	225 853	-362,6	7904,9
2	-12,5	-16,8	-4 742	79 659	-260,8	4381,2
3	-7,5	-11,8	-1 643	19 388	-123,2	1454,1
4	-2,5	-6,8	-314	2 138	-37,7	256,6
5	2,5	-1,8	-6	10	-1,5	2,4
6	7,5	3,2	33	105	6,8	21,5
7	12,5	8,2	551	4 125	71,6	587,7
8	17,5	13,2	2 300	30 360	195,5	2580,6
9	22,5	18,2	6 029	109 720	211,0	3840,2
10	27,5	23,2	12 487	289 702	187,3	4345,5
Итого:					-113,86	25375

Далее вычисляем оценки асимметрии \tilde{Sk} и эксцесса \tilde{Ex} по формулам

$$\tilde{Sk} = \frac{\tilde{\mu}_3}{\tilde{\sigma}^3} = -0,1247,$$

$$\tilde{Ex} = \frac{\tilde{\mu}_4}{\tilde{\sigma}^4} - 3 = -0,1455.$$

Используя первые три члена функции распределения для A -ряда Шарлье

$$F(z) = 0,5 + 0,5\Phi(z) - \frac{\tilde{Sk}}{6}\varphi_2(z) + \frac{\tilde{Ex}}{24}\varphi_3(z),$$

где

$$z = \frac{x - \tilde{x}}{\tilde{\sigma}}.$$

получим

$$F(z) = 0,5 + 0,5 \Phi(z) + 0,0208 \varphi_2(z) - 0,0061 \varphi_3(z).$$

Вычисляем значения $F(z_i)$, используя для нахождения значений $\Phi(z)$, $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$ таблицы [8Г], [10Г]; здесь z_i — координаты границ интервалов относительно x в единицах σ . Значения z_i и дальнейшие вычисления $F(z_i)$ приведены в таблице 52.

Таблица 52

i	$z_i \div z_{i+1}$	$0,5\Phi(z_i) \div 0,5\Phi(z_{i+1})$	$\varphi_2(z_i) \div \varphi_2(z_{i+1})$
1	$-\infty \div -1,99$	$-0,5 \div -0,4761$	$0 \div 0,1630$
2	$-1,99 \div -1,47$	$-0,4761 \div -0,4292$	$0,1630 \div 0,1572$
3	$-1,47 \div -0,96$	$-0,4292 \div -0,3315$	$0,1572 \div -0,0197$
4	$-0,96 \div -0,44$	$-0,3315 \div -0,1700$	$-0,0197 \div -0,2920$
5	$-0,44 \div 0,07$	$-0,1700 \div 0,0279$	$-0,2920 \div -0,3960$
6	$0,07 \div 0,59$	$0,0279 \div 0,2224$	$-0,3960 \div -0,2185$
7	$0,59 \div 1,10$	$0,2224 \div 0,3643$	$-0,2185 \div 0,0458$
8	$1,10 \div 1,62$	$0,3643 \div 0,4474$	$0,0458 \div 0,1745$
9	$1,62 \div 2,13$	$0,4474 \div 0,4834$	$0,1745 \div 0,1460$
10	$2,13 \div \infty$	$0,4834 \div 0,5000$	$0,1460 \div 0$

i	$\varphi_3(z_i) \div \varphi_3(z_{i+1})$	$F(z_i) \div F(z_{i+1})$	p_i	np_i	$m_i - np_i$	$\frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$
1	$0 \div 0,1062$	$0 \div 0,0267$	0,0267	5,34	-1,66	0,516
2	$0,1062 \div -0,1670$	$0,0267 \div 0,0751$	0,0484	9,68	-1,32	0,180
3	$-0,1670 \div -0,5021$	$0,0751 \div 0,1712$	0,0961	19,22	4,22	0,926
4	$-0,5021 \div -0,4472$	$0,1712 \div 0,3266$	0,1554	28,08	4,08	0,593
5	$-0,4472 \div 0,0834$	$0,3266 \div 0,5192$	0,1926	38,52	10,48	2,852
6	$0,0834 \div 0,5245$	$0,5192 \div 0,7147$	0,1955	39,10	-1,90	0,092
7	$0,5245 \div 0,4290$	$0,7147 \div 0,8627$	0,1480	29,60	3,60	0,438
8	$0,4290 \div 0,0654$	$0,8627 \div 0,9506$	0,0879	17,58	0,58	0,019
9	$0,0654 \div -0,1351$	$0,9506 \div 0,9872$	0,0365	7,32	-0,12	0,001
10	$-0,1351 \div 0$	$0,9872 \div 1,0000$	0,0128	2,55		$\chi_q^2 = 5,615$

Теоретические вероятности p_i на основании закона распределения, определяемого А-рядом Шарлье, вычисляются по формуле

$$p_i = F(z_{i+1}) - F(z_i).$$

Используя найденные значения и имея в виду, что $n = \sum_{i=1}^{10} m_i = 200$, вычисляем (см. табл. 52)

$$\chi_q^2 = \sum_{i=1}^{10} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} = 5,615.$$

Число степеней свободы $k = l - r - 1 = 4$, так как число классов $l = 9$ (последние два интервала вследствие их малочисленности объединяем в один); число параметров, определенных на основании наблюдаемых данных, $r = 4$ (\tilde{x} , $\tilde{\sigma}$, $\tilde{S}k$, $\tilde{E}x$). Из таблицы [17Т], входя в нее с величинами $k = 4$ и $\chi_q^2 = 5,615$, находим $\alpha_q = P(\chi^2 \geq \chi_q^2) = 0,208$.

Гипотеза о согласии опытных данных с законом распределения $F(z)$, определяемым А-рядом Шарлье, не опровергается. Однако нет оснований утверждать, что согласование лучше, чем с законом нормального распределения, упомянутым в условии задачи.

Таблица 53

№ детали	Размер x		№ детали	Размер x		№ детали	Размер x	
	I группа	II группа		I группа	II группа		I группа	II группа
1	72,58	72,50	21	72,50	72,35	41	72,30	72,31
2	72,35	72,35	22	72,69	72,16	42	72,28	72,46
3	72,33	72,69	23	72,54	72,51	43	72,51	72,36
4	72,54	72,60	24	72,48	72,50	44	72,37	72,39
5	72,24	72,54	25	72,36	72,50	45	72,14	72,30
6	72,42	72,42	26	72,50	72,48	46	72,42	72,30
7	72,58	72,68	27	72,43	72,53	47	72,36	72,38
8	72,47	72,54	28	72,46	72,25	48	72,28	72,55
9	72,54	72,55	29	72,56	72,48	49	72,20	72,36
10	72,24	72,33	30	72,48	72,36	50	72,48	72,24
11	72,38	72,56	31	72,43	72,53	51	72,66	72,23
12	72,70	72,36	32	72,56	72,23	52	72,64	72,16
13	72,47	72,36	33	72,34	72,55	53	72,73	72,17
14	72,49	72,15	34	72,38	72,51	54	72,43	72,37
15	72,28	72,48	35	72,56	72,25	55	72,28	72,38
16	72,47	72,46	36	72,32	72,11	56	72,64	72,46
17	71,95	72,36	37	72,41	72,44	57	72,72	72,12
18	72,18	72,38	38	72,14	72,51	58	72,35	72,28
19	72,66	72,40	39	72,29	72,55	59	72,60	72,23
20	72,35	72,38	40	72,31	72,24	60	72,46	72,38

Аналогичным образом решаются задачи 43.26, 43.27.

Пример 43.5. Имеются две группы деталей одного образца, полученных с двух станков, по 60 штук в каждой. Данные об измерении характерного размера x деталей приведены в таблице 53.

Проверить, используя критерий Колмогорова, гипотезу о том, что обе выборки принадлежат одной генеральной совокупности, т. е. что оба станка дают одинаковое распределение размера x детали при уровне значимости $\alpha = 8\%$.

Решение. Располагаем детали в группах по возрастающей величине размера x и вычисляем статистические функции распределения $\tilde{F}_1(x)$ и $\tilde{F}_2(x)$ для каждой группы (см. табл. 54).

Таблица 54

x_i	Число значений $x \leq x_i$		$\tilde{F}_1(x_i)$	$\tilde{F}_2(x_i)$	$\tilde{F}_1(x_i) - \tilde{F}_2(x_i)$
	I группа	II группа			
71,95	1	0	0,0167	0	0,0167
72,11	1	1	0,0167	0,0167	0,0000
72,12	1	2	0,0167	0,0333	0,0167
72,14	3	2	0,0500	0,0333	0,0167
72,53	43	50	0,7167	0,8333	0,1167
72,54	46	52	0,7667	0,8667	0,1000
72,55	46	56	0,7667	0,9333	0,1667
72,56	49	57	0,8167	0,9500	0,1333
72,58	51	57	0,8500	0,9500	0,1000
72,60	52	58	0,8667	0,9667	0,1000
72,69	57	60	0,9500	0,0000	0,0500
72,70	58	60	0,9667	1,0000	0,0333
72,72	59	60	0,9833	1,0000	0,0167
72,73	60	60	1,0000	1,0000	0,0000

Находим наибольшее по абсолютной величине значение D_{n_1, n_2} разности $\tilde{F}_1(x) - \tilde{F}_2(x)$:

$$D_{n_1, n_2} = 0,1667 \text{ (см. табл. 54).}$$

Определив

$$\lambda = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} D_{n_1, n_2},$$

где в нашем случае $n_1 = n_2 = 6$, получим $\lambda = 0,9130$. Пользуясь таблицей [25Г], для найденного значения λ будем иметь $P(\lambda) = 0,375 = \alpha_q$.

Значение α_q велико; следовательно, отклонения не значимы и гипотеза о том, что обе выборки принадлежат одной генеральной совокупности, не опровергается.

Пример 43.6. Было измерено $n = 600$ деталей, причем для каждой из них проверялись размеры X и Y . Результаты измерений приведены в таблице 55, где через h_{ij} обозначено число деталей, имеющих размеры $X = x_i, Y = y_j$.

Таблица 55

$y_j \backslash x_i$	Заниженные: $j=1$	В пределах допусков: $j=2$	Завышенные: $j=3$	h_{i0}
Заниженные: $i=1 \dots$	6	48	8	62
В пределах допусков: $i=2 \dots$	52	402	36	490
Завышенные: $i=3 \dots$	6	38	4	48
h_{0i}	64	488	48	600

Для X : $i=1$, если размер занижен; $i=2$, если размер в пределах допусков; $i=3$, если размер завышен; для Y : $j=1, 2, 3$, если размер занижен, в пределах допусков или завышен соответственно.

Таблица 55

$i \backslash j$	1	2	3
1	6,61	50,43	4,96
2	52,26	308,57	39,20
3	5,12	39,06	3,83

Проверить, используя критерий χ^2 , являются ли независимыми отклонения размеров X и Y детали от допустимых при уровне значимости $\alpha = 5\%$.

Решение. Находим оценки m_{ij} математических ожиданий чисел наблюдений, при которых $X = x_i, Y = y_j$, исходя из гипотезы о независимости размеров X и Y детали:

$$m_{ij} = \frac{h_{i0}h_{0j}}{n}$$

Значения m_{ij} приведены в таблице 56.

Вычисляем χ_q^2 по формуле

$$\chi_q^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{(h_{ij} - m_{ij})^2}{m_{ij}}.$$

Вычисления выполнены в таблице 57, где даны значения $(h_{ij} - m_{ij})^2/m_{ij}$.

Таблица 57

$i \backslash j$	1	2	3	\sum_j
1	0,0563	0,1171	1,8632	2,0366
2	0,0013	0,0295	0,2612	0,2920
3	0,1513	0,0316	0,0077	0,1906
\sum_j	0,2089	0,1782	2,1321	$\sum_{i,j} = \chi_q^2 = 2,5192$

Получаем $\chi_q^2 = 2,519$. Определяем число степеней свободы по формуле

$$k = (l - 1)(m - 1),$$

где l — число групп по размеру X ; m — число групп по размеру Y ; $l = 3$, $m = 3$, $k = 4$. Используя таблицу [17Т] при $k = 4$ и $\chi_q^2 = 2,519$, находим $\alpha_q = P(\chi^2 \geq \chi_q^2) = 0,672$.

Значение α_q велико; следовательно, гипотеза о независимости отклонений размеров детали по признакам X и Y от допустимых не опровергается.

Аналогично решается задача 43.28.

Задачи

43.1. В таблице 58 приведены числа m_i участков равной площади ($0,25 \text{ км}^2$) южной части Лондона, на каждый из которых приходилось по i попаданий самолетов-снарядов во время второй мировой войны. Проверить с помощью критерия χ^2 согласие опытных данных с законом распределения Пуассона

$$P(i, a) = \frac{a^i e^{-a}}{i!},$$

приняв за уровень значимости 6%.

Таблица 58

i	0	1	2	3	4	5 и более	Итого
m_i	229	211	93	35	7	1	$n = \sum m_i = 576$

43.2. Через равные промежутки времени в тонком слое раствора золота регистрировалось число частиц золота, попадавших в поле зрения микроскопа. Результаты наблюдений приведены в таблице 59.

Таблица 59

Число частиц i	0	1	2	3	4	5	6	7	Итого
m_i	112	168	130	68	32	5	1	1	$\sum m_i = 517$

Проверить, используя критерий χ^2 , согласие с законом распределения Пуассона, приняв за уровень значимости 5%.

43.3. По каждой из 100 мишеней произведено из спортивного пистолета по 10 выстрелов, причем фиксировались только попадания и промахи. Результаты стрельб приведены в таблице 60.

Таблица 60

Число попаданий	m_i	Число попаданий	m_i	Число попаданий	m_i
0	0	4	22	8	4
1	2	5	26	9	2
2	4	6	18	10	0
3	10	7	12		

Проверить, используя критерий χ^2 , имелась ли при каждой из этих стрельб одинаковая вероятность попадания на один выстрел, иными словами, подчиняются ли результаты стрельбы биномиальному закону распределения. Уровень значимости принять равным 10%.

43.4. Семь монет подбрасывались одновременно 1536 раз, причем каждый раз отмечалось число X выпавших гербов. В таблице 61 приведены числа m_i случаев, когда число выпавших гербов было равно X_i .

Таблица 61

X_i	0	1	2	3	4	5	6	7
m_i	12	78	270	456	386	252	69	13

Пользуясь критерием χ^2 , проверить согласие гипотезы о наличии биномиального закона распределения с опытными данными. Учесть, что вероятность выпадения герба при бросании каждой из монет равна 0,5. Уровень значимости принять равным 5%.

43.5. Для контрольных испытаний продукции ста однотипных станков, выпустивших за смену каждый партию в 40 изделий 1-м и 2-м сортом, отобрано по 10 изделий от каждой партии и для каждой выборки подсчитано имеющееся в ней число i изделий 2-го сорта.

Результаты испытаний приведены в таблице 62.

Таблица 62

i	0	1	2	3	4	5	6 и более
m_i	1	10	27	36	25	1	0

Через m_i обозначено число выборок, имеющих i изделий 2-го сорта. Количество изделий, выпускаемых 2-м сортом, за длительный срок работы предприятия составляет 30% ($p = 0,30$).

Проверить, используя критерий Колмогорова, согласие результатов испытаний с гипергеометрическим и биномиальными законами распределения, приняв уровень значимости равным 5%.

Для величины i , распределенной по гипергеометрическому закону, вероятность равна

$$p_{i,n} = \frac{C_L^i C_{N-L}^{n-i}}{C_N^n},$$

где N — число изделий в партии, L — число изделий 2-го сорта в партии, n — объем выборки.

Для биномиального закона распределения

$$p_{i,n} = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}.$$

43.6. В таблице 63 приведены отклонения диаметра валков, обработанных на станке, от заданного размера.

Таблица 63

Границы интервала, мк	0 ÷ 5	5 ÷ 10	10 ÷ 15	15 ÷ 20	20 ÷ 25
Численность разряда m_i	15	75	100	50	20
Частота p_i^*	0,06	0,30	0,40	0,20	0,04

Проверить, используя критерий χ^2 , гипотезу о согласии наблюдений с законом нормального распределения, приняв уровень значимости равным 5%.

43.7. Образовано 250 чисел x , каждое из которых представляет собой сумму цифр пятизначного числа, выбранного из таблицы случайных чисел. Полученные суммы разбиты на 15 интервалов в соответствии с таблицей 64.

Таблица 64

Границы интервала	m_i	Границы интервала	m_i	Границы интервала	m_i
0 ÷ 3	0	15 ÷ 18	28,5	30 ÷ 33	27,0
3 ÷ 6	0,5	18 ÷ 21	39,0	33 ÷ 36	7,5
6 ÷ 9	1,5	21 ÷ 24	41,0	36 ÷ 39	1,0
9 ÷ 12	10,0	24 ÷ 27	45,0	39 ÷ 42	1,0
12 ÷ 15	17,5	27 ÷ 30	30,5	42 ÷ 45	0

Суммы, кратные трем, условно отнесены к обоим граничащим интервалам, к каждому из которых отнесена половина числа этих сумм. Установить, используя критерий χ^2 , согласуется ли приведенное статистическое распределение с законом нормального распределения, за параметры которого принять оценки математического ожидания и дисперсии, определенные по наблюдаемым данным при уровне значимости 5%.

43.8. Решить предыдущую задачу, применяя критерий Колмогорова, считая (вследствие малости ширины интервала в таблице 64) возможным значения всех элементов выборки, попавших в один интервал, принять равными значениям, соответствующим серединам интервалов. Для установления гипотетического закона нормального распределения учесть, что отдельные цифры в пятизначном случайном числе могут принимать любые значения от 0 до 9 с равной вероятностью $p = 0,1$.

43.9. Цифры 0, 1, 2, ..., 9 среди 800 первых десятичных знаков числа π появлялись 74, 92, 83, 79, 80, 73, 77, 75, 76, 91 раз соответственно. Проверить с помощью критерия χ^2 гипотезу о согласии этих данных с законом равномерного распределения при уровне значимости 10%.

43.10. Решить предыдущую задачу, используя критерий Колмогорова и считая, что вероятность появления любой цифры на месте любого десятичного знака равна 0,10.

43.11. Из таблицы случайных чисел выбрано 150 двузначных чисел (в совокупность двузначных чисел включаются и 00). Результаты выборки приведены в таблице 65.

Таблица 65

Границы интервала	Численность разряда m_i	Частота p_i^*	Границы интервала	Численность разряда m_i	Частота p_i^*
0 ÷ 9	16	0,107	50 ÷ 59	19	0,127
10 ÷ 19	15	0,100	60 ÷ 69	14	0,093
20 ÷ 29	19	0,127	70 ÷ 79	11	0,073
30 ÷ 39	13	0,087	80 ÷ 89	13	0,087
40 ÷ 49	14	0,093	90 ÷ 99	16	0,107

Проверить, используя критерий χ^2 , гипотезу о согласии наблюдений с законом равномерного распределения при уровне значимости 5%.

43.12. Решить предыдущую задачу, применяя критерий Колмогорова, считая (вследствие малости ширины интервала в таблице 65) возможным значения всех элементов выборки, попавших в один интервал, принять равными значению, соответствующему середине интервала.

43.13. Отсчет по шкале измерительного прибора оценивается приблизительно в долях деления шкалы. Теоретически любое значение последней цифры равновероятно, но в ряде случаев производящий отсчет отдает предпочтение одним цифрам перед другими. В таблице 66 приведено 200 результатов отсчета последней цифры между соседними делениями шкалы. Установить, используя критерий χ^2 , имеется ли систематическая ошибка в отсчете, т. е. согласуются ли наблюдения с законом равномерного распределения, при котором вероятность появления любой цифры $p_i = 0,10$ при уровне значимости 5%.

Таблица 66

Цифра i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m_i	35	16	15	17	17	19	11	16	30	24

43.14. Результаты наблюдения за среднесуточной температурой воздуха в течение 320 суток приведены в таблице 67.

Таблица 67

$x_i, ^\circ\text{C}$	m_i	$x_i, ^\circ\text{C}$	m_i
-40 ÷ -30	5	10 ÷ 20	81
-30 ÷ -20	11	20 ÷ 30	36
-20 ÷ -10	25	30 ÷ 40	20
-10 ÷ 0	42	40 ÷ 50	8
0 ÷ 10	88	50 ÷ 60	4

Проверить с помощью критерия χ^2 , с каким из двух законов распределения — нормальным или Симпсона (законом

треугольника) — лучше согласуются данные наблюдений при уровне значимости 3%.

43.15. В таблице 68 приведены наблюдаемые на опыте сроки отыскания и устранения отказов электронной аппаратуры в часах с точностью до 1 минуты.

Таблица 68

Номер интервала i	Границы интервала $y_i \div y_{i+1}$	Численность разряда m_i	Номер интервала i	Границы интервала $y_i \div y_{i+1}$	Численность разряда m_i
1	1/60 ÷ 3/60	2	8	1,8 ÷ 3,2	10
2	3/60 ÷ 6/60	5	9	3,2 ÷ 5,6	7
3	6/60 ÷ 10/60	7	10	5,6 ÷ 10	4
4	10/60 ÷ 18/60	11	11	10 ÷ 18	2
5	18/60 ÷ 35/60	15	12	18 ÷ 30	1
6	35/60 ÷ 1,0	21	13	более 30	0
7	1,0 ÷ 1,8	15			

Проверить, используя критерий χ^2 , согласие наблюдаемых данных с законом логарифмически нормального распределения, при котором $x = \lg y$ подчиняется закону нормального распределения, приняв за уровень значимости 5%.

43.16. По данным каталога Воронцова-Вельяминова распределение расстояний до планетарных туманностей представлено в таблице 69, где X_i — расстояние (в килопарсеках) до туманности, а m_i — число случаев (численность разряда).

Таблица 69

X_i	m_i	X_i	m_i	X_i	m_i	X_i	m_i
0 ÷ 0,5	9	3,0 ÷ 3,5	12	6,0 ÷ 6,5	3	9,0 ÷ 9,5	2
0,5 ÷ 1,0	11	3,5 ÷ 4,0	7	6,5 ÷ 7,0	2	9,5 ÷ 10,0	0
1,0 ÷ 1,5	8	4,0 ÷ 4,5	10	7,0 ÷ 7,5	1	10,0 ÷ 10,5	0
1,5 ÷ 2,0	12	4,5 ÷ 5,0	8	7,5 ÷ 8,0	0		
2,0 ÷ 2,5	13	5,0 ÷ 5,5	5	8,0 ÷ 8,5	0		
2,5 ÷ 3,0	16	5,5 ÷ 6,0	0	8,5 ÷ 9,0	0		
							$n = \sum_{i=1}^{21} m_i = 119$

Проверить, используя критерий χ^2 , гипотезу о согласии наблюдаемых данных с законом распределения, функция распределения $F(|x|)$ которого имеет вид

$$F(|x|) = \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{x+\bar{x}}{\sigma}\right) \right],$$

где \bar{x} и σ — математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины X , подчиненной закону нормального распределения, которые связаны с математическим ожиданием $M[|X|]$ и начальным моментом второго порядка m_2 абсолютной величины $|X|$ формулами:

$$\sigma = \sqrt{\frac{m_2}{1+v^2}}, \quad \bar{x} = v \sqrt{\frac{m_2}{1+v^2}}.$$

Здесь величина v представляет собой корень уравнения

$$\frac{2[\varphi(v) + 0,5v\Phi(v)]}{\sqrt{1+v^2}} = \frac{M[|X|]}{\sqrt{m_2}},$$

где $\varphi(v)$ и $\Phi(v)$ определяются из таблиц [9Т], [8Т]. Уровень значимости принять равным 5%.

43.17. В таблице 70 приведены результаты измерения некоторой величины X .

Таблица 70

Границы интервала x_i	m_i	Границы интервала x_i	m_i	Границы интервала x_i	m_i
75 ÷ 77	2	85 ÷ 87	32	95 ÷ 97	8
77 ÷ 79	4	87 ÷ 89	24	97 ÷ 99	3
79 ÷ 81	12	89 ÷ 91	23	99 ÷ 101	1
81 ÷ 83	24	91 ÷ 93	22	$n = \sum_{i=1}^{13} m_i = 200$	
83 ÷ 85	25	93 ÷ 95	20		

Проверить, используя критерий χ^2 , согласие опытных данных с законом нормального распределения и с композицией законов нормального и равномерного распределений, параметры которых следует определить на основании результатов измерений.

Учсть, что для случайной величины $X = Y + Z$, где Y подчиняется закону нормального распределения с математическим ожиданием, равным нулю, и с дисперсией σ^2 , а Z — закону равномерного распределения в интервале (α, β) , плотность вероятности $\psi(x)$ выражается формулой

$$\psi(x) = \frac{1}{2(\beta - \alpha)} \left[\Phi\left(\frac{x - \alpha}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x - \beta}{\sigma}\right) \right].$$

Для определения оценок параметров σ , α , β , входящих в формулу для $\psi(x)$, необходимо на основании опытных данных определить оценки математического ожидания \tilde{x} и центральных моментов второго и четвертого порядков $\tilde{\mu}_2$ и $\tilde{\mu}_4$, после чего оценки величин σ , α , β определяются из уравнений:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^2 &= \tilde{\mu}_2 - \sqrt{\frac{5}{2} \tilde{\mu}_2^2 - \frac{5}{6} \tilde{\mu}_4}, \\ \frac{(\tilde{\beta} - \tilde{\alpha})^2}{12} &= \sqrt{\frac{5}{2} \tilde{\mu}_2^2 - \frac{5}{6} \tilde{\mu}_4}, \\ \frac{\tilde{\beta} + \tilde{\alpha}}{2} &= \tilde{x}. \end{aligned}$$

43.18. С помощью контрольного прибора было измерено расстояние r (в микронах) центра тяжести детали от оси ее наружной цилиндрической поверхности для 602 деталей. Результаты измерений представлены в таблице 71.

Таблица 71

Интервалы значений r_i	m_i	Интервалы значений r_i	m_i
0 ÷ 16	40	80 ÷ 96	45
16 ÷ 32	129	96 ÷ 112	19
32 ÷ 48	140	112 ÷ 128	8
48 ÷ 64	126	128 ÷ 144	3
64 ÷ 80	91	144 ÷ 160	1

Проверить, используя критерий χ^2 , согласуются ли наблюдаемые данные с законом распределения Рэля

$$f(r) = \frac{1}{a^2} r e^{-\frac{r^2}{2a^2}},$$

оценку параметра a которого определить по оценке \tilde{r} математического ожидания, используя формулу

$$M[r] = a \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Принять уровень значимости равным 5%.

43.19. В таблице 72 даны результаты 228 измерений чувствительности X телевизора (в микровольтах).

Т а б л и ц а 72

x_k	m_k	x_k	m_k	x_k	m_k
200	1	450	33	650	19
250	2	500	34	700	13
300	11	550	31	750	8
350	20	600	25	800	3
400	28				

Проверить, используя критерий χ^2 , с каким законом лучше согласуются результаты измерения: с законом нормального распределения или с законом распределения Максвелла, плотность вероятности которого определяется формулой

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(x-x_0)^2}{a^3} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2a^2}}, \quad x \geq x_0,$$

причем математическое ожидание $M[X]$ величины X связано с a формулой $M[X] = x_0 + 1,596a$. За значение x_0 для простоты принять наименьшее наблюдаемое значение величины X .

43.20. Испытания 200 ламп на продолжительность работы T (в часах) дали результаты, приведенные в таблице 73.

Проверить, используя критерий χ^2 , согласие опытных данных с экспоненциальным законом распределения, для которого плотность вероятности выражается формулой

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

Уровень значимости принять равным 5%.

Таблица 73

Номер разряда i	Границы разряда $t_i \div t_{i+1}$	Численность разряда m_i	Номер разряда i	Границы разряда $t_i \div t_{i+1}$	Численность разряда m_i
1	0 ÷ 300	53	7	1800 ÷ 2100	9
2	300 ÷ 600	41	8	2100 ÷ 2400	7
3	600 ÷ 900	30	9	2400 ÷ 2700	5
4	900 ÷ 1200	22	10	2700 ÷ 3000	3
5	1200 ÷ 1500	16	11	3000 ÷ 3300	2
6	1500 ÷ 1800	12	12	более 3300	0

Учтем, что параметр λ экспоненциального закона распределения связан с математическим ожиданием случайной величины T формулой

$$\lambda = \frac{1}{M[T]}.$$

43.21. Произведено испытание партии в 1000 электронных ламп на срок службы. В таблице 74 приведены интервалы сроков работы ламп до выхода из строя ($t_i; t_{i+1}$) и соответствующие численности разрядов m_i ; величины t_i даны в часах.

Таблица 74

Номер интервала i	1	2	3	4	5	
Границы интервала $t_i \div t_{i+1}$	0 ÷ 100	100 ÷ 200	200 ÷ 300	300 ÷ 400	400 ÷ 500	
Численность разряда m_i	78	149	174	165	139	
Номер интервала i	6	7	8	9	10	11
Граница интервала $t_i \div t_{i+1}$	500 ÷ 600	600 ÷ 700	700 ÷ 800	800 ÷ 900	900 ÷ 1000	Более 1000
Численность разряда m_i	107	77	50	32	27	2

Составляем квадратное уравнение для отыскания коэффициента \tilde{a}_1 :

$$\tilde{a}_1^2 + \frac{[s_1^2 - (n+1)s_2] \frac{\sigma_p^2}{\sigma_T^2} - [r_1^2 - (n+1)r_2]}{s_1 r_1 - (n+1)v_1} \tilde{a}_1 - \frac{\sigma_p^2}{\sigma_T^2} = 0,$$

которое после подстановки числовых значений принимает вид

$$\tilde{a}_1^2 + 0,065708\tilde{a}_1 - 0,0028444 = 0.$$

Решая это уравнение, находим два значения \tilde{a}_1 :

$$\tilde{a}_{11} = 0,029786; \quad \tilde{a}_{12} = -0,095494.$$

Очевидно, что корень \tilde{a}_{12} не годится, так как он отрицателен, а из данных таблицы 97 легко заключить, что при возрастании T величина ρ возрастает. Следовательно,

$$\tilde{a}_1 = 0,029786.$$

Определяем коэффициент \tilde{a}_0 по формуле

$$\tilde{a}_0 = \frac{r_1 - \tilde{a}_1 s_1}{n+1} = -6,356.$$

Вычисляем в таблице 97 значения ϵ_i :

$$\epsilon_i = \rho_i - \tilde{\rho}_i,$$

где $\tilde{\rho}$ — расчетные значения величины

$$\tilde{\rho} = -6,3558 + 0,029786T.$$

На основании данных таблицы 97 находим, что $|\epsilon_{\max}| = 0,28$. Аналогично решается задача 44.15.

Задачи

44.1. Результаты равнооточных измерений глубины h проникновения тела в преграду при различных значениях его удельной энергии E (энергии, приходящейся на единицу площади соударения) приведены в таблице 98.

Подобрать линейную зависимость вида

$$h = a_0 + a_1 E.$$

определить оценки $\tilde{\sigma}_{a_k}^2$ дисперсий коэффициентов a_k и оценку $\tilde{\sigma}^2$ дисперсии, характеризующей точность отдельного измерения.

Таблица 98

i	E_i	h_i	i	E_i	h_i	i	E_i	h_i
0	41	4	5	139	20	9	241	30
1	50	8	6	154	19	10	250	31
2	81	10	7	180	23	11	269	35
3	104	14	8	208	26	12	301	37
4	120	16						

44.2. Решить предыдущую задачу, перенеся для упрощения вычислений начало отсчета аргумента E в точку, равную среднему арифметическому значению величин E , и начало отсчета величин h в точку, близкую к математическому ожиданию h .

44.3. Высота h падения тела за время t определяется формулой

$$h = a_0 + a_1 t + a_2 t^2,$$

где a_0 — путь, пройденный телом к моменту начала отсчета времени, a_1 — скорость тела в момент начала отсчета времени, a_2 — половина ускорения силы тяжести g .

Определить оценки коэффициентов a_0 , a_1 , a_2 и оценить точность определения ускорения силы тяжести указанным методом на основании серии равноточных измерений, результаты которых приведены в таблице 99.

Таблица 99

t , сек.	h , см	t , сек.	h , см	t , сек.	h , см	t , сек.	h , см	t , сек.	h , см
$\frac{1}{30}$	11,86	$\frac{4}{30}$	26,69	$\frac{7}{30}$	51,13	$\frac{10}{30}$	85,44	$\frac{13}{30}$	129,54
$\frac{2}{30}$	15,67	$\frac{5}{30}$	33,71	$\frac{8}{30}$	61,49	$\frac{11}{30}$	99,08	$\frac{14}{30}$	146,48
$\frac{3}{30}$	20,60	$\frac{6}{30}$	41,93	$\frac{9}{30}$	72,90	$\frac{12}{30}$	113,77		

Проверить с помощью критерия χ^2 гипотезу о согласии результатов испытаний с законом распределения Вейбулла. Функция распределения $F(t)$ для этого закона выражается формулой

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{b_m t}{\bar{t}}\right)^m},$$

где

$$b_m = \Gamma\left(\frac{1}{m} + 1\right);$$

$\Gamma(x)$ — гамма-функция.

Параметры \bar{t} (математическое ожидание величины T) и m вычислить на основании опытных данных. Учесть, что параметр m связан со средним квадратическим отклонением σ формулой

$$\sigma = v_m \bar{t},$$

где

$$v_m = \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{2}{m} + 1\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{m} + 1\right)} - 1};$$

$v_m = \frac{\sigma}{\bar{t}}$ — коэффициент вариации.

В таблице [33Т] приведены значения b_m и v_m в зависимости от m . Зная v_m , можно из этой таблицы найти m и b_m . Приводим выдержку из этой таблицы (табл. 75):

Таблица 75

m	b_m	v_m
1.7	0,892	0,605
1.8	0,889	0,575

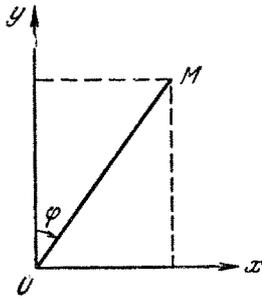


Рис. 36.

43.22. Положение точки M на плоскости определяется прямоугольными координатами X и Y . На опыте измеряется угол φ , составленный радиусом-вектором точки M с осью y (рис. 36). Результаты 1000 измерений величины φ , округленные с интервалами в 15 град, и числа n_i появления данного значения φ_i приведены в таблице 76.

Таблица 76

φ_i , град	m_i	φ_i , град	m_i	φ_i , град	m_i
-82,5	155	-22,5	49	37,5	67
-67,5	118	-7,5	48	52,5	66
-52,5	73	7,5	48	67,5	111
-37,5	59	22,5	53	82,5	153

Если величины X и Y независимы, нормальны, имеют нулевые математические ожидания и дисперсии, равные соответственно σ^2 и $\frac{1}{4}\sigma^2$, то величина $z = \operatorname{tg} \varphi$ должна подчиняться закону распределения Коши (закону арктангенса)

$$f(z) = \frac{2}{\pi(z^2 + 4)}.$$

Считая, что ошибки измерения φ отсутствуют и что допустимо не учитывать влияние ошибок округления, проверить, используя критерий согласия Колмогорова при уровне значимости 5%, справедливость сделанных выше предположений о случайных величинах X и Y .

43.23. Для проверки точности хода специальных маятниковых часов в наудачу выбранные моменты времени фиксировались углы отклонения оси маятника от вертикали. Амплитуда колебаний поддерживалась постоянной и равной $\alpha = 15^\circ$.

Результаты 1000 таких измерений, округленные с интервалом в 3° , приведены в таблице 77.

Таблица 77

Результаты измерений α_i в град	m_i — число появлений значения α_i	Результаты измерений α_i в град	m_i — число появлений значения α_i
-13,5	188	1,5	74
-10,5	88	4,5	76
-7,5	64	7,5	81
-4,5	86	10,5	100
-1,5	62	13,5	181

Считая возможным не учитывать влияния ошибок округления, проверить с помощью критерия согласия Колмогорова гипотезу о согласии наблюдений с законом распределения арксинуса при уровне значимости 5%.

43.24. Для проверки стабильности работы станка через каждый час производится проба, состоящая в том, что измеряются 20 случайно отобранных деталей и по результатам измерений в каждой i -й выборке вычисляется несмещенная оценка дисперсии $\tilde{\sigma}_i^2$. Значения $\tilde{\sigma}_i^2$ по 47 таким выборкам приведены в таблице 78.

Таблица 78

i	$\tilde{\sigma}_i^2$	i	$\tilde{\sigma}_i^2$	i	$\tilde{\sigma}_i^2$	i	$\tilde{\sigma}_i^2$
1	0,1225	13	0,1444	25	0,1681	37	0,1089
2	0,1444	14	0,1600	26	0,1369	38	0,1089
3	0,1296	15	0,1521	27	0,1681	39	0,0784
4	0,1024	16	0,1444	28	0,0676	40	0,1369
5	0,1369	17	0,1024	29	0,1024	41	0,0729
6	0,0961	18	0,0961	30	0,1369	42	0,1089
7	0,1296	19	0,1156	31	0,0576	43	0,0784
8	0,1156	20	0,1024	32	0,1024	44	0,5121
9	0,1764	21	0,1521	33	0,0841	45	0,1600
10	0,0900	22	0,1024	34	0,1521	46	0,1681
11	0,1225	23	0,1600	35	0,0676	47	0,1089
12	0,1156	24	0,1296	36	0,1225		

Проверить, используя критерий χ^2 , при уровне значимости 5% гипотезу об однородности ряда дисперсий, или, иными словами, предположение об отсутствии разладки станка в смысле изменения рассеивания по измеряемому размеру детали. Учесть то обстоятельство, что в случае справедливости этой гипотезы величина

$$q_i = \frac{(n_i - 1) \tilde{\sigma}_i^2}{\tilde{\sigma}^2}$$

приблизительно удовлетворяет закону распределения χ^2 с $n_i - 1$ степенями свободы, причем $\tilde{\sigma}^2$ представляет собой несмещенную оценку дисперсии σ^2 всей генеральной совокупности и

вычисляется по формуле

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^m \tilde{\sigma}_i^2 (n_i - 1)}{N - m},$$

где $n_i = n = 20$ — число элементов в каждой выборке, $m = 47$ — число выборок, $N = \sum_{i=1}^m n_i = 940$ — общее число элементов во всех выборках.

43.25. Имеется $m = 40$ выборок деталей по $n = 20$ штук в каждой, причем для каждой i -й группы известны оценки математического ожидания \tilde{x}_i , наудачу взятое (например, первое в каждой выборке) значение x из i -й выборки x_{i1} и несмещенная оценка дисперсии $\tilde{\sigma}_i^2$ измерения размера детали x . Значения величин \tilde{x}_i , x_{i1} , $\tilde{\sigma}_i^2$ для указанных 40 выборок приведены в таблице 79.

Таблица 79

i	x_{i1}	\tilde{x}_i	$\tilde{\sigma}_i^2$	i	x_{i1}	\tilde{x}_i	$\tilde{\sigma}_i^2$
1	148	132	24	21	114	112	39
2	182	152	38	22	112	108	32
3	195	145	40	23	49	97	52
4	81	134	32	24	116	106	36
5	149	124	37	25	138	124	36
6	143	144	31	26	120	149	37
7	133	142	31	27	120	129	41
8	132	143	34	28	104	120	26
9	111	109	42	29	121	105	26
10	156	121	30	30	99	110	32
11	103	93	35	31	123	105	37
12	61	118	45	32	109	123	24
13	149	116	38	33	100	116	32
14	209	123	40	34	115	123	29
15	124	106	39	35	108	109	27
16	52	181	46	36	125	138	35
17	147	102	32	37	170	126	33
18	145	124	31	38	132	132	33
19	128	125	34	39	114	131	28
20	98	119	32	40	155	115	37

Проверить, применяя критерий Колмогорова при уровне значимости 10%, гипотезу о нормальном распределении размера детали x .

Учесть, что в этом случае (при $n \neq 4$) величины η_i ,

$$\eta_i = \frac{\tau_i \sqrt{n-2}}{\sqrt{n-1-\tau_i^2}},$$

где

$$\tau_i = \frac{x_{ij} - \tilde{x}_i}{\tilde{\sigma}_i},$$

подчиняются закону распределения Стьюдента с числом степеней свободы $k = n - 2 = 18$, где x_{ij} — наудачу взятое значение из i -й выборки (в нашем случае x_{i1}).

43.26. Произведено 300 измерений некоторой величины x , результаты которых приведены в таблице 80.

Таблица 80

Границы интервала x_i	m_i	Границы интервала x_i	m_i	Границы интервала x_i	m_i
50 ÷ 60	1	100 ÷ 110	56	140 ÷ 150	19
60 ÷ 70	2	110 ÷ 120	61	150 ÷ 160	16
70 ÷ 80	9	120 ÷ 130	49	160 ÷ 170	4
80 ÷ 90	23	130 ÷ 140	25	170 ÷ 180	2
90 ÷ 100	33				

Проверить, используя критерий χ^2 , согласно опытных данных с законом нормального распределения, оценки параметров которого подобрать на основании опытных данных. Сгладить опытные данные с помощью закона распределения, который определяется A -рядом Шарлье, и проверить с помощью критерия χ^2 согласно опытных данных с полученным законом распределения.

43.27. Измерения скорости света c , произведенные Майкельсоном, Пизом и Пирсоном, дали результаты, приведенные в таблице 81. Для сокращения записи первые три цифры значений c_i (в км/сек) в таблице опущены (299 000).

Таблица 81

Границы интервала c_i	m_i						
735 ÷ 740	3	755 ÷ 760	17	775 ÷ 780	40	795 ÷ 800	5
740 ÷ 745	7	760 ÷ 765	23	780 ÷ 785	17	800 ÷ 805	2
745 ÷ 750	4	765 ÷ 770	29	785 ÷ 790	16	805 ÷ 810	3
750 ÷ 755	8	770 ÷ 775	45	790 ÷ 795	10	810 ÷ 815	4

Получены следующие оценки математического ожидания \tilde{c} и среднего квадратического отклонения $\tilde{\sigma}$, вычисленные по опытным данным:

$$\tilde{c} = 299733,85 \text{ км/сек}, \quad \tilde{\sigma} = 14,7 \text{ км/сек}.$$

Проверка на основании критерия χ^2 гипотезы о согласии опытных данных с законом нормального распределения, имеющим параметры \tilde{c} и $\tilde{\sigma}$, дала значение $\chi_q^2 = \chi_{qn}^2 = 18,52$; число степеней свободы в этом случае равно $k_n = 9$ и получилось $P(\chi^2 \geq \chi_{qn}^2) = 0,018$; малочисленные интервалы объединялись. Гипотезу следует считать опровергнутой.

Сгладить наблюдения с помощью закона распределения, который определяется А-рядом Шарлье, и проверить, используя критерий χ^2 , согласие опытных данных с полученным законом распределения.

43.28. Произведено измерение изделий в двух партиях по 100 деталей в каждой. Числа h_{ij} деталей с нормальными, заниженными и завышенными размерами приведены в таблице 82.

Таблица 82

№ партий изделий i	Размер деталей j			
	Результаты измерений j			
	1 (заниженный размер)	2 (нормальный размер)	3 (завышенный размер)	h_{j0}
1	25	50	25	100
2	52	41	7	100
h_{0j}	77	91	32	200

Проверить с помощью критерия χ^2 , являются ли независимыми номер партии изделий и характер размеров проверяемых деталей при уровне значимости 5%.

§ 44. Обработка результатов наблюдений по способу наименьших квадратов

Основные формулы

Способ наименьших квадратов применяется для нахождения оценок параметров функциональной зависимости между переменными, значения которых определяются из опыта. Вид искомой функциональной зависимости предполагается известным.

Если на опыте получено $n + 1$ пар значений (x_i, y_i) , где x_i — значения аргумента, а y_i — значения функции, то параметры аппроксимирующей функции $F(x)$ выбирают так, чтобы обратилась в минимум сумма

$$S = \sum_{i=0}^n [y_i - F(x_i)]^2.$$

Если в качестве аппроксимирующей функции взят многочлен, т. е.

$$F(x) = Q_m(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m \quad (m \leq n),$$

то оценки его коэффициентов a_k определяются из системы $m + 1$ нормальных уравнений

$$\sum_{j=0}^m s_{k+j} a_j \equiv s_k a_0 + s_{k+1} a_1 + \dots + s_{k+m} a_m = v_k \\ (k = 0, 1, 2, \dots, m),$$

где

$$s_k = \sum_{i=0}^n x_i^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 2m), \\ v_k = \sum_{i=0}^n y_i x_i^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m).$$

Если значения x_i известны без ошибок, а значения y_i независимы и равноточны, то оценка дисперсии $\tilde{\sigma}^2$ величины y_i определяется формулой

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n-m} S_{\text{min}},$$

где S_{min} — значение S , вычисленное в предположении, что коэффициенты полинома $F(x) = Q_m(x)$ заменены их оценками, найденными из системы нормальных уравнений.

При нормальном законе распределения величин y_i изложенный метод является наилучшим способом нахождения аппроксимирующей функции $F(x)$.

Оценки $\tilde{\sigma}_{a_k}^2$ дисперсий коэффициентов \tilde{a}_k и корреляционных моментов \tilde{K}_{a_k, a_j} определяются формулами

$$\tilde{\sigma}_{a_k}^2 = M_{k, k} \tilde{\sigma}^2, \quad \tilde{K}_{a_k, a_j} = M_{k, j} \tilde{\sigma}^2,$$

где $M_{k, j} = \frac{\Delta_{kj}}{\Delta}$, $\Delta = |d_{kj}|$ — определитель системы нормальных уравнений $(m+1)$ -го порядка,

$$d_{kj} = s_{k+j} \quad (j, k = 0, 1, 2, \dots, m),$$

Δ_{kj} — алгебраическое дополнение элемента d_{kj} в определителе Δ .

При решении системы нормальных уравнений методом исключения величины $M_{k, j}$ можно также получить, если при решении системы нормальных уравнений величины v_k не заменять их числовыми значениями. Полученные для \tilde{a}_k линейные зависимости от v_k в качестве коэффициентов у v_j будут содержать искомые коэффициенты $M_{k, j}$.

В частном случае линейной зависимости ($m=1$) имеем:

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1 x, \\ \tilde{a}_0 &= \frac{s_2 v_0 - s_1 v_1}{s_2 s_0 - s_1^2}, \quad \tilde{a}_1 = \frac{-s_1 v_0 + s_0 v_1}{s_2 s_0 - s_1^2}, \\ \tilde{\sigma}_{a_0}^2 &= \frac{s_2}{s_2 s_0 - s_1^2} \frac{S_{\text{min}}}{n-1}, \quad \tilde{\sigma}_{a_1}^2 = \frac{s_0}{s_2 s_0 - s_1^2} \frac{S_{\text{min}}}{n-1}, \\ \tilde{K}_{a_0, a_1} &= -\frac{s_1}{s_2 s_0 - s_1^2} \frac{S_{\text{min}}}{n-1}. \end{aligned}$$

В случае неравноточных измерений, когда величины y_i имеют различные дисперсии σ_i^2 , все предыдущие формулы остаются в силе, если величины S , s_k , v_k заменить соответственно на

$$S' = \sum_{i=0}^n p_i^2 (y_i - a_0 - a_1 x_i - \dots - a_m x_i^m),$$

$$s'_k = \sum_{i=0}^n p_i^2 x_i^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 2m),$$

$$v'_k = \sum_{i=0}^n p_i^2 y_i x_i^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m),$$

где «веса» p_i^2 величин y_i равны

$$p_i^2 = \frac{A^2}{\sigma_i^2};$$

A^2 — произвольный коэффициент пропорциональности.

Если «веса» p_i^2 заданы, то оценки дисперсий отдельных измерений y_i вычисляются по формуле

$$\tilde{\sigma}_i^2 = \frac{S'_{\min}}{(n-m) p_i^2}.$$

Если значение y_i получено в результате усреднения n_i равноточных результатов, то «вес» измерения y_i пропорционален n_i . Можно принять $p_i^2 = n_i$. При этом все формулы остаются без изменений, за исключением формулы для $\tilde{\sigma}_i^2$; в этом случае

$$\tilde{\sigma}_i^2 = \frac{S'_{\min}}{(n-m)(n_i-1)}.$$

Доверительные интервалы для коэффициентов a_k при любой заданной доверительной вероятности α имеют вид

$$\tilde{a}_k - \gamma \sigma_{a_k} < a_k < \tilde{a}_k + \gamma \sigma_{a_k},$$

где γ определяется из таблицы [16Г] для закона распределения Стьюдента по входным величинам α и числу степеней свободы $k = n - m$.

В случае равноотстоящих измерений доверительный интервал для среднего квадратического отклонения σ при доверительной вероятности α определяется неравенствами

$$\gamma_1 \tilde{\sigma} < \sigma < \gamma_2 \tilde{\sigma},$$

где γ_1 и γ_2 определяются из таблицы [19Т] для закона χ^2 -распределения по входным величинам α и числу степеней свободы k . Можно для той же цели использовать таблицу [18Т]; при этом

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{n-m}{\chi_1^2}}, \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{n-m}{\chi_2^2}},$$

где χ_1^2 и χ_2^2 определяются равенствами

$$P(\chi^2 \leq \chi_1^2) = \frac{1-\alpha}{2}, \quad P(\chi^2 \geq \chi_2^2) = \frac{1+\alpha}{2}$$

при числе степеней свободы $k = n - m$.

Доверительные границы, образующие полосу, которая с любой заданной доверительной вероятностью α содержит график неизвестной истинной зависимости $y = F(x)$, определяются неравенствами

$$Q_m(x_i) - \gamma \tilde{\sigma}_y(x_i) < y(x_i) < Q_m(x_i) + \gamma \tilde{\sigma}_y(x_i),$$

где $\tilde{\sigma}_y^2(x_i)$ — оценка дисперсии величины y , определяемой зависимостью $y = Q_m(x)$ (она зависит от случайных величин — оценок коэффициентов a_k).

В общем случае вычисление $\tilde{\sigma}_y^2(x)$ сложно, так как требует знания всех корреляционных моментов k_{a_k, a_l} . В случае линейной зависимости ($m = 1$)

$$\tilde{\sigma}_y^2(x) = \tilde{\sigma}_{a_0}^2 + \tilde{\sigma}_{a_1}^2 x^2 + 2\tilde{k}_{a_0, a_1} x.$$

Значение γ определяется из таблицы [16Т] для закона распределения Стьюдента по входным величинам α и числу степеней свободы $k = n - m$.

При равноотстоящих значениях аргумента x_i вычисление аппроксимирующего многочлена можно упростить, используя представление его в виде

$$Q_m(x) = \sum_{k=0}^m b_k P_{k, n}(x_i),$$

где $P_{k,n}(x'_i)$ — ортогональные полиномы Чебышева:

$$P_{k,n}(x') = \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j C_{k+j}^j \frac{x'(x'-1) \dots (x'-j+1)}{n(n-1) \dots (n-j+1)},$$

$$x' = \frac{x - x_{\min}}{h}, \quad h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{n},$$

x_{\max} , x_{\min} — наибольшее и наименьшее значения x_i ,

$$b_k = \frac{c_k}{S_k}, \quad c_k = \sum_{i=0}^n y_i P_{k,n}(x'_i), \quad S_k = \sum_{i=0}^n P_{k,n}^2(x'_i).$$

Оценки дисперсий коэффициентов b_k находятся по формуле

$$\tilde{\sigma}_{b_k}^2 = \frac{S_{\min}}{n-m} \frac{1}{S_k}.$$

Значения полиномов Чебышева, умноженные на $P_{k,n}(0)$ для $k = 1 \div 5$, $n = 5 \div 20$, $x' = 0, 1, \dots, n$, приведены в таблице [30Т].

Если коэффициенты b_k вычислены с помощью таблицы [30Т], то при вычислении полиномов $P_{k,n}(x')$ в формуле для $Q_m(x)$ необходимо также учитывать коэффициент $P_{k,n}(0)$, выбирая ординаты этих полиномов из тех же таблиц или умножая значение полинома, вычисленное по приведенной выше формуле, на $P_{k,n}(0)$.

В ряде случаев аппроксимирующая функция, не являющаяся многочленом, может быть сведена к нему заменой переменных. Примеры такой замены приведены в таблице 83.

Если y есть функция нескольких аргументов z_i , то для получения линейной аппроксимирующей функции

$$y = \alpha_0 z_0 + \alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_m z_m$$

по значениям y_i и z_{ki} в $n+1$ опытах требуется найти решения $\tilde{\alpha}_k$ системы нормальных уравнений

$$s_{k0} \tilde{\alpha}_0 + s_{k1} \tilde{\alpha}_1 + \dots + s_{km} \tilde{\alpha}_m = \beta_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m),$$

где

$$s_{kj} = \sum_{i=0}^n z_{ki} z_{ji} \quad (k, j = 0, 1, 2, \dots, m);$$

$$\beta_k = \sum_{i=0}^n y_i z_{ki} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m).$$

Таблица 83

№№ п/п	Исходная функция	К какому виду приводится	Замена переменных
1	$y = Ae^{kx}$	$z = a_0 + a_1x$	$z = \ln y; a_0 = \ln A; a_1 = k$
2	$y = Bx^b$	$z = a_0 + a_1u$	$z = \lg y; u = \lg x$
3	$y = a_0 + \frac{a_1}{x}$	$y = a_0 + a_1u$	$u = \frac{1}{x}$
4	$y = a_0 + \frac{a_1}{x^b}$	$y = a_0 + a_1u$	$u = \frac{1}{x^b}$
5	$y = Ae^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$	$z = a_0 +$ $+ a_1x + a_2x^2$	$z = \lg y; a_0 = \lg A - \frac{\lg e}{2\sigma^2}$ $a_1 = \frac{a \lg e}{\sigma^2}; a_2 = -\frac{\lg e}{2\sigma^2} a^2$
6	$y = a_0 + \frac{a_1}{x} +$ $+ \frac{a_2}{x^2} + \dots$	$y = a_0 + a_1u +$ $+ a_2u^2 + \dots$	$u = \frac{1}{x}$
7	$y = a_0 + a_1x^b +$ $+ a_2x^{2b} + \dots$	$y = a_0 + a_1u +$ $+ a_2u^2 + \dots$	$u = x^b$
8	$y = a_0x^{-m} + a_1x^n$	$z = a_0 + a_1u$	$z = yx^m; u = x^{m+n}$

Если значения z_{ki} известны без ошибок, а измерения y_i равноточны, то оценки дисперсий коэффициентов α_k определяются формулой

$$\tilde{\sigma}_{\alpha_k}^2 = N_{k,k} \tilde{\sigma}^2,$$

где $\tilde{\sigma}^2 = \frac{S_{\min}}{n-m}$, а $N_{k,k}$ есть отношение алгебраического дополнения соответствующего диагонального элемента определителя системы нормальных уравнений к самому определителю. При решении системы без помощи определителей величины $N_{k,k}$ найдутся как решения этой системы, если в ней β_k заменить единицей, а остальные β_l — нулями.

Роль величин z_k могут играть любые функции $f_k(x)$ некоторого аргумента x . Например, если функция y , заданная

в интервале $(0, 2\pi)$, аппроксимируется тригонометрическим многочленом

$$y = \lambda_0 + \sum_{k=1}^m (\lambda_k \cos kx + \mu_k \sin kx),$$

то при равноотстоящих значениях аргумента x_i оценки коэффициентов λ_k и μ_k определяются формулами Бесселя:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_0 &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n y_i; & \tilde{\lambda}_k &= \frac{2}{n+1} \sum_{i=0}^n y_i \cos kx_i; \\ \tilde{\mu}_k &= \frac{2}{n+1} \sum_{i=0}^n y_i \sin kx_i & (k &= 1, 2, \dots, m). \end{aligned}$$

При сложной функциональной зависимости и достаточно малой области изменения аргументов x_k вычисления упрощаются, если разложить функцию y в ряд по степеням отклонений аргументов от их приближенного значения (например, от их среднего).

Если ошибки имеются и в величинах x_i и в величинах y_i , причем величины x_i и y_i подчиняются законам нормального распределения, то в случае линейной зависимости

$$y = a_0 + a_1 x$$

оценка \tilde{a}_1 есть корень квадратного уравнения

$$\tilde{a}_1^2 + \frac{[s_1^2 - (n+1)s_2] \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} - [r_1^2 - (n+1)r_2]}{s_1 r_1 - (n+1)v_1} \tilde{a}_1 - \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} = 0,$$

а оценка \tilde{a}_0 находится по формуле

$$\tilde{a}_0 = \frac{r_1 - \tilde{a}_1 s_1}{n+1},$$

где σ_x^2 , σ_y^2 — дисперсии отдельных значений x_i и y_i ,

$$s_k = \sum_{i=0}^n x_i^k, \quad r_k = \sum_{i=0}^n y_i^k \quad (k = 1, 2), \quad v_1 = \sum_{i=0}^n x_i y_i.$$

Из двух корней квадратного уравнения выбираем один, исходя из конкретных условий задачи.

Решение типовых примеров

Пример 44.1. При исследовании влияния температуры t на ход хронометра ω получены результаты, приведенные в таблице 84.

Таблица 84

$t_i, ^\circ\text{C}$	5,0	9,6	16,0	19,6	24,4	29,8	34,4
ω_i	2,50	2,01	1,34	1,08	0,94	1,06	1,25

Считая справедливой зависимость

$$\tilde{\omega} = a_0 + a_1(t - 15) + a_2(t - 15)^2,$$

где $\tilde{\omega}$ — расчетные значения величины ω , определить оценки коэффициентов a_k и оценки средних квадратических отклонений: $\tilde{\sigma}$ — отдельного измерения и $\tilde{\sigma}_{a_k}$ — коэффициентов a_k ; установить доверительные интервалы для коэффициентов a_k и для среднего квадратического отклонения σ , характеризующего точность отдельного измерения, при доверительной вероятности $\alpha = 0,90$.

Решение. Составляем нормальные уравнения для нахождения коэффициентов a_k и $M_{k,k}$. Для уменьшения значений коэффициентов нормальных уравнений вводим переменную

$$x = \frac{t - 15}{15}$$

и ищем аппроксимирующую функцию

$$y = a'_0 + a'_1x + a'_2x^2.$$

Определяем коэффициенты нормальных уравнений s_k и v_k , выполняя вычисления в таблице 85.

Получаем:

$$s_0 = 7; \quad s_1 = 2,254; \quad s_2 = 3,712; \quad s_3 = 3,056; \quad s_4 = 4,122;$$

$$v_0 = 10,28; \quad v_1 = 1,215; \quad v_2 = 5,017.$$

Таблица 85

t	x_i^0	x_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	ω_i	$\omega_i x_i$	$\omega_i x_i^2$
0	1	-0,667	0,4449	-0,2967	0,1979	2,60	-1,7342	1,1567
1	1	-0,360	0,1296	-0,0467	0,0168	2,01	-0,7236	0,2605
2	1	0,067	0,0045	0,0003	0,0000	1,34	0,0898	0,0060
3	1	0,307	0,0942	0,0289	0,0089	1,08	0,3316	0,1017
4	1	0,627	0,3931	0,2465	0,1546	0,94	0,5894	0,3695
5	1	0,987	0,9742	0,9615	0,9490	1,06	1,0462	1,0327
6	1	1,293	1,6718	2,1617	2,7949	1,25	1,6162	2,0898
	$s_0=7$	$s_1=$ $=2,254$	$s_2=$ $=3,7123$	$s_3=$ $=3,0555$	$s_4=$ $=4,1221$	$v_0=$ $=10,28$	$v_1=$ $=1,2154$	$v_2=$ $=5,0169$

Система нормальных уравнений принимает вид

$$7\tilde{a}'_0 + 2,254\tilde{a}'_1 + 3,712\tilde{a}'_2 = v_0,$$

$$2,254\tilde{a}'_0 + 3,712\tilde{a}'_1 + 3,056\tilde{a}'_2 = v_1,$$

$$3,712\tilde{a}'_0 + 3,056\tilde{a}'_1 + 4,122\tilde{a}'_2 = v_2.$$

Решая эту систему уравнений методом исключения неизвестных и не подставляя числовых значений v_k , получим:

$$\tilde{a}'_0 = 0,2869v_0 + 0,0986v_1 - 0,3314v_2,$$

$$\tilde{a}'_1 = 0,0986v_0 + 0,7248v_1 - 0,6260v_2,$$

$$\tilde{a}'_2 = -0,3314v_0 - 0,6260v_1 + 1,0051v_2.$$

Подставляя значения v_k , найдем:

$$\tilde{a}'_0 = 1,404; \quad \tilde{a}'_1 = -1,246; \quad \tilde{a}'_2 = 0,8741.$$

Величины $M_{k,k}$ являются коэффициентами при v_k в каждом из полученных равенств для \tilde{a}'_k , т. е.

$$M_{0,0} = 0,2869; \quad M_{1,1} = 0,7248; \quad M_{2,2} = 1,0051.$$

Вычисляем значение S_{\min} , необходимое для нахождения оценок дисперсии отдельного измерения y_i и дисперсий коэффициентов \tilde{a}_k , сводя вычисления в таблицу 86.

Таблица 86

i	$a'_0 + a'_1 x_i$	$a'_2 x_i^2$	$\tilde{\omega}_i$	ϵ_i	ϵ_i^2
0	2,2352	0,3889	2,624	-0,024	0,000576
1	1,8527	0,1133	1,966	0,044	0,001936
2	1,3207	0,0039	1,325	0,015	0,000225
3	1,0217	0,0823	1,104	-0,024	0,000576
4	0,6230	0,3436	0,967	-0,027	0,000729
5	0,1745	0,8515	1,026	0,034	0,001156
6	-0,2067	1,4613	1,255	-0,005	0,000025
$S_{\min} = 0,005223$					

Получаем $S_{\min} = 0,005223$. Далее находим:

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{S_{\min}}{6-2} = 0,001306; \quad \tilde{\sigma} = 0,03614;$$

$$\tilde{\sigma}_{a_0}^2 = M_{0,0} \tilde{\sigma}^2 = 0,0003746; \quad \tilde{\sigma}_{a_1}^2 = 0,0009464; \quad \tilde{\sigma}_{a_2}^2 = 0,001312;$$

$$\tilde{\sigma}_{a_0} = 0,01936; \quad \tilde{\sigma}_{a_1} = 0,03076; \quad \tilde{\sigma}_{a_2} = 0,03623.$$

Возвращаясь к аргументу t , получим

$$\tilde{\omega} = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 (t - 15) + \tilde{a}_2 (t - 15)^2,$$

где

$$\tilde{a}_0 = \tilde{a}'_0 = 1,404; \quad \tilde{a}_1 = \frac{\tilde{a}'_1}{15} = -0,08306;$$

$$\tilde{a}_2 = \frac{\tilde{a}'_2}{15^2} = 0,003885.$$

и соответствующие оценки средних квадратических отклонений $\tilde{\sigma}_{a_k}$:

$$\tilde{\sigma}_{a_0} = \tilde{\sigma}'_{a_0} = 0,01936; \quad \tilde{\sigma}_{a_1} = \frac{\tilde{\sigma}'_{a_1}}{15} = 0,001291;$$

$$\tilde{\sigma}_{a_2} = \frac{\tilde{\sigma}'_{a_2}}{15^2} = 0,0001610.$$

Находим доверительные интервалы для коэффициентов a_k при доверительной вероятности $\alpha = 0,90$. Используя таблицу [16Т], по входным величинам α и числу степеней свободы $k = n - m = 4$ находим

$$\gamma = 2,132.$$

Доверительные интервалы для a_k :

$$\tilde{a}_k - \tilde{\gamma}\tilde{\sigma}_{a_k} < a_k < \tilde{a}_k + \tilde{\gamma}\tilde{\sigma}_{a_k},$$

принимают вид

$$1,363 < a_0 < 1,446,$$

$$0,08031 < a_1 < 0,08581,$$

$$0,003542 < a_2 < 0,004228.$$

Находим доверительный интервал для среднего квадратического отклонения σ , характеризующего точность отдельного измерения:

$$\gamma_1\tilde{\sigma} < \sigma < \gamma_2\tilde{\sigma},$$

где значения γ_1 и γ_2 определяются по таблице [19Т] при $k = 4$, $\alpha = 0,90$. Имеем: $\gamma_1 = 0,649$; $\gamma_2 = 2,37$, что дает

$$0,02345 < \sigma < 0,08565.$$

Аналогично решаются задачи 44.1—44.3, 44.5, 44.9, 44.10, 44.13.

Пример 44.2. Равноточные измерения некоторой величины y , отвечающие ряду значений аргумента x , привели к результатам, помещенным в таблице 87.

Таблица 87

x	y	x	y
0,0	1,300	1,5	0,037
0,3	1,245	1,8	-0,600
0,6	1,095	2,1	-1,295
0,9	0,855	2,4	-1,767
1,2	0,514	2,7	-1,914

Подобрать многочлен 5-й степени, приближенно представляющий зависимость y от x в интервале значений x [0; 2,7], используя ортогональные полиномы Чебышева; оценить точность отдельного измерения, характеризующего средним квадратическим отклонением σ , и найти оценки средних квадратических отклонений коэффициентов b_k при полиномах Чебышева $P_{k,n}(x)$.

и найти оценки средних квадратических отклонений коэффициентов b_k при полиномах Чебышева $P_{k,n}(x)$.

Решение. Переходим к аргументу $z = \frac{x}{0,3}$, чтобы сделать шаг аргумента равным единице. По формулам, приведенным во введении к данному параграфу, вычисляем величины S_k, c_k, b_k ($k = 0, 1, \dots, 5$). Табличные значения полиномов Чебышева берем из таблицы [30Г]. Вычисления выполнены в таблице 88.

Таблица 88

z	$P_{0,9}(z)$	$P_{1,9}(z)$	$P_{2,9}(z)$	$P_{3,9}(z)$	$P_{4,9}(z)$	$P_{5,9}(z)$
0	1	9	6	42	18	6
1	1	7	2	-14	-22	-14
2	1	5	-1	-35	-17	1
3	1	3	-3	-31	3	11
4	1	1	-4	-12	18	6
5	1	-1	-4	12	18	-6
6	1	-3	-3	31	3	-11
7	1	-5	-1	35	-17	-1
8	1	-7	2	14	-22	14
9	1	-9	6	-42	18	-6
	$S_0 = 10$	$S_1 = 330$	$S_2 = 132$	$S_3 = 8580$	$S_4 = 2860$	$S_5 = 780$

Вычисления на арифмометре (клавишной вычислительной машине) с накоплением результата дают:

$$\begin{aligned} S_0 &= 10, & S_1 &= 330, & S_2 &= 132, \\ S_3 &= 8580, & S_4 &= 2860, & S_5 &= 780, \\ c_0 &= -0,530, & c_1 &= 66,802, & c_2 &= -7,497, \\ c_3 &= -14,659, & c_4 &= 14,515, & c_5 &= -1,627. \end{aligned}$$

Для оценок коэффициентов b_k имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{b}_0 &= -0,530, & \tilde{b}_1 &= 0,20243, & \tilde{b}_2 &= -0,05680, \\ \tilde{b}_3 &= -0,00486, & \tilde{b}_4 &= 0,00508, & \tilde{b}_5 &= -0,00209. \end{aligned}$$

Напомним, что если при вычислениях используются табличные значения полиномов Чебышева, то формула для искомого многочлена 5-й степени имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{y} &= \tilde{b}_0 P_{0,9}(z) + \tilde{b}_1 P_{1,9}(z) + \tilde{b}_2 P_{2,9}(z) + \\ &+ \tilde{b}_3 P_{3,9}(z) + \tilde{b}_4 P_{4,9}(z) + \tilde{b}_5 P_{5,9}(z). \end{aligned}$$

Если же для вычисления полиномов Чебышева используются аналитические формулы, то найденные коэффициенты b_k следует заменить коэффициентами $b'_k = b_k P_{k,n}(0)$, где $P_{k,n}(0)$ — табличное значение $P_{k,n}(z)$ при $z = 0$.

Вычисляем оценку $\tilde{\sigma}^2$:

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{S_{\min}}{n-m}, \quad S_{\min} = \sum_{i=0}^n (\tilde{y}_i - y_i)^2,$$

причем для нахождения значений \tilde{y}_i используем табличные значения полиномов Чебышева из таблицы 88. Вычисление S_{\min} выполнено в таблице 89.

Таблица 89

x_i	z_i	y_i	\tilde{y}_i	ϵ_i	ϵ_i^2
0,0	0	1,300	1,310	-0,010	0,000100
0,3	1	1,245	1,236	0,009	0,000081
0,6	2	1,095	1,098	-0,003	0,000009
0,9	3	0,855	0,868	-0,013	0,000169
1,2	4	0,514	0,514	0,000	0,000000
1,5	5	0,037	0,017	0,020	0,000400
1,8	6	-0,600	-0,602	0,002	0,000004
2,1	7	-1,295	-1,263	-0,032	0,001024
2,4	8	-1,767	-1,793	0,026	0,000676
2,7	9	-1,914	-1,908	-0,006	0,000036
$S_{\min} = 0,002499$					

Получаем: $S_{\min} = 0,002499$, $\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{S_{\min}}{n-m}} = 0,02503$.

Далее по формуле

$$\tilde{\sigma}_{b_k} = \frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{S_k}}$$

находим:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{b_0} &= 0,007917; & \tilde{\sigma}_{b_1} &= 0,001378; & \tilde{\sigma}_{b_2} &= 0,002179; \\ \tilde{\sigma}_{b_3} &= 0,0002702; & \tilde{\sigma}_{b_4} &= 0,0004680; & \tilde{\sigma}_{b_5} &= 0,0008947. \end{aligned}$$

Аналогично решаются задачи 44.4, 44.6, 44.12.

Пример 44.3. Показания барометра-анероида A и ртутного барометра B при различной температуре t приведены в таблице 90.

Таблица 90

i	$t, ^\circ\text{C}$	$A, \text{мм}$	$B, \text{мм}$	i	$t, ^\circ\text{C}$	$A, \text{мм}$	$B, \text{мм}$
0	10,0	749,0	744,4	5	3,8	757,5	754,0
1	6,2	746,1	741,3	6	17,1	752,4	747,8
2	6,3	755,6	752,7	7	22,2	752,5	748,6
3	5,3	758,9	754,7	8	20,8	752,2	747,7
4	4,8	751,7	747,9	9	21,0	759,5	755,6

Считая, что зависимость величины B от t и A имеет вид

$$B = A + \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 (760 - A),$$

определить оценки коэффициентов α_k , построить доверительные интервалы для коэффициентов α_k и для среднего квадратического отклонения σ ошибок измерения B при доверительной вероятности $\alpha = 0,90$.

Решение. Обозначим для удобства $z_0 = 1$, $z_1 = t$, $z_2 = 760 - A$, $y = B - A$. Тогда искомая формула примет вид

$$y = \alpha_0 z_0 + \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2.$$

Исходные данные при этих обозначениях представлены в таблице 91.

Определяем значения $s_{kj} = \sum_{i=0}^n z_{ki} z_{ji}$ и $\beta_k = \sum_{i=0}^n y_i z_{ki}$ ($k, j = 0, 1, 2$):

$$\begin{aligned} s_{00} &= 10; & s_{01} &= s_{10} = 117,5; & s_{02} &= s_{20} = 63,6; & s_{11} &= 1902,6; \\ s_{12} &= s_{21} = 741,97; & s_{22} &= 577,22; & \beta_0 &= -41,7; \\ \beta_1 &= 494,87; & \beta_2 &= -276,75. \end{aligned}$$

Составляем систему нормальных уравнений, причем вместо β_k их числовые значения пока не подставляем:

$$\begin{aligned} 10\alpha_0 + 117,5\alpha_1 + 63,6\alpha_2 &= \beta_0, \\ 117,5\alpha_0 + 1902,59\alpha_1 + 741,97\alpha_2 &= \beta_1, \\ 63,6\alpha_0 + 741,97\alpha_1 + 577,22\alpha_2 &= \beta_2. \end{aligned}$$

Таблица 91

i	z_0	z_1	z_2	y	$\alpha_0 + \alpha_1 z_1$	$\alpha_2 z_2$	\tilde{y}	$ \varepsilon_i $	ε_i^2
0	1	10,0	11,0	-4,6	-3,725	-0,739	-4,46	0,14	0,0196
1	1	6,2	13,9	-4,8	-3,686	-0,934	-4,62	0,18	0,0324
2	1	6,3	3,4	-3,9	-3,687	-0,228	-3,92	0,02	0,0004
3	1	5,3	1,1	-4,2	-3,676	-0,074	-3,75	0,45	0,2025
4	1	4,8	8,3	-3,8	-3,671	-0,558	-4,23	0,43	0,1849
5	1	3,8	2,5	-3,5	-3,661	-0,168	-3,83	0,33	0,1089
6	1	17,1	7,6	-4,6	-3,799	-0,511	-4,31	0,29	0,0841
7	1	22,2	7,5	-3,9	-3,852	-0,504	-4,36	0,46	0,2116
8	1	20,8	7,8	-4,5	-3,838	-0,524	-4,36	0,14	0,0196
9	1	21,0	0,5	-3,9	-3,840	-0,034	-3,87	0,03	0,0009
								$S_{\min} = 0,8649$	

Решая эту систему уравнений методом исключения, получаем:

$$\alpha_0 = -0,6076\beta_0 + 0,02289\beta_1 - 0,03754\beta_2,$$

$$\alpha_1 = -0,02289\beta_0 + 0,001916\beta_1 + 0,0000591\beta_2,$$

$$\alpha_2 = -0,03754\beta_0 + 0,0000591\beta_1 + 0,005792\beta_2.$$

Подставляя в эти выражения числовые значения β_k , найдем α_k ; коэффициенты при β_k в выражении для α_k представляют собой значения $N_{k,k}$:

$$\alpha_0 = -3,621; \quad \alpha_1 = -0,01041; \quad \alpha_2 = -0,06719;$$

$$N_{0,0} = 0,6076; \quad N_{1,1} = 0,001916; \quad N_{2,2} = 0,005792.$$

Далее находим: $S_{\min} = 0,8649$ (см. табл. 91);

$$\tilde{\sigma}^2 = 0,12356; \quad \tilde{\sigma} = 0,3515;$$

$$\tilde{\sigma}_{\alpha_0}^2 = 0,07508; \quad \tilde{\sigma}_{\alpha_0} = 0,272;$$

$$\tilde{\sigma}_{\alpha_1}^2 = 0,0002368; \quad \tilde{\sigma}_{\alpha_1} = 0,0154;$$

$$\tilde{\sigma}_{\alpha_2}^2 = 0,0007156; \quad \tilde{\sigma}_{\alpha_2} = 0,0268.$$

Строим доверительные интервалы для коэффициентов α_k и для среднего квадратического отклонения σ , характеризующего точность отдельного измерения, используя распределение

Стьюдента (для a_k — таблица [16Т]) и χ^2 -распределение (для σ — таблица [19Т]).

Число степеней свободы $k = n - m = 7$, доверительная вероятность $\alpha = 0,90$.

Находим: $\gamma = 1,897$, $\gamma_1 = 0,705$, $\gamma_2 = 1,797$.

Доверительные интервалы для a_k :

$$\tilde{a}_k - \tilde{\gamma}\tilde{\sigma}_{a_k} < a_k < \tilde{a}_k + \tilde{\gamma}\tilde{\sigma}_{a_k},$$

принимают вид:

$$\begin{aligned} -4,141 < a_0 < -3,101, \\ -0,0396 < a_1 < 0,0188, \\ -0,1180 < a_2 < 0,0164, \end{aligned}$$

а для среднего квадратического отклонения σ

$$\gamma_1\tilde{\sigma} < \sigma < \gamma_2\tilde{\sigma}$$

или

$$0,2478 < \sigma < 0,6316.$$

Пример 44.4. В таблице 92 приведены значения x_i , y_i и «веса» p_i^2 , характеризующие точность измерения y_i при данном значении x_i .

Таблица 92

i	x_i	y_i	p_i^2	i	x_i	y_i	p_i^2
0	1,5	6,20	0,5	5	-0,5	4,55	1,0
1	1,1	3,45	1,0	6	-1,0	8,85	1,0
2	0,7	2,00	1,0	7	-1,5	15,70	0,5
3	0,3	1,80	1,0	8	-2,0	24,40	0,25
4	-0,1	2,40	1,0				

Считая, что зависимость y от x представляется многочленом второй степени вида

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2,$$

найти оценки дисперсий отдельных измерений y_i и дисперсий коэффициентов a_k ($k = 0, 1, 2$). Построить доверительные границы для неизвестной истинной зависимости $y = F(x)$ при доверительной вероятности $\alpha = 0,90$.

Решение. Вычисляем величины s'_k и v'_k для системы нормальных уравнений с учетом «веса» каждого измерения, выполняя вычисления в таблице 93.

Таблица 93

i	p_i^2	x_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	y_i	$y_i x_i$	$y_i x_i^2$
0	0,50	1,5	2,25	3,375	5,0625	6,20	9,300	13,950
1	1,00	1,1	1,21	1,331	1,4641	3,45	3,795	4,174
2	1,00	0,7	0,49	0,343	0,2401	2,00	1,400	0,980
3	1,00	0,3	0,09	0,027	0,0081	1,80	0,540	0,162
4	1,00	-0,1	0,01	-0,001	0,0001	2,40	-0,240	0,024
5	1,00	-0,5	0,25	-0,125	0,0625	4,55	-2,275	1,138
6	1,00	-1,0	1,00	-1,000	1,0000	8,85	-8,850	8,850
7	0,50	-1,5	2,25	-3,375	5,0625	15,70	-23,550	35,325
8	0,25	-2,0	4,00	-8,000	16,0000	24,40	-48,800	97,600

Получаем:

$$\begin{aligned} s'_0 &= 7,250; & s'_1 &= 0; & s'_2 &= 6,300; \\ s'_3 &= -1,425; & s'_4 &= 11,837; \\ v'_0 &= 40,100; & v'_1 &= -24,955; & v'_2 &= 64,366. \end{aligned}$$

Составляем систему нормальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} 7,250a_0 + 0 &+ 6,300a_2 = 40,100, \\ 0 &+ 6,300a_1 - 1,425a_2 = -24,955, \\ 6,300a_0 - 1,425a_1 + 11,837a_2 &= 64,366. \end{aligned} \right\}$$

Находим числовые значения определителя системы Δ и алгебраических дополнений δ_{kj} элементов $a_{kj} = s'_{k+j}$ этого определителя:

$$\begin{aligned} \Delta &= 275,87; & \delta_{00} &= 72,54; & \delta_{11} &= 46,12; & \delta_{22} &= 45,68; \\ \delta_{01} = \delta_{10} &= -8,98; & \delta_{02} = \delta_{20} &= -39,69; & \delta_{12} = \delta_{21} &= 10,33. \end{aligned}$$

Вычисляем оценки коэффициентов a_k :

$$\tilde{a}_k = \frac{\delta_{k0}v'_0 + \delta_{k1}v'_1 + \delta_{k2}v'_2}{\Delta},$$

получаем

$$\tilde{a}_0 = 2,096; \quad \tilde{a}_1 = -3,068; \quad \tilde{a}_2 = 3,955.$$

Находим S_{mln} , выполняя вычисления в таблице 94:

$$S_{\text{mln}} = \sum_{i=0}^8 p_i^2 [y_i - \tilde{a}_0 - \tilde{a}_1 x_i - \tilde{a}_2 x_i^2] = 0,2208.$$

Таблица 94

i	y_i	$\tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 x_i$	$\tilde{a}_2 x_i^2$	\tilde{y}_i	ϵ_i	ϵ_i^2
0	6,20	-2,5044	8,8945	6,390	-0,190	0,0361
1	3,45	-1,2775	4,7833	3,506	-0,056	0,0031
2	2,00	-0,0507	1,9370	1,886	0,114	0,0130
3	1,80	1,1762	0,3558	1,532	0,268	0,0718
4	2,40	2,4030	0,0395	2,442	-0,042	0,0018
5	4,55	3,6298	0,9883	4,618	-0,068	0,0046
6	8,85	5,1634	3,9531	9,116	-0,266	0,0708
7	15,70	6,6970	8,8945	15,592	0,108	0,0117
8	24,40	8,2305	15,8124	24,043	0,357	0,1274
$S_{\text{mln}} = 0,2208$						

Вычисляем оценки дисперсий отдельных измерений $\tilde{\sigma}_i^2$ по формуле

$$\tilde{\sigma}_i^2 = \frac{S_{\text{mln}}}{n-m} \frac{1}{p_i^2};$$

получаем:

$$\tilde{\sigma}_0^2 = \tilde{\sigma}_7^2 = 0,0368 \cdot \frac{1}{0,5} = 0,0736;$$

$$\tilde{\sigma}_1^2 = \tilde{\sigma}_2^2 = \tilde{\sigma}_3^2 = \tilde{\sigma}_4^2 = \tilde{\sigma}_5^2 = \tilde{\sigma}_6^2 = 0,0368;$$

$$\tilde{\sigma}_8^2 = 0,1472.$$

Оценки дисперсий коэффициентов a_k и их корреляционных моментов находятся по формулам

$$\tilde{\sigma}_{a_k}^2 = \frac{S_{\text{mln}}}{n-m} \frac{\delta_{kk}}{\Delta}, \quad \tilde{K}_{a_k, a_j} = \frac{S_{\text{mln}}}{n-m} \frac{\delta_{kj}}{\Delta}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{a_0}^2 &= 0,009336; & \tilde{\sigma}_{a_1}^2 &= 0,005936; & \tilde{\sigma}_{a_2}^2 &= 0,005879; \\ \tilde{K}_{a_0, a_1} &= -0,001156; & \tilde{K}_{a_0, a_2} &= -0,005108; & \tilde{K}_{a_1, a_2} &= 0,001329. \end{aligned}$$

Вычисляем оценку дисперсии $\tilde{\sigma}_y^2(x)$ величины \tilde{y} по формуле

$$\tilde{\sigma}_y^2(x) = \tilde{\sigma}_{a_0}^2 + \tilde{\sigma}_{a_1}^2 x^2 + \tilde{\sigma}_{a_2}^2 x^4 + 2\tilde{K}_{a_0, a_1} x + 2\tilde{K}_{a_0, a_2} x^2 + 2\tilde{K}_{a_1, a_2} x^3$$

или

$$\tilde{\sigma}_y^2(x) = 10^{-5}(933,6 - 231,2x - 428,0x^2 + 265,8x^3 + 587,9x^4).$$

Значения $\tilde{\sigma}_y^2(x_i)$ для всех x_i вычислены в таблице 95.

Таблица 95

i	x_i	$933,6 - 231,2x_i$	$-428,0x_i^2$	$265,8x_i^3$	$587,9x_i^4$	$\tilde{\sigma}_y^2(x_i)$	$\tilde{\sigma}_y(x_i)$	\tilde{y}_i	$\tilde{y}_i - \tilde{\sigma}_y(x_i)$	$\tilde{y}_i + \tilde{\sigma}_y(x_i)$
0	1,5	586,8	-963,0	897,1	2976,2	0,03497	0,187	6,390	6,023	6,753
1	1,1	679,3	-517,9	353,8	860,7	0,01375	0,117	3,506	3,279	3,733
2	0,7	771,8	-209,7	91,2	141,2	0,00794	0,088	1,886	1,715	2,057
3	0,3	864,2	-38,5	7,8	4,8	0,00838	0,092	1,532	1,353	1,711
4	-0,1	956,7	-4,3	0,3	0,1	0,00953	0,098	2,442	2,252	2,632
5	-0,5	1049,2	-107,0	33,2	36,7	0,01012	0,101	4,618	4,422	4,814
6	-1,0	1164,8	-428,0	265,8	587,9	0,01590	0,126	9,116	8,871	9,361
7	-1,5	1280,4	-963,0	897,1	2976,2	0,04197	0,205	15,592	15,194	15,990
8	-2,0	1396,0	-1712,0	2126,4	9406,4	0,11217	0,335	24,043	23,392	24,694

Строим доверительные границы для неизвестной истинной зависимости $y = F(x)$:

$$\tilde{y}_i - \tilde{\gamma}\tilde{\sigma}_y(x_i) < y < \tilde{y}_i + \tilde{\gamma}\tilde{\sigma}_y(x_i),$$

где $\tilde{\gamma}$ определяется из таблицы [16Т] по входным величинам $\alpha = 0,90$ и числу степеней свободы $k = n - m = 6$:

$$\tilde{\gamma} = 1,943.$$

Доверительные границы для y вычислены в таблице 95.

Аналогично решаются задачи 44.7, 44.8, 44.11.

Пример 44.5. Электрическое сопротивление молибдена ρ в зависимости от температуры T °К характеризуется данными таблицы 96.

Считая справедливой линейную зависимость вида

$$\rho = a_0 + a_1 T,$$

определить коэффициенты a_0 и a_1 по способу наименьших квадратов. Ошибки измерения ρ и T характеризуются соответственно средними квадратическими отклонениями $\sigma_\rho = 0,8$ и $\sigma_T = 15^\circ$. Найти наибольшее отклонение расчетной величины ρ от опытной.

Таблица 96

$T, ^\circ\text{K}$	$\rho,$ мкОм·см	$T, ^\circ\text{K}$	$\rho,$ мкОм·см
2289	61,97	1489	37,72
2132	57,32	1286	32,09
1988	52,70	1178	28,94
1830	47,92		

Решение. Вычисляем величины s_k, r_k ($k = 1, 2$), v_1 , выполняя вычисления в таблице 97.

Таблица 97

i	T_i	$T_i^2 \cdot 10^{-2}$	ρ_i	ρ_i^2	$T_i \rho_i \cdot 10^{-1}$	$\tilde{\rho}_i$	ϵ_i
0	2289	52 395	61,97	3840,3	14 185	61,82	0,15
1	2132	45 454	57,32	3285,6	12 221	57,15	0,17
2	1988	39 521	52,70	2777,3	10 477	52,86	-0,16
3	1830	33 489	47,92	2296,3	8 769	48,15	-0,23
4	1489	22 171	37,72	1422,8	5 617	38,00	-0,28
5	1286	16 538	32,09	1029,8	4 127	31,95	0,14
6	1178	13 877	28,94	837,5	3 409	28,73	0,21
	$s_1 =$ =12 192	$s_2 =$ =22 344 · 10 ³	$r_1 =$ =318,66	$r_2 =$ =15 490	$v_1 =$ =58 805 · 10		

Получаем:

$$s_1 = 12192; \quad s_2 = 22344 \cdot 10^3;$$

$$r_1 = 318,66; \quad r_2 = 15490;$$

$$v_1 = 58805 \cdot 10.$$

Составляем квадратное уравнение для отыскания коэффициента \tilde{a}_1 :

$$\tilde{a}_1^2 + \frac{[s_1^2 - (n+1)s_2] \frac{\sigma_0^2}{\sigma_T^2} - [r_1^2 - (n+1)r_2]}{s_1 r_1 - (n+1)v_1} \tilde{a}_1 - \frac{\sigma_0^2}{\sigma_T^2} = 0,$$

которое после подстановки числовых значений принимает вид

$$\tilde{a}_1^2 + 0,065708\tilde{a}_1 - 0,0028444 = 0.$$

Решая это уравнение, находим два значения \tilde{a}_1 :

$$\tilde{a}_{11} = 0,029786; \quad \tilde{a}_{12} = -0,095494.$$

Очевидно, что корень \tilde{a}_{12} не годится, так как он отрицателен, а из данных таблицы 97 легко заключить, что при возрастании T величина ρ возрастает. Следовательно,

$$\tilde{a}_1 = 0,029786.$$

Определяем коэффициент \tilde{a}_0 по формуле

$$\tilde{a}_0 = \frac{r_1 - \tilde{a}_1 s_1}{n+1} = -6,356.$$

Вычисляем в таблице 97 значения ϵ_i :

$$\epsilon_i = \rho_i - \tilde{\rho}_i.$$

где $\tilde{\rho}$ — расчетные значения величины

$$\tilde{\rho} = -6,3558 + 0,029786T.$$

На основании данных таблицы 97 находим, что $|\epsilon_{\max}| = 0,28$. Аналогично решается задача 44.15.

Задачи

44.1. Результаты равнооточных измерений глубины h проникновения тела в преграду при различных значениях его удельной энергии E (энергии, приходящейся на единицу площади соударения) приведены в таблице 98.

Подобрать линейную зависимость вида

$$h = a_0 + a_1 E,$$

определить оценки $\tilde{\sigma}_{a_k}^2$ дисперсий коэффициентов a_k и оценку $\tilde{\sigma}^2$ дисперсии, характеризующей точность отдельного измерения.

Таблица 98

i	E_i	h_i	i	E_i	h_i	i	E_i	h_i
0	41	4	5	139	20	9	241	30
1	50	8	6	154	19	10	250	31
2	81	10	7	180	23	11	269	36
3	104	14	8	208	26	12	301	37
4	120	16						

44.2. Решить предыдущую задачу, перенеся для упрощения вычислений начало отсчета аргумента E в точку, равную среднему арифметическому значению величин E , и начало отсчета величин h в точку, близкую к математическому ожиданию h .

44.3. Высота h падения тела за время t определяется формулой

$$h = a_0 + a_1 t + a_2 t^2,$$

где a_0 — путь, пройденный телом к моменту начала отсчета времени, a_1 — скорость тела в момент начала отсчета времени, a_2 — половина ускорения силы тяжести g .

Определить оценки коэффициентов a_0 , a_1 , a_2 и оценить точность определения ускорения силы тяжести указанным методом на основании серии равнооточных измерений, результаты которых приведены в таблице 99.

Таблица 99

t , сек.	h , см	t , сек.	h , см	t , сек.	h , см	t , сек.	h , см	t , сек.	h , см
$\frac{1}{30}$	11,86	$\frac{4}{30}$	26,69	$\frac{7}{30}$	51,13	$\frac{10}{30}$	85,44	$\frac{13}{30}$	129,54
$\frac{2}{30}$	15,67	$\frac{5}{30}$	33,71	$\frac{8}{30}$	61,49	$\frac{11}{30}$	99,08	$\frac{14}{30}$	146,48
$\frac{3}{30}$	20,60	$\frac{6}{30}$	41,93	$\frac{9}{30}$	72,90	$\frac{12}{30}$	113,77		

44.4. Решить предыдущую задачу, используя ортогональные полиномы Чебышева.

44.5. Равноточные измерения некоторой величины y через равные интервалы аргумента x дали результаты, приведенные в таблице 100.

Таблица 100

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-0,71	-0,01	0,51	0,82	0,88	0,81	0,49

Считая, что y достаточно точно аппроксимируется многочленом второй степени

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2,$$

определить оценки коэффициентов \tilde{a}_k , дисперсии отдельного измерения $\tilde{\sigma}^2$ и дисперсий $\tilde{\sigma}_{a_k}^2$ коэффициентов \tilde{a}_k .

44.6. Величина износа резца y , определяемая его толщиной (в миллиметрах), в зависимости от времени работы t (в часах) представлена в таблице 101.

Таблица 101

t	y	t	y	t	y
0	30,0	6	27,5	12	26,1
1	29,1	7	27,2	13	25,7
2	28,4	8	27,0	14	25,3
3	28,1	9	26,8	15	24,8
4	28,0	10	26,5	16	24,0
5	27,7	11	26,3		

Подобрать с помощью ортогональных полиномов Чебышева зависимость y от t в виде многочленов первой и третьей степеней. Считая справедливой полученную зависимость, оценить в обоих случаях величину дисперсии отдельного измерения и построить доверительные интервалы для среднего квадратического отклонения σ при доверительной вероятности $\alpha = 0,90$.

44.7. Величины сжатия x_i стального бруса под действием нагрузки y_i , а также значения дисперсий σ_i^2 , характеризующих точность измерения y_i , приведены в таблице 102.

Т а б л и ц а 102

i	0	1	2	3	4
x_i , мм	5	10	20	40	60
y_i , кг	51,33	78,00	144,3	263,6	375,2
σ_i^2	82,3	25,0	49,3	51,3	46,7

Найти линейную зависимость

$$y = a_0 + a_1 x,$$

отвечающую закону Гука; построить доверительные интервалы для коэффициентов a_k ($k = 0, 1$), а также доверительные границы для неизвестного истинного значения нагрузки при x от 5 мм до 60 мм при доверительной вероятности $\alpha = 0,90$.

«Весы» измерений, отвечающих каждому значению сжатия x_i , принять обратно пропорциональными величинам σ_i^2 .

44.8. В таблице 103 приведены средние значения y_i , отвечающие значениям аргумента x_i , а также числа n_i измерений величины y при $x = x_i$.

Построить аппроксимирующий многочлен второй степени и определить оценки средних квадратических отклонений $\tilde{\sigma}_{a_k}$ коэффициентов \tilde{a}_k .

Т а б л и ц а 103

i	x_i	y_i	n_i	i	x_i	y_i	n_i
0	1	0,10	21	3	4	0,32	11
1	2	0,19	8	4	5	0,39	11
2	3	0,24	13	5	6	0,48	10

44.9. Себестоимость y (в рублях) одного экземпляра книги в зависимости от тиража x (тысячи экземпляров) характеризуется данными, собранными издательством в течение ряда лет (табл. 104). Подобрать коэффициенты для гиперболической зависимости вида

$$y = a_0 + \frac{a_1}{x}$$

Таблица 104

x	y	x	y	x	y
1	10,15	10	2,11	100	1,21
2	5,52	20	1,62	200	1,15
3	4,08	30	1,41		
5	2,85	50	1,30		

и построить доверительные интервалы для коэффициентов a_k ($k = 0, 1$), а также для величины y при различных значениях x_i при доверительной вероятности $\alpha = 0,90$.

44.10. Конденсатор заряжен до напряжения U_0 , отвечающего моменту начала отсчета времени, после чего он разряжается через некоторое сопротивление. Напряжение U измеряется с округлением до 5 в в различные моменты времени. Результаты измерений приведены в таблице 105.

Таблица 105

i	t_i , сек.	U_i , в	i	t_i , сек.	U_i , в	i	t_i , сек.	U_i , в
0	0	100	4	4	30	8	8	10
1	1	75	5	5	20	9	9	5
2	2	55	6	6	15	10	10	5
3	3	40	7	7	10			

Известно, что зависимость U от t имеет вид

$$U = U_0 e^{-at}.$$

Выбрать коэффициенты U_0 и a , составить доверительные интервалы для U_0 и a при доверительной вероятности $\alpha = 0,90$.

44.11. В результате продувок в аэродинамической трубе для модели самолета были получены данные (табл. 106) о зависимости угла отклонения руля высоты δ_v , обеспечивающего прямолинейный горизонтальный полет, от скорости воздушного потока v :

$$\delta_v = a_0 + \frac{a_1}{v^2}.$$

Найти оценки коэффициентов a_0 и a_1 и их средних квадратических отклонений.

Таблица 106

i	v_i , м/сек	δ_{vi}	n_i	i	v_i , м/сек	δ_{vi}	n_i
0	80	$-3^\circ 44'$	8	5	140	$-0^\circ 38'$	6
1	90	$-2^\circ 58'$	12	6	160	$-0^\circ 07'$	9
2	100	$-2^\circ 16'$	11	7	180	$0^\circ 10'$	12
3	110	$-1^\circ 39'$	9	8	200	$0^\circ 35'$	10
4	120	$-1^\circ 21'$	14				

Через n_i в таблице обозначены числа измерений при данном значении скорости v_i .

44.12. Результаты измерения размера x партии деталей разбиты на интервалы, и для них вычислены частоты p_i^* , которые приведены в таблице 107.

Таблица 107

Границы интервала x_i	p_i^*	Границы интервала x_i	p_i^*	Границы интервала x_i	p_i^*
50 ÷ 60	0,00333	100 ÷ 110	0,18667	140 ÷ 150	0,06333
60 ÷ 70	0,00667	110 ÷ 120	0,20333	150 ÷ 160	0,05333
70 ÷ 80	0,03000	120 ÷ 130	0,16333	160 ÷ 170	0,01333
80 ÷ 90	0,07667	130 ÷ 140	0,08333	170 ÷ 180	0,00667
90 ÷ 100	0,11000				

Считая, что значения p_i^* относятся к серединам интервалов x_i , подобрать по способу наименьших квадратов параметры для зависимости

$$p = p_0 e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}},$$

аппроксимирующей опытное распределение, применив ортогональные полиномы Чебышева. Проверить, соответствует ли полученная зависимость закону нормального распределения величины x , т. е. выполняется ли равенство

$$p_0 = \frac{10}{\sqrt{2\pi}\sigma}.$$

44.13. В таблице 108 приведены измеренные значения некоторой величины y в зависимости от времени t (сутки).

Считая, что

$$y = a \sin(\omega t - \varphi), \quad \text{где } \omega = 360 \frac{\text{град.}}{\text{сутки}},$$

определить оценки параметров a и φ . Найти наибольшее отклонение измеренной величины y от аппроксимирующей функции \tilde{y} .

Т а б л и ц а 108

t	y	t	y	t	y
0,00	-25	0,35	26	0,70	-16
0,05	-26	0,40	32	0,75	3
0,10	-4	0,45	40	0,80	-21
0,15	7	0,50	32	0,85	-22
0,20	6	0,55	21	0,90	-29
0,25	13	0,60	11	0,95	-32
0,30	-30	0,65	-5		

Указание. Предварительно выбрать приближенное значение φ' и представить y в виде

$$y = a \sin \theta + b \cos \theta,$$

где

$$\theta = \omega t - \varphi',$$

$$b = -a(\varphi - \varphi').$$

44.14. В результате опыта получены следующие значения функции $y = f(x)$ с периодом 2π (табл. 109).

Найти представление этой функции многочленом

$$\tilde{y} = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 \cos x + \tilde{b}_1 \sin x + \tilde{a}_2 \cos 2x + \tilde{b}_2 \sin 2x$$

и наибольшее отклонение измеренной величины y от аппроксимирующей функции \tilde{y} .

Таблица 109

x_i град	y_i	x_i град	y_i	x_i град	y_i	x_i град	y_i
15	1,31	105	2,12	195	2,89	285	-2,30
30	1,84	120	2,38	210	2,01	300	-2,22
45	2,33	135	2,98	225	0,92	315	-1,57
60	2,21	150	3,44	240	-0,24	330	-1,03
75	2,24	165	3,51	255	-1,23	345	-0,01
90	2,39	180	3,33	270	-1,98	360	-0,82

44.15. В таблице 110 приведены уровни x и y воды в реке в пунктах A и B соответственно (пункт B на 50 км ниже по течению пункта A), замеренные в 12.00 в первые 15 дней апреля.

Таблица 110

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$x_i, м$	12,1	11,2	9,8	10,4	9,2	8,5	8,8	7,4	6,6	7,0	6,4	6,0	6,5	5,8	5,4
$y_i, м$	10,5	9,3	8,3	9,6	8,6	7,1	6,9	5,8	5,2	5,0	5,1	4,6	5,0	4,4	3,9

Считая справедливой зависимость

$$y = a_0 + a_1 x,$$

определить оценки коэффициентов \tilde{a}_0 и \tilde{a}_1 и наибольшее отклонение y_i от расчетных значений \tilde{y}_i , если известно, что ошибки измерения величин x и y характеризуются средним квадратическим отклонением $\sigma_x = \sigma_y = 0,5 м$.

§ 45. Статистические методы контроля качества

Статистический контроль позволяет установить качество продукции путем испытания части изделий с гарантируемыми вероятностями α забраковать хорошую партию («риск поставщика») и β принять негодную партию («риск потребителя»).

Партия считается хорошей, если параметр, характеризующий качество партии, не превзойдет некоторого граничного

значения, и негодной, если этот параметр имеет значение не ниже некоторого другого граничного значения. Параметром, характеризующим качество партии, может быть или число l дефектных изделий в партии (границы l_0 и $l_1 > l_0$), или среднее значение ξ или λ параметра в партии (границы ξ_0 и $\xi_1 > \xi_0$ или λ_0 и $\lambda_1 > \lambda_0$), или (при контроле однородности продукции) дисперсия параметра в партии (границы σ_0^2 и $\sigma_1^2 > \sigma_0^2$); в том случае, когда качество партии улучшается с ростом значения параметра, соответствующие неравенства должны быть заменены на противоположные.

По методу контроля различают метод однократной выборки, метод двукратной выборки и метод последовательного анализа. Определение объема выборки и признаков для приемки или браковки продукции по заданным величинам α и β называется составлением плана контроля.

При однократной выборке определяются объем выборки n_0 и приемное число v ; если в выборке значение контролируемого параметра $\leq v$, то партия принимается; если $> v$ — бракуется.

Если контролируется число (доля) дефектных изделий в выборке объема n_0 , общее число дефектных изделий в партии L , а объем партии N , то

$$\alpha = P(M > v | L = l_0) = 1 - \sum_{m=0}^v \frac{C_{l_0}^m C_{N-l_0}^{n_0-m}}{C_N^{n_0}},$$

$$\beta = P(M \leq v | L = l_1) = \sum_{m=0}^v \frac{C_{l_1}^m C_{N-l_1}^{n_0-m}}{C_N^{n_0}},$$

где значения C_n^m могут быть взяты из таблицы [1Т] или вычислены с помощью таблицы [2Т].

При $n_0 \leq 0,1N$ возможен приближенный переход к биномиальному закону распределения

$$\alpha = 1 - \sum_{m=0}^v C_{n_0}^m p_0^m (1-p_0)^{n_0-m} = 1 - P(p_0, n_0, v),$$

$$\beta = \sum_{m=0}^v C_{n_0}^m p_1^m (1-p_1)^{n_0-m} = P(p_1, n_0, v).$$

где $p_0 = \frac{l_0}{N}$, $p_1 = \frac{l_1}{N}$, а значения $P(p, n, d)$ могут быть взяты из таблицы [4Т] или вычислены с помощью таблиц [2Т] и [3Т].

Если, кроме того, $p_0 < 0,1$, $p_1 < 0,1$, то, положив $a_0 = n_0 p_0$, $a_1 = n_0 p_1$ (переходя к закону распределения Пуассона), получим

$$\alpha = \sum_{m=v+1}^{\infty} \frac{a_0^m}{m!} e^{-a_0} = 1 - P(\chi^2 \geq \chi_{q_0}^2),$$

$$\beta = 1 - \sum_{m=v+1}^{\infty} \frac{a_1^m}{m!} e^{-a_1} = P(\chi^2 \geq \chi_{q_1}^2),$$

где $\chi_{q_0}^2 = 2a_0$, $\chi_{q_1}^2 = 2a_1$, $\sum_{m=v+1}^{\infty} \frac{a^m}{m!} e^{-a}$ даны в таблице [7Т].

а вероятности $P(\chi^2 > \chi_q^2)$ могут быть получены из таблицы [17Т] при числе степеней свободы $k = 2(v+1)$.

Если $50 \leq n_0 \leq 0,1N$, $n_0 p_0 \geq 4$, то можно пользоваться еще более удобными приближенными формулами:

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Phi \left(\frac{v - n_0 p_0 + 0,5}{\sqrt{n_0 p_0 (1 - p_0)}} \right),$$

$$\beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Phi \left(\frac{n_0 p_1 - v - 0,5}{\sqrt{n_0 p_1 (1 - p_1)}} \right),$$

где $\Phi(z)$ — функция Лапласа (см. таблицу [8Т]).

Если контролируется среднее значение $\tilde{x} = \frac{1}{n_0} \sum_{i=1}^n x_i$ па-

раметра в выборке, а значение параметра одного изделия x_i подчиняется нормальному закону распределения с известной дисперсией σ^2 , то

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Phi \left(\frac{v - \xi_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_0}}} \right), \quad \beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Phi \left(\frac{\xi_1 - v}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_0}}} \right).$$

При $\xi_0 > \xi_1$ партия принимается, если $\tilde{x} \geq v$; бракуется, если $\tilde{x} < v$, а в формулах для α и β знак минус перед вторым членом заменяется на плюс.

Если контролируемый параметр имеет плотность вероятности

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x},$$

то

$$\alpha = 1 - \mathbf{P}(\chi^2 \geq \chi_{q_0}^2),$$

$$\beta = \mathbf{P}(\chi^2 \geq \chi_{q_1}^2),$$

где $\chi_{q_0}^2 = 2n_0\lambda_0v$, $\chi_{q_1}^2 = 2n_0\lambda_1v$, а вероятность $\mathbf{P}(\chi^2 \geq \chi_q^2)$ определяется по таблице [17Т] при $k = 2n_0$ степенях свободы. Если $n_0 > 15$, то приближенно

$$\mathbf{P}(\chi^2 \geq \chi_q^2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{\chi_q^2 - 2n_0}{2\sqrt{n_0}}\right).$$

Если контролируется однородность продукции, а параметр, характеризующий качество изделия, нормален, то

$$\alpha = 1 - \mathbf{P}(\tilde{\sigma} \leq q_0\sigma_0), \quad \beta = \mathbf{P}(\tilde{\sigma} \leq q_1\sigma_1),$$

где $q_0 = \frac{v}{\sigma_0}$, $q_1 = \frac{v}{\sigma_1}$, $\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n_0} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$, если математическое ожидание \bar{x} параметра известно, или

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n_0 - 1} \sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{1}{n_0} \sum_{j=1}^n x_j\right)^2,$$

если \bar{x} неизвестно, а вероятности $\mathbf{P}(\tilde{\sigma} \leq q\sigma)$ вычисляются по таблице [22Т] при $k = n_0$ степенях свободы, если \bar{x} известно, и при $k = n_0 - 1$, если \bar{x} неизвестно.

При двукратной выборке определяются объемы первой n_1 и второй n_2 выборок и приемочные числа v_1, v_2, v_3 (обычно $v_1 < \frac{n_1}{n_1 + n_2} v_3 < v_2$). Если в первой выборке контролируемый параметр $\leq v_1$, то партия принимается; если контролируемый параметр $> v_2$, то партия бракуется; в остальных случаях берется вторая выборка. Если определенное по выборке объема $(n_1 + n_2)$ значение контролируемого параметра $\leq v_3$, то партия принимается, в противном случае — бракуется.

Если контролируется число дефектных изделий в выборке, то

$$\alpha = 1 - \sum_{m_1=0}^{v_2} \frac{C_{l_0}^{m_1} C_{N-l_0}^{n_1-m_1}}{C_N^{n_1}} +$$

$$+ \sum_{m_1=v_1+1}^{v_2} \left[\frac{C_{l_0}^{m_1} C_{N-l_0}^{n_1-m_1}}{G_N^{n_1}} \left(1 - \sum_{m_2=0}^{v_3-m_1} \frac{C_{l_0-m_1}^{m_2} C_{N-l_0-n_1+m_1}^{n_2-m_2}}{C_{N-n_1}^{n_2}} \right) \right],$$

$$\beta = \sum_{m_1=0}^{v_1} \frac{C_{l_1}^{m_1} C_{N-l_1}^{n_1-m_1}}{C_N^{n_1}} +$$

$$+ \sum_{m_1=v_1+1}^{v_2} \left[\frac{C_{l_1}^{m_1} C_{N-l_1}^{n_1-m_1}}{C_N^{n_1}} \sum_{m_2=0}^{v_3-m_1} \frac{C_{l_1-m_1}^{m_2} G_{N-l_1-n_1+m_1}^{n_2-m_2}}{C_{N-n_1}^{n_2}} \right].$$

Так же, как при однократной выборке, при наличии определенных соотношений между числами n_1 , n_2 , N , l_0 , l_1 возможен приближенный переход от гипергеометрического закона распределения к биномиальному, нормальному или закону распределения Пуассона.

Если контролируется среднее значение \tilde{x} параметра в выборке, то при нормальном законе распределения параметра одного изделия с заданной дисперсией σ^2 в частном случае, когда $n_1 = n_2 = n$, $v_1 = v_3 = v$, $v_2 = \infty$, будет

$$\alpha = 1 - p_1 - 0,5(p_2 - p_1^2), \quad \beta = p_3 + 0,5(p_4 - p_3^2),$$

где

$$p_1 = 0,5 + 0,5\Phi\left(\frac{v - \xi_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right), \quad p_2 = 0,5 + 0,5\Phi\left(\frac{v - \xi_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}}\right),$$

$$p_3 = 0,5 + 0,5\Phi\left(\frac{v - \xi_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right), \quad p_4 = 0,5 + 0,5\Phi\left(\frac{v - \xi_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}}\right).$$

При $\xi_0 > \xi_1$ знаки неравенств в условиях приемки и браковки заменяются на противоположные, а в формулах для p_1 , p_2 , p_3 , p_4 знак плюс перед вторым членом — на минус.

Если контролируется \tilde{x} , а плотность вероятности параметра X для одного изделия показательная: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $n_1 = n_2 = n$, $v_1 = v_3 = v$, $v_2 = \infty$, то

$$\alpha = 1 - p_1 - 0,5(p_2 - p_1^2), \quad \beta = p_3 + 0,5(p_4 - p_3^2),$$

где

$$p_1 = 1 - P(\chi^2 \geq \chi_{q_0}^2), \quad p_2 = 1 - P(\chi^2 \geq \chi_{q_0}^2), \\ p_3 = 1 - P(\chi^2 \geq \chi_{q_1}^2), \quad p_4 = 1 - P(\chi^2 \geq \chi_{q_1}^2),$$

$\chi_{q_0}^2 = 2n\lambda_0 v$, $\chi_{q_1}^2 = 2n\lambda_1 v$, а вероятности $P(\chi^2 \geq \chi_q^2)$ вычисляются по таблице [17Т] при числе степеней свободы $k = 2n$ (для p_1 и p_3) и $k = 4n$ (для p_2 и p_4).

Если контролируется однородность продукции при нормальном законе распределения контролируемого параметра, $n_1 = n_2 = n$, $v_1 = v_3 = v$, $v_2 = \infty$, то

$$\alpha = 1 - p_1 - 0,5(p_2 - p_1^2), \quad \beta = p_2 + 0,5(p_4 - p_3^2),$$

где p_1, p_2, p_3, p_4 определяются из таблицы [22Т] по q и k , причем $q = q_0$ для p_1 и p_2 , $q = q_1$ для p_3 и p_4 ; при известном \bar{x} $k = n$ для p_1 и p_3 , $k = 2n$ для p_2 и p_4 ; при неизвестном \bar{x} $k = n - 1$ для p_1 и p_3 , $k = 2(n - 1)$ для p_2 и p_4 .

При последовательном анализе А. Вальда для переменного объема выборки n и случайного значения контролируемого параметра в выборке вычисляется коэффициент правдоподобия γ и контроль продолжается до тех пор, пока γ не выйдет за пределы интервала (B, A) , где $B = \frac{\beta}{1 - \alpha}$, $A = \frac{1 - \beta}{\alpha}$; если $\gamma \leq B$, то партия принимается; если $\gamma \geq A$, то партия бракуется; при $B < \gamma < A$ испытания продолжают.

Если контролируется число m дефектных изделий в выборке, то

$$\gamma = \gamma(n, m) = \frac{C_{l_1}^m C_{N-l_1}^{n-m}}{C_{l_0}^m C_{N-l_0}^{n-m}},$$

При $n \leq 0,1N$ пригодна формула, справедливая для биномиального закона распределения:

$$\gamma(n, m) = \frac{p_1^m (1 - p_1)^{n-m}}{p_0^m (1 - p_0)^{n-m}},$$

где

$$p_0 = \frac{l_0}{N}, \quad p_1 = \frac{l_1}{N}.$$

В этом случае партия принимается, если $m \leq h_1 + nh_3$; партия бракуется, если $m \geq h_2 + nh_3$; испытания продолжаются, если $h_1 + nh_3 < m < h_2 + nh_3$, где

$$h_1 = \frac{\lg B}{\lg \frac{p_1}{p_0} + \lg \frac{1-p_0}{1-p_1}}, \quad h_2 = \frac{\lg A}{\lg \frac{p_1}{p_0} + \lg \frac{1-p_0}{1-p_1}},$$

$$h_3 = \frac{\lg \frac{1-p_0}{1-p_1}}{\lg \frac{p_1}{p_0} + \lg \frac{1-p_0}{1-p_1}}.$$

На рис. 37, соответствующем этому случаю, полоса II дает область значений n и m , при которых испытания продолжаются, I — область приемки партии, III — область браковки партии.

Если $n \leq 0,1N$, $p_1 < 0,1$, то $\gamma(n, m) = \frac{a_1^m e^{-a_1}}{a_0^m e^{-a_0}}$, где

$a_0 = np_0$, $a_1 = np_1$. В остальном условия последовательного контроля и графический метод останутся без изменения, но в данном случае

$$h_1 = \frac{\lg B}{\lg \frac{p_1}{p_0}},$$

$$h_2 = \frac{\lg A}{\lg \frac{p_1}{p_0}},$$

$$h_3 = \frac{0,4343(p_1 - p_0)}{\lg \frac{p_1}{p_0}}.$$

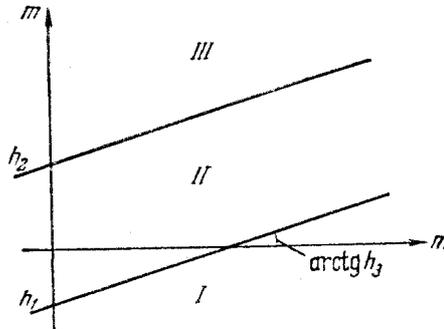


Рис. 37.

Если можно принять биномиальный закон распределения, то математические ожидания объема выборки определяются формулами

$$M[n | p_0] = \frac{(1-\alpha) \lg B + \alpha \lg A}{p_0 \lg \frac{p_1}{p_0} - (1-p_0) \lg \frac{1-p_0}{1-p_1}},$$

$$M[n | p_1] = \frac{\beta \lg B + (1-\beta) \lg A}{p_1 \lg \frac{p_1}{p_0} - (1-p_1) \lg \frac{1-p_0}{1-p_1}}.$$

Наибольшее значение математического ожидания объема выборки имеет место при числе дефектных изделий в партии $l = Nh_3$:

$$M[n]_{\max} = - \frac{\lg B \lg A}{\lg \frac{p_1}{p_0} \lg \frac{1-p_0}{1-p_1}}, \quad \text{где } p_0 = \frac{l_0}{N}, \quad p_1 = \frac{l_1}{N}.$$

Если контролируется среднее значение \tilde{x} параметра в выборке, а значение параметра одного изделия — нормальная случайная величина с известной дисперсией σ^2 , то

$$\gamma = \gamma(n, \tilde{x}) = \exp \left\{ - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n [(x_i - \xi_1)^2 - (x_i - \xi_0)^2] \right\}.$$

Партия принимается, если $n\tilde{x} \leq h_1 + h_3n$; партия бракуется, если $n\tilde{x} \geq h_2 + h_3n$; испытания продолжаются, если $h_1 + nh_3 < n\tilde{x} < h_2 + nh_3$, где

$$h_1 = 2,303 \frac{\sigma^2}{\xi_1 - \xi_0} \lg B; \quad h_2 = 2,303 \frac{\sigma^2}{\xi_1 - \xi_0} \lg A; \quad h_3 = \frac{\xi_0 + \xi_1}{2}.$$

Метод контроля и в данном случае можно представить графически аналогично рис. 37, если по оси ординат вместо m откладывать $n\tilde{x}$. При $\xi_0 > \xi_1$ будет $h_1 > 0$, $h_2 < 0$ и знаки неравенств в условиях приемки и браковки меняются на противоположные.

Математические ожидания числа испытаний определяются формулами:

$$M[n|\xi_0] = \frac{h_2 + (1-\alpha)(h_1 - h_2)}{\xi_0 - h_3},$$

$$M[n|\xi_1] = \frac{h_2 + \beta(h_1 - h_2)}{\xi_1 - h_3},$$

$$M[n]_{\max} = - \frac{h_1 h_2}{\sigma^2}.$$

Если параметр отдельного изделия имеет плотность вероятности $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, то

$$\gamma(n, \tilde{x}) = \frac{\lambda_1^n}{\lambda_0^n} e^{-(\lambda_1 - \lambda_0) n \tilde{x}}.$$

Партия принимается, если $n\tilde{x} \geq h_1 + nh_3$; бракуется, если $n\tilde{x} \leq h_2 + nh_3$; испытания продолжаются, если $h_1 + nh_3 > n\tilde{x} > h_2 + nh_3$, где

$$h_1 = -2,303 \frac{\lg B}{\lambda_1 - \lambda_0}; \quad h_2 = -2,303 \frac{\lg A}{\lambda_1 - \lambda_0};$$

$$h_3 = 2,303 \frac{\lg \frac{\lambda_1}{\lambda_0}}{\lambda_1 - \lambda_0}.$$

Графическое представление метода контроля отличается от изображенного на рис. 37 только тем, что в данном случае *I* — область браковки, *III* — область приемки. Математические ожидания числа испытаний вычисляются по формулам

$$M[n|\lambda_0] = \frac{(1-\alpha) \lg B + \alpha \lg A}{\lg \frac{\lambda_1}{\lambda_0} - 0,4343 \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_0}},$$

$$M[n|\lambda_1] = \frac{\beta \lg B + (1-\beta) \lg A}{\lg \frac{\lambda_1}{\lambda_0} - 0,4343 \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_1}},$$

$$M[n]_{\max} = -\frac{h_1 h_2}{h_3^2}.$$

Если контролируется однородность продукции (закон нормального распределения), то

$$\gamma = \gamma(n, \tilde{\sigma}) = \frac{\sigma_0^n}{\sigma_1^n} e^{-\frac{n}{2} \left(\frac{\tilde{\sigma}^2}{\sigma_1^2} - \frac{\tilde{\sigma}^2}{\sigma_0^2} \right)}.$$

Партия принимается (при известном \tilde{x}), если $n\tilde{\sigma}^2 \leq h_1 + nh_3$; бракуется, если $n\tilde{\sigma}^2 \geq h_2 + nh_3$; испытания продолжаются, если $h_1 + nh_3 < n\tilde{\sigma}^2 < h_2 + nh_3$, где

$$h_1 = \frac{4,606 \lg B}{\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}}, \quad h_2 = \frac{4,606 \lg A}{\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}}, \quad h_3 = \frac{2,303 \lg \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}}{\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}}.$$

При графическом представлении на рисунке, аналогичном рис. 37, по оси ординат откладываются $n\tilde{\sigma}^2$.

При неизвестном \bar{x} всюду в формулах n заменяется на $(n-1)$.

Математические ожидания числа испытаний

$$M[n|\sigma_0] = \frac{h_2 + (1-a)(h_1 - h_2)}{\sigma_0^2 - h_3}, \quad M[n|\sigma_1] = \frac{h_2 + \beta(h_1 - h_2)}{\sigma_1^2 - h_3},$$

$$M[n]_{\max} = -\frac{h_1 h_2}{2h_3^2}.$$

При контроле общего числа дефектов изделий выборки, если число дефектов одного изделия подчиняется закону Пуассона с параметром a , применимы все приведенные выше формулы для закона Пуассона при замене

$$m \text{ на } n\tilde{x}, \quad p_0 \text{ и } p_1 \text{ — на } a_0 \text{ и } a_1, \quad a_0 \text{ и } a_1 \text{ — на } na_0 \text{ и } na_1,$$

$$\chi_{q_0}^2 \text{ — на } 2na_0, \quad \chi_{q_1}^2 \text{ — на } 2na_1,$$

где n — объем выборки.

При $n \geq 50$, $na \geq 4$ возможен переход к нормальному закону

$$\sum_{m=v+1}^{\infty} \frac{a^m e^{-a}}{m!} \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{na - v - 0,5}{\sqrt{na}}\right).$$

Для определения вероятности того, что число испытаний $n < n_g$ при последовательном анализе в случае, когда $\alpha \ll \beta$ или $\beta \ll \alpha$, применимо распределение А. Вальда

$$P(y < y_g) = W_c(y_g) = \sqrt{\frac{c}{2\pi}} \int_0^{y_g} y^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{c}{2}\left(y + \frac{1}{y} - 2\right)} dy,$$

где y — отношение числа испытаний n к математическому ожиданию n при некотором значении контролируемого параметра партии (l, ξ, λ) , $y_g = y|_{n=n_g}$, а параметр c распределения А. Вальда определяется формулами:

а) для биномиального закона распределения доли дефектных изделий

$$c = K \frac{\left| p \lg \frac{p_1}{p_0} - (1-p) \lg \frac{1-p_0}{1-p_1} \right|}{p(1-p) \left(\lg \frac{p_1}{p_0} + \lg \frac{1-p_0}{1-p_1} \right)}, \quad p = \frac{l}{N};$$

б) для нормального закона распределения параметра изделия

$$c = K \frac{\left| \bar{x} - \frac{\xi_0 + \xi_1}{2} \right|}{\xi_1 - \xi_0};$$

в) для показательного закона распределения параметра изделия

$$c = K \frac{\left| 2,303 \lg \frac{\lambda_1 - \lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_0 \lambda} \right|}{\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda} \right)^2},$$

где

$$K = \begin{cases} 2,303 |\lg B|, & \text{если выбранное значение} \\ & \text{параметра} < h_3, \alpha \ll \beta; \\ 2,303 \lg A, & \text{если выбранное значение} \\ & \text{параметра} > h_3, \beta \ll \alpha. \end{cases}$$

Особый случай контроля по числу дефектных изделий возникает при испытании на надежность в течение времени t , при котором обычно считается справедливым показательный закон распределения времени безотказной работы. В этом случае вероятность p выхода изделия из строя за время t определяется формулой $p = 1 - e^{-\lambda t}$. Все формулы для контроля доли дефектных изделий при биномиальном законе остаются справедливыми, если произвести замену p_0 на $1 - e^{-\lambda_0 t}$, p_1 на $1 - e^{-\lambda_1 t}$. Если $\lambda t < 0,1$, возможен переход к закону распределения Пуассона с заменой в соответствующих формулах a_0 на $n\lambda_0 t$, a_1 на $n\lambda_1 t$, $\chi_{q_0}^2$ на $2n\lambda_0 t$, $\chi_{q_1}^2$ на $2n\lambda_1 t$.

Последовательный анализ отличается в данном случае тем, что при фиксированном числе n_0 испытываемых изделий случайным является время t испытаний. Партия принимается, если $t \geq t_1 + mt_3$; бракуется, если $t \leq t_2 + mt_3$; испытания продолжаются, если $t_1 + mt_3 > t > t_2 + mt_3$, где

$$t_1 = -2,303 \frac{\lg B}{n_0(\lambda_1 - \lambda_0)}; \quad t_2 = -2,303 \frac{\lg A}{n_0(\lambda_1 - \lambda_0)};$$

$$t_3 = 2,303 \frac{\lg \frac{\lambda_1}{\lambda_0}}{n_0(\lambda_1 - \lambda_0)},$$

а m — число отказов за время t . При графическом представлении по оси абсцисс откладывается m , а по оси ординат t .

Математические ожидания времени испытания T при $\lambda t < 0,1$ определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[T | \lambda_0] &= \frac{t_n}{n_0} \mathbf{M}[n | p_0], & \mathbf{M}[T | \lambda_1] &= \frac{t_n}{n_0} \mathbf{M}[n | p_1], \\ \mathbf{M}[T]_{\max} &= \frac{t_n}{n_0} \mathbf{M}[n]_{\max}, \end{aligned}$$

где t_n — произвольное число, значение которого выбирают, исходя из удобства расчетов, а $p_0 = \lambda_0 t_n$, $p_1 = \lambda_1 t_n$.

Для определения вероятности того, что время испытания $T < t_g$ в случае, когда $\alpha \ll \beta$ или $\beta \ll \alpha$, применимо распределение А. Вальда, в котором нужно положить $y = \frac{t}{\mathbf{M}[T | \lambda]}$ и определить параметр c по формуле для биномиального закона распределения при выбранном выше значении t_n .

Решение типовых примеров

Пример 45.1. Партия в $N = 40$ изделий считается перво-сортной, если в ней число изделий, имеющих дефекты, не превышает $l_0 = 8$ штук. Если число изделий, имеющих дефекты, больше $l_1 = 20$ штук, то партия возвращается на исправление. Требуется:

- вычислить α и β при однократной выборке объема $n_0 = 10$, если приемочное число $v = 3$;
- найти α и β при двукратной выборке, для которой $n_1 = n_2 = 5$, $v_1 = 0$, $v_2 = 2$, $v_3 = 3$;
- сравнить эффективность планов контроля методами однократной и двукратной выборок по среднему числу проверяемых изделий в 100 однотипных партиях;
- при α и β , полученных в п. а), построить план последовательного контроля, определить n_{\min} для партий с $L = 0$ и $L = N$.

Решение. а) Вычисляем α и β по формулам

$$\alpha = 1 - \sum_{m=0}^3 \frac{C_8^m C_{32}^{10-m}}{C_{40}^{10}}, \quad \beta = \frac{1}{C_{40}^{10}} \sum_{m=0}^3 C_{20}^m C_{20}^{10-m}.$$

Используя таблицы [1Т] для C_n^m , находим

$$\alpha = 0,089, \quad \beta = 0,136.$$

б) Вычисляем α и β по формулам

$$\alpha = 1 - \frac{1}{C_{40}^5} \sum_{m=0}^2 C_8^m C_{32}^{5-m} +$$

$$+ \sum_{m_1=1}^2 \left[\frac{C_8^{m_1} C_{32}^{5-m_1}}{C_{40}^5} \left(1 - \sum_{m_2=0}^{3-m_1} \frac{C_{8-m_1}^{m_2} C_{27+m_1}^{5-m_2}}{C_{35}^5} \right) \right],$$

$$\beta = \frac{C_{20}^0 C_{20}^5}{C_{40}^5} + \sum_{m_1=1}^2 \left[\frac{C_{20}^{m_1} C_{20}^{5-m_1}}{C_{40}^5} \sum_{m_2=0}^{3-m_1} \frac{C_{20-m_1}^{m_2} C_{15+m_1}^{5-m_2}}{C_{35}^5} \right],$$

получаем

$$\alpha = 0,105, \quad \beta = 0,134.$$

в) Вероятность того, что партия первого сорта при методе двукратной выборки после первой выборки объемом в 5 изделий будет принята, равна

$$P(m_1 \leq v_1) = P(m_1 = 0) = \frac{C_8^0 C_{32}^5}{C_{40}^5} = 0,306.$$

Математическое ожидание числа партий, принимаемых после первой выборки из общего числа в 100 партий,

$$100 \cdot 0,306 = 30,6 \text{ партии};$$

для остальных 69,4 партии потребуется вторая выборка; средний расход изделий при методе двукратной выборки составит

$$30,6 \cdot 5 + 69,4 \cdot 10 = 847 \text{ изделий.}$$

При методе однократной выборки расход изделий равен

$$100 \cdot 10 = 1000 \text{ изделий.}$$

При сравнении эффективности методов контроля мы пренебрегли разницей между значениями α и β , полученными по методам однократной и двукратной выборок.

г) При $\alpha = 0,089$ и $\beta = 0,136$ план последовательного анализа получается следующий:

$$B = \frac{\beta}{1-\alpha} = 0,149, \quad \lg B = -0,826,$$

$$A = \frac{1-\beta}{\alpha} = 9,71, \quad \lg A = 0,987.$$

Для определения n_{\min} в случае, когда все изделия в партии хорошие, вычисляем последовательные значения $\lg \gamma(n; 0)$ по формулам

$$\begin{aligned} \lg \gamma(1; 0) &= \lg(N - l_1)! + \lg(N - l_0 + 1)! - \\ &\quad - \lg(N - l_0)! - \lg(N - l_1 + 1)!, \\ \lg \gamma(n + 1; 0) &= \lg \gamma(n; 0) - \lg(N - l_0 - n)! + \lg(N - l_1 - n)! \end{aligned}$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \lg \gamma(1; 0) &= 0,7959; \\ \lg \gamma(2; 0) &= 0,5833; \quad \lg \gamma(3; 0) = 0,3614; \\ \lg \gamma(4; 0) &= 0,1295; \quad \lg \gamma(5; 0) = -0,1136; \\ \lg \gamma(6; 0) &= -0,3688; \quad \lg \gamma(7; 0) = -0,6377; \\ \lg \gamma(8; 0) &= -0,9217. \end{aligned}$$

Так как неравенство $\lg \gamma(n; 0) < \lg B$ выполняется только начиная с $n = 8$, то $n_{\min} = 8$.

Для партии, состоящей из дефектных изделий, $n = m$. Находим $\lg \gamma(1; 1) = 0,3979$.

Для последующих n пользуемся формулой

$$\lg \gamma(n + 1; m + 1) = \lg \gamma(n; m) + \lg(l_1 - m) - \lg(l_0 - m).$$

Получаем $\lg \gamma(2; 2) = 0,8316$; $\lg \gamma(3; 3) = 1,3087 > \lg A = 0,987$; следовательно, в этом случае $n_{\min} = 3$.

Аналогично решается задача 45.1.

Пример 45.2. Большая партия ламп ($N > 10\,000$) проходит контроль на годность. Если доля дефектных ламп $p \leq p_0 = 0,02$, то партия считается хорошей, при $p \geq p_1 = 0,10$ — негодной. Используя законы распределения биномиальный и Пуассона (проверив их применимость):

а) вычислить α и β при однократной выборке (одиночном контроле), если $n_0 = 47$, $v = 2$;

б) вычислить α и β при двукратной выборке (двойном контроле), приняв $n_1 = n_2 = 25$, $v_1 = 0$, $v_2 = 2$, $v_3 = 2$;

в) сравнить эффективность одиночного и двойного контроля по числу испытываемых изделий, приходящихся на 100 партий;

г) составить план последовательного контроля, начертить график, определить n_{m1} для партий с $p = 0$, $p = 1$.

Вычислить математическое ожидание числа испытаний при последовательном контроле.

Решение. а) При биномиальном законе распределения

$$\alpha = 1 - \sum_{m=0}^2 C_{47}^m 0,02^m 0,98^{47-m}, \quad \beta = \sum_{m=0}^2 C_{47}^m 0,10^m 0,90^{47-m}.$$

Используя таблицу [4Т] для биномиальной функции распределения и интерполируя между $n = 40$ и $n = 50$, получим $\alpha = 0,0686$, $\beta = 0,1350$.

При законе распределения Пуассона, вычислив $a_0 = n_0 p_0 = 0,94$, $a_1 = n_0 p_1 = 4,7$, получим

$$\alpha = \sum_{m=3}^{\infty} \frac{0,94^m e^{-0,94}}{m!}, \quad \beta = 1 - \sum_{m=3}^{\infty} \frac{4,7^m e^{-4,7}}{m!}.$$

Используя таблицу [7Т] суммарных вероятностей для закона распределения Пуассона, находим (интерполируя по a)

$$\alpha = 0,0698, \quad \beta = 0,159.$$

б) При биномиальном законе распределения, используя таблицы [1Т] и [4Т], находим

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - \sum_{m_1=0}^2 C_{25}^{m_1} 0,02^{m_1} 0,98^{25-m_1} + \\ &+ \sum_{m_1=1}^2 \left[C_{25}^{m_1} 0,02^{m_1} 0,98^{25-m_1} \left(1 - \sum_{m_2=0}^{2-m_1} C_{25}^{m_2} 0,02^{m_2} 0,98^{25-m_2} \right) \right] = \\ &= 0,0704, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta &= C_{25}^0 0,1^0 0,9^{25} + \\ &+ \sum_{m_1=1}^2 \left[C_{25}^{m_1} 0,1^{m_1} 0,9^{25-m_1} \left(\sum_{m_2=0}^{2-m_1} C_{25}^{m_2} 0,1^{m_2} 0,9^{25-m_2} \right) \right] = 0,1450. \end{aligned}$$

При законе распределения Пуассона, используя таблицы [6Т] и [7Т] и вычислив $a_{01} = 0,5$, $a_{02} = 0,5$, $a_{11} = 2,5$,

$a_{21} = 2,5$, имеем

$$\alpha = \sum_{m_1=3}^{\infty} \frac{0,5^{m_1} e^{-0,5}}{m_1!} + \sum_{m_1=1}^2 \left[\frac{0,5^{m_1} e^{-0,5}}{m_1!} \left(\sum_{m_2=3-m_1}^{\infty} \frac{0,5^{m_2} e^{-0,5}}{m_2!} \right) \right] = 0,0715,$$

$$\beta = 1 - \sum_{m_1=1}^{\infty} \frac{2,5^{m_1} e^{-0,25}}{m_1!} + \sum_{m_1=1}^2 \left[\frac{2,5^{m_1} e^{-2,5}}{m_1!} \left(1 - \sum_{m_2=3-m_1}^{\infty} \frac{2,5^{m_2} e^{-2,5}}{m_2!} \right) \right] = 0,1935.$$

Существенное различие между значениями β , вычисленными при использовании законов распределения биномиального и Пуассона, объясняется большой величиной $p_1 = 0,10$.

в) Вероятность принятия хорошей партии ($p \leq 0,02$) после первой выборки при двойном контроле (сравниваем результаты для биномиального закона распределения)

$$P(m_1 \leq v_1) = P(m_1 = 0) = C_{25}^0 0,02^0 \cdot 0,98^{25} = 0,6035.$$

Среднее число хороших партий, принимаемых после первой выборки, из общего числа в 100 партий составит

$$100 \cdot 0,6035 = 60,35 \text{ партии};$$

для остальных 39,65 партии потребуется вторая выборка; средний расход ламп при двойном контроле 100 партий будет равен

$$60,35 \cdot 25 + 39,65 \cdot 50 = 3497 \text{ ламп};$$

в случае плохой партии вероятность забраковать ее после первой выборки при двойном контроле

$$P(m_1 > v_2) = P(m_1 > 2) = 1 - \sum_{m_1=0}^2 C_{25}^{m_1} 0,1^{m_1} 0,9^{25-m_1} = 0,4629.$$

Среднее число партий, бракуемых после первой выборки, из общего числа в 100 партий составит

$$100 \cdot 0,4629 = 46,29;$$

для остальных 53,71 партии потребуется вторая выборка; средний расход ламп при двойном контроле 100 партий будет равен

$$46,29 \cdot 25 + 53,71 \cdot 50 = 3843;$$

при одиночном контроле будет израсходовано во всех случаях

$$100 \cdot 50 = 5000 \text{ ламп.}$$

г) При $\alpha = 0,0686$, $\beta = 0,1350$ для последовательного контроля получаем, используя биномиальный закон распределения:

$$B = 0,1450, \lg B = -0,8388, A = 1,261, \lg A = 1,1007.$$

Далее, $h_1 = -1,140$, $h_2 = 1,496$, $h_3 = 0,0503$ (рис. 38).

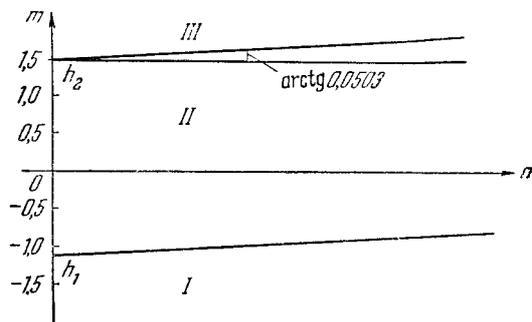


Рис. 38.

Находим n_{\min} для хорошей партии при $p = 0$:

$$0 = h_1 + n_{\min} h_3, \quad n_{\min} = -\frac{h_1}{h_3} = \frac{1,140}{0,0503} = 22,7 \approx 23 \text{ лампы;}$$

для негодной партии при $p = 1$:

$$n_{\min} = h_2 + n_{\min} h_3,$$

$$n_{\min} = \frac{h_2}{1 - h_3} = \frac{1,496}{0,9497} = 1,5 \approx 2.$$

Определяем средние числа испытаний при различных p :

$$M[n|0,02] = 31,7; \quad M[n|0,10] = 22,9; \quad M[n]_{\max} = 35,7.$$

Аналогично решаются задачи 45.2—45.5, 45.7, 45.8, 45.10.

Пример 45.3. Большая партия сопротивлений, для которых время безотказной работы подчиняется экспоненциальному закону распределения, испытывается на надежность. Если интенсивность отказов $\lambda \leq \lambda_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ час.⁻¹, то партия считается хорошей; если $\lambda \geq \lambda_1 = 1 \cdot 10^{-5}$ час.⁻¹ — негодной. Считая, что $\lambda t_0 < 0,1$, где t_0 — фиксированное время испытания каждого элемента в выборке из n_0 штук, определить при $\alpha = 0,005$, $\beta = 0,08$ n_0 для метода однократной выборки при различных t_0 , найти v при условии, что $t_0 = 1000$ часов, а также составить план последовательного контроля при $n = n_0$ для $t_0 = 1000$ часов. Вычислить t_{\min} для хорошей и плохой партий, а также $M\{T|\lambda\}$, $P\{t < 1000\}$, $P\{t < 500\}$.

Решение. Определение объема выборки n_0 и приемочного числа v производим с учетом того, что $\lambda t_0 < 0,1$, что позволяет использовать закон распределения Пуассона и далее перейти от закона Пуассона к χ^2 -распределению. Вычисляем отношение $\lambda_0/\lambda_1 = 0,2$. Далее из таблицы [18Т] находим значения $\chi_{q_0}^2$ по входным величинам $P(\chi^2 \geq \chi_{q_0}^2) = 1 - \alpha = 0,995$ и k ; $\chi_{q_1}^2$ — по входным величинам $P(\chi^2 \geq \chi_{q_1}^2) = \beta = 0,08$ и k .

Методом подбора устанавливаем, что при $k = 15$

$$\chi_{q_0}^2 = 4,48, \quad \chi_{q_1}^2 = 23,22, \quad \frac{\chi_{q_0}^2}{\chi_{q_1}^2} = 0,1930;$$

при $k = 16$

$$\chi_{q_0}^2 = 5,10, \quad \chi_{q_1}^2 = 24,48, \quad \frac{\chi_{q_0}^2}{\chi_{q_1}^2} = 0,2041.$$

Интерполируя по величине $\frac{\chi_{q_0}^2}{\chi_{q_1}^2} = 0,2$, находим: $k = 15,63$, $\chi_{q_0}^2 = 4,87$, $\chi_{q_1}^2 = 23,99$. Вычисляем $v = \frac{k}{2} - 1 = 6,815$; принимаем $v = 6$, $2n_0\lambda_0 t_0 = 4,87$, откуда $n_0 t_0 = \frac{4,87}{2 \cdot 0,000002} = 1,218 \cdot 10^6$. Условие $\lambda t_0 < 0,1$ дает

$$t_0 < \frac{0,1}{0,000001} = 10\,000 \text{ часов (так как } \lambda_1 = 0,000001).$$

Беря различные значения $t_0 < 10\,000$, получим соответствующие значения n_0 , приведенные в таблице 111.

Таблица 111

t_0 , час.	100	500	1 000	2 500	5 000
n_0	12 180	2 436	1 218	487	244

Вычисляем B , A , t_1 , t_2 , t_3 для метода последовательного анализа: $B = 0,08041$; $\ln B = -2,5211$; $A = 184$; $\ln A = 5,2161$.
Примем $n_0 = 1218$, тогда

$$\begin{aligned} t_1 &= 258,7 \text{ часа;} \\ t_2 &= -535,3 \text{ часа;} \\ t_3 &= 165,2 \text{ часа (рис. 39).} \end{aligned}$$

Минимальное время испытаний при $m = 0$ для хорошей партии $t_{\min} = 258,7$ часа; для плохой партии $t_{\min} = -535,3 + 165,2m > 0$; $m = 3,24 \approx 4$; при $m = 4$ $t_{\min} = 125,5$ часа. Если при $t < 125,5$ часа $m \geq 4$, то партия бракуется.

Для вычисления среднего времени испытаний при $n = n_0 = 1218$ принимаем $t_n = t_0 = 1000$ час. Тогда

$$\begin{aligned} p_0 &= \lambda_0 t_n = 0,002; \\ p_1 &= \lambda_1 t_n = 0,010; \\ \lambda^* t_n &= \frac{t_n}{n_0 t_3} = 0,00497. \end{aligned}$$

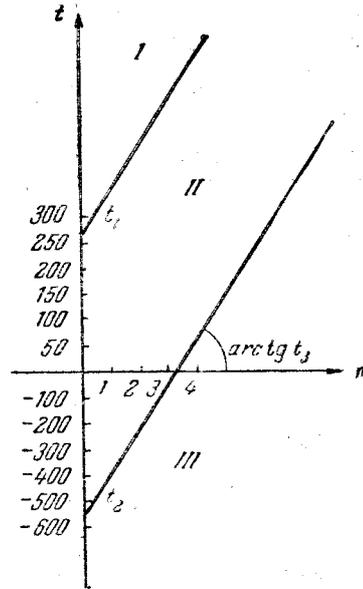


Рис. 39.

Далее находим

$$M\{n | p_0\} = 505; \quad M\{n | p_1\} = 572; \quad M\{n\}_{\max} = 1001,$$

после чего вычисляем

$$M\{T | \lambda_0\} = 415 \text{ час.}; \quad M\{T | \lambda_1\} = 470 \text{ час.}; \quad M\{T\}_{\max} = 821 \text{ час.}$$

Найдем вероятность того, что время испытаний при фиксированном числе элементов $n = n_0 = 1218$ меньше 1000 час.

и 500 час. Для этого при $t_n = 1000$ час. вычисляем значение параметра c распределения Вальда и значение $y = \frac{n_0}{M[n|p_0]} = \frac{t_n}{M[T|\lambda]}$ при условии, что $p_0 = \lambda_0 t_0 = 0,002$; $p_1 = \lambda_1 t_0 = 0,01$. Получим, принимая $p = p_0$, так как $a \ll \beta$, $c = 2,37$, $y = \frac{1000}{415} = 2,406$. Получаем (см. табл. [26Т])

$$P(T < 1000) = P(n < 1218) = W_c(y) = 0,9599.$$

При $\gamma = 0,5$ имеем

$$y = 1,203, \quad P(T < 500) = 0,725.$$

Аналогично решается задача 45.9.

Пример 45.4. Качество дисков, изготовленных на плоскошлифовальном станке, определяется числом пятен на них. Если среднее число пятен на десяти дисках не более 1, то диски считаются доброкачественными, если более 5 — негодными. Взята выборка в 40 дисков из большой партии ($N > 1000$). Требуется, предполагая, что число пятен на диске подчиняется закону распределения Пуассона,

- определить α и β при $\nu = 9$;
- по этим α и β построить план последовательного контроля, вычислить $n_{г,л}$ для хорошей и плохой партий, значения $M[n|a]$;
- проверить конкретную выборку, для которой данные приведены в таблице 112, по методам одиночного и последовательного контроля.

Таблица 112

n	x_n								
1	0	9	1	17	2	25	4	33	4
2	1	10	1	18	2	26	4	34	4
3	1	11	1	19	3	27	4	35	5
4	1	12	1	20	3	28	4	36	5
5	1	13	2	21	3	29	4	37	6
6	1	14	2	22	3	30	4	38	6
7	1	15	2	23	3	31	4	39	7
8	1	16	2	24	4	32	4	40	7

Решение. а) Используя закон распределения Пуассона, имеем $a_0 = 0,1$; $a_1 = 0,5$; $na_0 = 4$; $na_1 = 20$. Используя

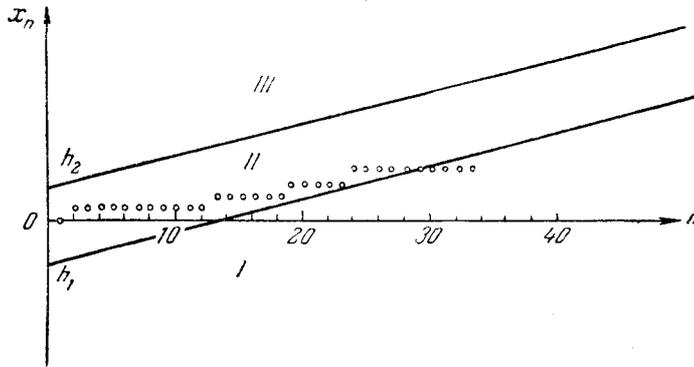


Рис. 40.

таблицу [7Т] для суммарных вероятностей чисел x_n появления пятен на дисках в рассматриваемой выборке, находим

$$\alpha = \sum_{x_n=10}^{\infty} \frac{4^{x_n} e^{-4}}{x_n!} = 0,00813, \quad \beta = 1 - \sum_{x_n=10}^{\infty} \frac{20^{x_n} e^{-20}}{x_n!} = 0,00500.$$

б) При $\alpha = 0,0081$; $\beta = 0,0050$ получаем для характеристик последовательного контроля (рис. 40):

$$B = 0,005041; \quad \lg B = -2,298; \quad A = 122,8; \quad \lg A = 2,089,$$

$$h_1 = \frac{\lg B}{\lg \frac{a_1}{a_0}} = -3,29; \quad h_2 = \frac{\lg A}{\lg \frac{a_1}{a_0}} = 2,99;$$

$$h_3 = \frac{0,4343(a_1 - a_0)}{\lg \frac{a_1}{a_0}} = 0,248.$$

Вычисляем n_{\min} :

$$\text{при } x_n = 0 \quad n_{\min} = 13,2 \approx 14;$$

$$\text{при } x_n = n \quad n_{\min} = 18,7 = 19.$$

Средние значения чисел испытаний при последовательном контроле

$$M[n | a_0] = 21,8; \quad M[n | a_1] = 11,8; \quad M[n]_{\max} = 39,5.$$

в) В выборке при $n_0 = 40$ оказалось $x_n = 7 < v = 9$; следовательно, партия принимается. Применяя метод последовательного контроля (см. рис. 40), получаем, что при $n = 30$ точка с координатами (n, m) оказывается ниже нижней прямой, т. е. партия должна быть принята. Действительно,

при $n = 29$, $x_n = 4$ $h_1 + mh_3 = 3,90$; $x_n > h_1 + mh_3$;
 при $n = 30$, $x_n = 4$ $h_1 + mh_3 = 4,15$; $x_n < h_1 + mh_3$.

Аналогично решается задача 45.11.

Пример 45.5. О качестве одного типа штамповок горизонтально-ковочной машины судят по рассеиванию их высот X , о которых известно, что они подчиняются закону нормального распределения с математическим ожиданием $\bar{x} = 32$ мм (номинальный размер). Если среднее квадратическое отклонение $\sigma \leq \sigma_0 = 0,18$ мм, то партия считается хорошей; если $\sigma \geq \sigma_1 = 0,30$ мм — негодной. Найти α и β для метода однократной выборки при $n_0 = 39$ и $v = 0,22$ мм. По найденным α и β составить план контроля по методу последовательного анализа. Вычислить n_{\min} для хорошей и негодной партий, $M[n|\sigma]$.

Решение. Вычисляем α и β по формулам

$$\alpha = 1 - P(\tilde{\sigma} \leq q_0 \sigma_0), \quad \beta = P(\tilde{\sigma} \leq q_1 \sigma_1)$$

при $k = n_0 = 39$, $q_0 = \frac{v}{\sigma_0} = 1,221$, $q_1 = \frac{v}{\sigma_1} = 0,733$. Интерполируя по таблице [22Г] для закона χ^2 -распределения, находим

$$\alpha = 0,0303; \quad \beta = 0,0064.$$

Находим значения B , A , h_1 , h_2 , h_3 для метода последовательного анализа:

$$B = 0,006601; \quad \ln B = -5,021; \quad A = 30,10; \quad \ln A = 3,405;$$

$$h_1 = -0,528; \quad h_2 = 0,345; \quad h_3 = 0,0518.$$

Находим n_{\min} . Для худшей из хороших партий $\tilde{\sigma}^2 = \sigma_0^2 = 0,0324$; $n_{\min} \sigma_0^2 = h_1 + n_{\min} h_3$; $n_{\min} = 27,2 \approx 28$.

Для лучшей из негодных партий $\tilde{\sigma}^2 = \sigma_1^2 = 0,0900$;

$$n_{\min} \sigma_1^2 = h_2 + n_{\min} h_3; \quad n_{\min} = 9,3 \approx 10.$$

Вычисляем средние числа испытаний $M[n|\sigma]$ при различных σ :

$$M[n|\sigma_0] = 25,9; \quad M[n|\sigma_1] = 8,8; \quad M[n]_{\max} = 34,0.$$

Аналогично решается задача 45.12.

Пример 45.6. Наибольшее давление X в камере порохового ракетного двигателя распределено нормально со средним квадратическим отклонением $\sigma = 10 \text{ кг/см}^2$. Двигатель считается хорошим, если $X \leq \xi_0 = 100 \text{ кг/см}^2$; если $X \geq \xi_1 = 105 \text{ кг/см}^2$, то двигатель возвращается на завод для регулировки. Установлены значения $\alpha = 0,10$ и $\beta = 0,01$. Составить планы одиночного (n_0, v) и последовательного контроля, вычислить вероятности $P(n < n_0)$ и $P(n < \frac{1}{2}n_0)$ того, что при последовательном контроле среднее число испытаний будет меньше n_0 и $\frac{1}{2}n_0$ соответственно.

Решение. Для вычисления объема выборки n_0 и приемочного числа v при одиночном контроле используем формулы

$$\Phi\left(\frac{v - \xi_0}{\sigma/\sqrt{n_0}}\right) = 1 - 2\alpha, \quad \Phi\left(\frac{\xi_1 - v}{\sigma/\sqrt{n_0}}\right) = 1 - 2\beta.$$

Подставляя значения α и β и пользуясь таблицей [8Т] для функции Лапласа, находим

$$\frac{v - 100}{10} \sqrt{n_0} = 1,2816, \quad \frac{105 - v}{10} \sqrt{n_0} = 2,3264,$$

откуда $n_0 = 52$, $v = 101,8 \text{ кг/см}^2$.

Для последовательного контроля находим: $B = 0,0111$; $\ln B = -4,500$; $A = 9,9$; $\ln A = 2,293$; $h_1 = -90$; $h_2 = 45,86$; $h_3 = 102,5$.

Определяем n_{\min} . Для худшей из хороших партий при $\tilde{x} = \xi_0 = 100$

$$n_{\min} \cdot 100 = -90 + n_{\min} \cdot 102,5; \quad n_{\min} = 36;$$

для лучшей из плохих партий при $\tilde{x} = \xi_1 = 105$

$$n_{\min} \cdot 105 = 45,86 + n_{\min} \cdot 102,5; \quad n_{\min} = 18,3 \approx 19.$$

Средние числа наблюдений $M[n|\xi]$ равны:

$$M[n|\xi_0] = 30,6; \quad M[n|\xi_1] = 17,8; \quad M[n]_{\max} = 41,3.$$

Для определения вероятности $P(n < 52)$, учитывая, что $\beta \ll \alpha$ при $\bar{x} = \xi_1 = 105$, вычисляем:

$$K = \ln A = 2,293; \quad c = 1,146;$$

$$y_{11} = \frac{n_0}{M[n|\xi_1]} = 4,031; \quad y_{12} = \frac{1}{2} y_{11} = 2,016.$$

Из таблицы [26Т] для закона распределения Вальда найдем

$$P(n < 52) = 0,982, \quad P(n < 26) = 0,891.$$

Аналогично решается задача 45.13.

Пример 45.7. Средняя продолжительность работы одного типа электронных ламп составляет для хорошей партии $t \gg t_0 = 1282$ часа, для негодной $t \leq t_1 = 708$ часов. Известно, что время T безотказной работы подчиняется экспоненциальному закону распределения с плотностью вероятности

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t},$$

где параметр λ — интенсивность отказов — есть величина, обратная средней продолжительности работы лампы в часах.

Определить при $\alpha = 0,001$ и $\beta = 0,01$ объем n_0 одной выборки и приемочное число v , составить план последовательного контроля, найти $n_{\text{план}}$, $M[n|\lambda]$, $P(n < n_0)$, $P\left(n < \frac{1}{2} n_0\right)$.

Решение. Предполагая, что $n_0 > 15$ (так как α и β малы), используем замену закона χ^2 -распределения, которому подчиняется величина $\frac{2\lambda n_0}{\lambda}$, нормальным, т. е. полагаем

$$P(\chi^2 \geq \chi_q^2) = 0,5 - 0,5\Phi\left(\frac{\chi_q^2 - 2n}{2\sqrt{n}}\right),$$

так как число степеней свободы $k = 2n$. Получаем уравнения

$$0,5 - 0,5\Phi\left(\frac{\chi_{q0}^2 - 2n}{2\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha,$$

$$0,5 - 0,5\Phi\left(\frac{\chi_{q1}^2 - 2n}{2\sqrt{n}}\right) = \beta,$$

откуда находим с помощью таблицы [8Т]

$$\frac{\chi_{q_0}^2 - 2n}{2\sqrt{n}} = -3,090, \quad \frac{\chi_{q_1}^2 - 2n}{2\sqrt{n}} = 2,324$$

или, учитывая, что $\chi_{q_0}^2 = 2\lambda_0 n_0 v$, $\chi_{q_1}^2 = 2\lambda_1 n_0 v$, $\lambda_0 = \frac{1}{t_0} =$
 $= 0,00078$, $\lambda_1 = \frac{1}{t_1} = 0,001413$,

$$0,000780 - v = -3,090 \frac{v}{\sqrt{n_0}},$$

$$0,001413 - v = 2,324 \frac{v}{\sqrt{n_0}};$$

решая эту систему уравнений, получим

$$v = 0,001141, \quad n_0 = 99,03 \approx 100.$$

Так как $n_0 > 15$, то использование нормального закона распределения допустимо.

Для последовательного контроля находим:

$$B = 0,01001; \quad \ln B = -4,604; \quad A = 990; \quad \ln A = 6,898;$$

$$h_1 = 7273; \quad h_2 = -1090 \cdot 10; \quad h_3 = 938,0;$$

$$\lambda^* = \frac{1}{h_3} = 0,001066.$$

Определяем n_{\min} . Для худшей из хороших партий $\tilde{t} = t_0 =$
 $= 1282$ час., $n_{\min} = 21,1 \approx 22$; для лучшей из плохих пар-
 тий $\tilde{t} = t_1 = 708$ час., $n_{\min} = 47,4 \approx 48$.

Находим средние числа испытаний при различных λ :

$$\mathbf{M}[n|\lambda_0] = 20,7; \quad \mathbf{M}[n|\lambda] = 46,6; \quad \mathbf{M}[n]_{\max} = 90,0.$$

Учитывая, что $\alpha \ll \beta$, определяем $K = |\ln B| = 4,604$,
 а затем параметр c распределения Вальда: $c = 1,525$; далее
 находим $y_{01} = \frac{100}{20,7} = 4,82$; $y_{02} = 2,41$.

Из таблицы [26Т] по входным величинам y_{01} (y_{02}) и c
 имеем

$$p = \mathbf{P}(n < 100) > 0,99 \quad (\text{но } p < 0,999),$$

$$\mathbf{P}(n < 50) = 0,939.$$

Аналогично решается задача 45.14.

Задачи

45.1. Отливки поступают в механический цех партиями по 100 штук и проходят контроль на качество литья. Если в партии количество бракованных отливок $L \leq l_0 = 4$, то партия считается хорошей; если $L \geq l_1 = 28$, то партия должна быть забракована. Найти α и β для контроля по методам однократной выборки при $n_0 = 22$, $v = 2$ и двукратной выборки при $n_1 = n_2 = 15$, $v_1 = 0$, $v_2 = 3$, $v_3 = 3$, сравнить их эффективность по среднему числу испытаний; составить план контроля по методу последовательного анализа, вычислить минимальное число испытаний для хорошей и негодной партий при последовательном контроле, взяв α и β , полученные по методу однократной выборки.

45.2. Шарикоподшипники изготавливаются большими партиями, причем партия считается хорошей, если число бракованных шариков не превышает 1,5%, негодной, если оно больше 5%. Составить и сравнить эффективность планов одиночного контроля при объеме выборки $n_0 = 410$ и приемочном числе $v = 10$ и двойного контроля при $n_1 = n_2 = 220$, $v_1 = 2$, $v_2 = 7$, $v_3 = 11$.

Составить план последовательного контроля, взяв α и β , полученные для плана одиночного контроля; сравнить эффективность всех трех методов по среднему числу испытаний, вычислить n_{min} для хорошей и плохой партий при последовательном контроле.

45.3. Большая партия штампованных изделий считается хорошей, если доля дефектных изделий $p \leq p_0 = 0,10$, негодной, если $p \geq p_1 = 0,20$. Найти α и β при контроле по методу однократной выборки, взяв объем выборки $n_0 = 300$ и приемочное число $v = 45$. По найденным α и β составить план контроля по методу последовательного анализа, вычислить n_{min} для хорошей и плохой партий, найти $M[n|p]$ и $P(n < n_0)$, $P\left(n < \frac{1}{2} n_0\right)$.

Указание. Перейти к закону нормального распределения.

45.4. Для большой партии изделий составить план одиночного контроля (n_0 , v), гарантирующий: а) риск поставщика в 1% и риск потребителя в 2%, если партия считается хорошей; когда доля дефектных изделий $p \leq p_0 = 0,10$, и негодной,

когда $p \geq p_1 = 0,20$ (воспользоваться нормальным законом распределения); б) $\alpha = 0,20$, $\beta = 0,10$ при тех же p_0 и p_1 применительно к закону распределения Пуассона. Составить соответствующие планы последовательного контроля, найти математические ожидания числа испытаний.

45.5. При $\alpha = 0,05$ и $\beta = 0,10$ построить планы одиночного и последовательного контроля для проверки качества больших партий заклепок. Заклепки считаются дефектными, если их диаметр $X > 13,575$ мм. Партия считается хорошей, если доля дефектных заклепок $p \leq p_0 = 0,03$, негодной, если $p \geq p_1 = 0,08$. Вычислить применительно к закону распределения Пуассона объем n_0 однократной выборки и контрольный норматив v . При тех же α и β составить план последовательного контроля, вычислить n_{min} для хорошей и негодной партий, найти среднее число испытаний $M[n|p]$ при последовательном контроле.

45.6. Заклепки, диаметр которых $X > 13,575$ мм, считаются дефектными. Должно отвергаться не более 5% партий с долей брака $p \leq p_0 = 0,03$ и приниматься не более 10% партий с долей брака $p \geq p_1 = 0,08$. Предполагая, что случайная величина X подчиняется закону нормального распределения, для которого оценки математического ожидания \bar{x} и дисперсии $\tilde{\sigma}^2$ определяются по данным выборки, найти общие формулы для объема n_0 однократной выборки при контроле по величине и для величины z_0 таких, чтобы выполнялись условия

$$P(\tilde{x} + \tilde{\sigma}z_0 > l | p = p_0) = \alpha,$$

$$P(\tilde{x} + \tilde{\sigma}z_0 > l | p = p_1) = 1 - \beta.$$

Вычислить n_0 и z_0 для условий задачи.

Учесть, что величина

$$u = \tilde{x} + \tilde{\sigma}z_0$$

распределена приближенно нормально с параметрами

$$M[u] = \bar{x} + \sigma z_0, \quad D[u] = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{z_0^2}{2k} \right),$$

где $k = n - 1$. Сравнить с результатом задачи 45.5.

45.7. Составить, используя законы распределения биномиальный и Пуассона, план двойного контроля при $n_1 = n_2 = 30$, $v_1 = 3$, $v_2 = 5$, $v_3 = 8$, если партия считается хорошей при

доле дефектных изделий $p \leq p_0 = 0,10$ и негодной при $p \geq p_1 = 0,20$. По найденным применительно к биномиальному закону распределения α и β составить планы одиночного и последовательного контроля, сравнить все три метода по среднему числу испытаний. Для последовательного контроля найти n_{\min} в случаях хорошей и плохой партий, вычислить математическое ожидание числа испытаний $M[n|p]$.

45.8. Составить планы контроля по методам однократной выборки и последовательного анализа для больших партий радиоламп, если партия с долей дефектных ламп $p \leq p_0 = 0,02$ считается хорошей, а при $p \geq p_1 = 0,07$ — негодной. Риск поставщика $\alpha = 0,0001$, риск потребителя $\beta = 0,01$. Для плана последовательного контроля определить n_{\min} для хорошей и плохой партий, найти среднее число испытаний $M[n|p]$ и вероятности $P(n \leq M[n|p_0])$, $P(n \leq 2M[n|p_0])$.

45.9. Продолжительность работы T (в часах) трансформаторов подчиняется экспоненциальному закону распределения с интенсивностью отказов λ . Считая, что $\lambda t_0 < 0,1$, составить планы контроля по методам однократной выборки и последовательного анализа при $\alpha = 0,10$, $\beta = 0,10$. При одиночном контроле найти приемочное число v и объем выборки n_0 для срока испытания каждого трансформатора $t_0 = 500, 1000, 2000, 5000$ часов, заменив распределение Пуассона χ^2 -распределением. При последовательном контроле взять фиксированный объем выборки n_0 , соответствующий $t_0 = 1000$ часов, найти среднее время испытания каждого трансформатора $M[T|\lambda]$. Учесть, что партия трансформаторов считается хорошей, если интенсивность отказов $\lambda \leq \lambda_0 = 10^{-5}$ час.⁻¹, и негодной при $\lambda \geq \lambda_1 = 2 \cdot 10^{-5}$ час.⁻¹.

45.10. Большая партия электрических сопротивлений подвергается контролю при $\alpha = 0,005$, $\beta = 0,08$, причем партия считается хорошей при доле дефектных изделий $p \leq p_0 = 0,02$, негодной при $p \geq p_1 = 0,10$. Применяя χ^2 -распределение в качестве замены закона распределения Пуассона, найти объем n_0 и приемочное число v для метода однократной выборки, составить план последовательного контроля, определить n_{\min} для хорошей и плохой партий, вычислить математическое ожидание числа испытываемых элементов и вероятности $P(n < n_0)$, $P(n < \frac{1}{2} n_0)$.

45.11. Склады семенного картофеля перед посадкой проверяются на отсутствие очагов гниения. Картофель признается годным для посадки, если на каждых 10 плодах обнаруживается не более одного пятна, негодным, если пятен более пяти.

Считая, что число пятен подчиняется закону распределения Пуассона, вычислить α и β при контроле по методу двукратной выборки при $n_1 = 40$, $n_2 = 20$, $v_1 = 4$, $v_2 = 12$, $v_3 = 14$. По найденным α и β построить планы одиночного и последовательного контроля. Сравнить эффективность всех трех методов по среднему расходу картофеля на производство испытаний для 100 отсеков.

45.12. В партии электрических сопротивлений, случайные значения которых подчиняются закону нормального распределения с известным средним значением в 200 *ом*, характеристикой качества является среднее квадратическое отклонение σ , причем партия считается хорошей, если $\sigma \leq \sigma_0 = 10$ *ом*, негодной, если $\sigma \geq \sigma_1 = 20$ *ом*. Составить планы контроля по методам однократной выборки при $n_0 = 16$, $v = 12,92$ и двукратной выборки при $n_1 = n_2 = 13$, $v_1 = v_3 = 12$, $v_2 = \infty$. По найденным α и β (для одиночного контроля) составить план последовательного контроля. Сравнить эффективность всех трех методов контроля по среднему числу испытаний. Вычислить n_{\min} для худшей из хороших и для лучшей из плохих партий.

45.13. Партии капронового волокна испытываются на прочность. Характеристика прочности X , измеряемая в *г/денье* (удельная прочность волокна), подчиняется закону нормального распределения со средним квадратическим отклонением $\sigma = 0,8$ *г/денье*, причем партия считается хорошей, если $X \geq x_0 = 5,4$ *г/денье*, негодной, если $X \leq x_1 = 4,9$ *г/денье*. Составить план контроля прочности волокна по методу однократной выборки при $n_0 = 100$ и $v = 5,1$. По найденным α и β составить план контроля по методу последовательного анализа, вычислить средний расход волокна на испытания и вероятности $P(n < n_0)$, $P\left(n < \frac{1}{2}n_0\right)$.

45.14. Известно, что если интенсивность отказов $\lambda \leq \lambda_0 = 0,01$, то партия гироскопов считается надежной; если $\lambda \geq \lambda_1 = 0,02$, то партия ненадежна и должна быть забракована. Считая, что время T безотказной работы подчинено

экспоненциальному закону распределения, и принимая $\alpha = \beta = 0,001$, составить планы одиночного (n_0, ν) и последовательного контроля по уровню параметра λ . Найти среднее число испытываемых гироскопов $M[n|\lambda]$ для случая последовательного контроля.

45.15. Контролируется большая партия конденсаторов, причем партия считается хорошей, если доля ненадежных конденсаторов $p \leq p_0 = 0,01$; при $p \geq p_1 = 0,06$ партия считается негодной. Составить план одиночного контроля (n_0, ν) доли ненадежных изделий, который должен обеспечить $\alpha = 0,05$, $\beta = 0,05$.

Для установления надежности каждый испытываемый конденсатор из рассматриваемой выборки подвергается многократному последовательному контролю при $\alpha' = 0,0001$, $\beta' = 0,0001$, причем конденсатор считается надежным, если интенсивность отказов $\lambda \leq \lambda_0 = 0,0000012$, и ненадежным при $\lambda \geq \lambda_1 = 0,0000020$ час⁻¹ (n — число испытаний конденсатора, позволяющих установить его надежность при заданных α' и β'). Предполагается, что время безотказной работы конденсатора подчиняется экспоненциальному закону распределения.

45.16. Составить планы одиночного и последовательного контроля сложных электронных приборов, надежность которых оценивается по среднему времени \tilde{T} безотказной работы. При $\tilde{T} \geq T_0 = 100$ час. прибор считается хорошим, при $\tilde{T} \leq T_1 = 50$ час. — негодным. Необходимо гарантировать $\alpha = \beta = 0,10$. Учесть, что при фиксированном времени испытаний t_n прибор принимается, если $\frac{t_n}{m} = \tilde{T} \geq \nu$, и бракуется, если $\tilde{T} < \nu$, где m — число отказов за время t , а ν — приемочное число при одиночном контроле ($n_0 = 1$; в случае отказа прибор ремонтируется и испытание продолжается); в этом случае величина $\frac{t_n}{\tilde{T}}$ приближенно подчиняется закону распределения Пуассона. При последовательном контроле величина t зависит от хода испытания.

а) Определить время испытаний t_n и контрольный норматив ν при одиночном контроле.

б) Для плана последовательного контроля условие продолжения испытаний $\ln B < \ln \nu(t, m) < \ln A$ привести к виду $t_1 + mt_3 > t > t_2 + mt_3$. Для t_1, t_2, t_3 получить предварительно общие формулы.

в) В случае последовательного контроля определить минимальное время испытания t_{\min} для худшей из хороших и для лучшей из негодных партий.

§ 46. Определение вероятностных характеристик случайных функций по опытным данным

Основные формулы

Методы определения математического ожидания, корреляционной функции и законов распределения ординат случайной функции при обработке серии реализаций не отличаются от методов определения соответствующих вероятностных характеристик системы случайных величин. При обработке реализаций стационарных случайных функций обычно допустимо вместо усреднения по реализациям пользоваться усреднением по времени, т. е. находить вероятностные характеристики по одной или нескольким достаточно длительным реализациям (выполнение этого условия носит название эргодичности). В этом случае оценки (подходящие значения) математического ожидания и корреляционной функции определяются формулами

$$\tilde{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt,$$

$$\tilde{K}_x(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} [x(t) - \tilde{x}][x(t+\tau) - \tilde{x}] dt,$$

где T — полное время записи реализации.

Вместо последней формулы иногда используют практически эквивалентную ей формулу

$$\tilde{K}_x(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} x(t)x(t+\tau) dt - \tilde{x}^2.$$

В том случае, когда математическое ожидание \bar{x} известно точно,

$$\tilde{K}_x(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} [x(t) - \bar{x}][x(t+\tau) - \bar{x}] dt \approx$$

$$\approx \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} x(t)x(t+\tau) dt - \bar{x}^2.$$

Когда \tilde{x} и $\tilde{K}_x(\tau)$ определяются по значениям ординат реализации случайной функции в дискретные моменты времени $t_j = (j-1)\Delta$, соответствующие формулы приобретают вид

$$\tilde{x} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m x(t_j),$$

$$\tilde{K}_x(\tau) = \frac{1}{m-l} \sum_{j=1}^{m-l} [x(t_j) - \tilde{x}][x(t_j + \tau) - \tilde{x}]$$

или

$$\tilde{K}_x(\tau) = \frac{1}{m-l} \sum_{j=1}^{m-l} x(t_j) x(t_j + \tau) - \tilde{x}^2,$$

где $\tau = l\Delta$, $T = m\Delta$.

Для нормальных случайных функций дисперсии \tilde{x} и $\tilde{K}_x(\tau)$ могут быть выражены через $K_x(\tau)$. При практических расчетах вместо неизвестной корреляционной функции $K_x(\tau)$ в формулы для $D[\tilde{x}]$ и $D[\tilde{K}_x(\tau)]$ подставляют $\tilde{K}_x(\tau)$.

При определении значения корреляционной функции по результатам обработки нескольких реализаций различной длительности за подходящие значения ординат $\tilde{K}_x(\tau)$ следует взять сумму ординат, полученных при обработке отдельных реализаций, с весами, обратно пропорциональными дисперсиям этих ординат.

Решение типовых примеров

Пример 46.1. Ординаты стационарной случайной функции определяются путем фотографирования шкалы измерительного прибора через равные промежутки времени Δ . Определить наибольшее допустимое значение Δ , при котором увеличение дисперсии $\tilde{K}_x(0)$ по сравнению с дисперсией, получаемой при обработке непрерывного графика реализации случайной функции, будет не больше чем на $\delta\%$, если приближенное значение $\tilde{K}_x(\tau) = ae^{-\alpha|\tau|}$, полное время записи $T \gg \frac{1}{\alpha}$. Известно, что $\bar{x} = 0$, а функцию $X(t)$ можно считать нормальной.

Решение. Так как $\bar{x} = 0$, то при использовании непрерывной записи значение $\tilde{K}_x(0)$ определяется по формуле

$$\tilde{K}_1(0) = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt.$$

Для нахождения дисперсии $\tilde{K}_1(0)$ имеем

$$\begin{aligned} D[\tilde{K}_1(0)] &= M[\tilde{K}_1^2(0)] - (M[\tilde{K}_1(0)])^2 = \\ &= \frac{2}{T^2} \int_0^T \int_0^T K_x^2(t_2 - t_1) dt_1 dt_2 \approx \frac{4}{T^2} a^2 \int_0^T (T - \tau) e^{-2a\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Отбрасывая после интегрирования величины, содержащие малый (по условию) множитель e^{-aT} , получим

$$D[\tilde{K}_1(0)] = \frac{a^2}{T^2} (2aT - 1).$$

При дискретном определении ординат случайной функции значение $\tilde{K}_x(0)$ равно

$$\tilde{K}_2(0) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m x^2(j\Delta).$$

Определяя дисперсию $\tilde{K}_2(0)$, получим

$$\begin{aligned} D[\tilde{K}_2(0)] &= \frac{1}{m^2} \left\{ \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m M[X^2(j\Delta) X^2(l\Delta)] - m^2 K_x^2(0) \right\} = \\ &= \frac{2}{m^2} \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m K_x^2(l\Delta - j\Delta), \end{aligned}$$

где при вычислении математического ожидания использовано свойство моментов системы нормальных случайных величин.

Подставляя значение $\tilde{K}_x(\tau)$, получим

$$\begin{aligned} D[\tilde{K}_2(0)] &= \frac{2a^2}{m^2} \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m e^{-2a|l-m|\Delta} = \\ &= \frac{4a^2}{m^2} \sum_{r=0}^m (m-r) e^{-2ar\Delta} - \frac{2a^2}{m} = \\ &= \frac{2a^2\Delta}{T^2} \frac{T(1 - e^{-4a\Delta}) - 2\Delta e^{-2a\Delta}}{(1 - e^{-2a\Delta})^2}. \end{aligned}$$

Граничное значение Δ найдется из уравнения

$$\frac{D[\tilde{K}_2(0)]}{D[\tilde{K}_1(0)]} = 1 + 0,01\delta,$$

т. е. из уравнения

$$\frac{2\alpha^2 \Delta [T(1 - e^{-4\alpha\Delta}) - 2\Delta e^{-2\alpha\Delta}]}{(2\alpha T - 1)(1 - e^{-2\alpha\Delta})^2} = 1 + 0,01\delta.$$

При $\alpha\Delta \ll 1$ приближенно получим

$$\alpha\Delta = \frac{-5\kappa + \sqrt{25\kappa^2 + 12(1 - 11\kappa)}}{2(1 - 11\kappa)}, \quad \kappa = \frac{2\alpha T - 1}{2\alpha T - 3} \frac{\delta}{100}.$$

Задачи

46.1. Доказать, что условие

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} K_x(\tau) = 0$$

является необходимым условием для того, чтобы функция $X(t)$ была эргодичной.

46.2. Проверить, можно ли в качестве оценки спектральной плотности взять выражение

$$\tilde{S}_x(\omega) = \frac{1}{T} \left| \int_0^T e^{i\omega t} x(t) dt \right|^2,$$

если $X(t)$ — нормальная стационарная случайная функция ($\bar{x} = 0$), $\int_0^\infty |K(\tau)| d\tau < \infty$.

46.3. Для определения оценки корреляционной функции стационарного нормального случайного процесса $X(t)$ ($\bar{x} = 0$) используется коррелятор, работающий по формуле

$$\tilde{K}_x(\tau) = \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T - \tau} x(t) x(t + \tau) dt.$$

Вывести формулу для $D[\tilde{K}_x(\tau)]$.

46.4. Определить математические ожидания и дисперсии оценок корреляционных функций, определяемых по одной из формул

$$\tilde{K}_1(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} x(t) x(t+\tau) dt - (\tilde{x})^2,$$

$$\tilde{K}_2(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} [x(t) - \tilde{x}][x(t+\tau) - \tilde{x}] dt,$$

где $\tilde{x} = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} x(t) dt$, если $X(t)$ — нормальная случайная функция.

46.5. Корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$ имеет вид

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}.$$

Найти дисперсию оценки математического ожидания, определяемой по формуле

$$\tilde{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt.$$

46.6. Спектральная плотность $\tilde{S}_x(\omega)$ найдена путем обращения по Фурье подходящего значения корреляционной функции. Определить $D[\tilde{S}_x(\omega)]$ как функцию ω , если

$$\tilde{K}_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t+\tau) dt, \quad \bar{x} = 0,$$

процесс нормальный, а при решении задачи вместо $K_x(\tau)$ в окончательной формуле можно взять

$$\tilde{K}_x(\tau) = ae^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|).$$

46.7. Корреляционная функция $K_x(\tau)$, определяемая из опыта, используется для нахождения дисперсии стационарного решения дифференциального уравнения

$$\dot{Y}(t) + 2Y(t) = X(t).$$

Определить, во сколько раз изменится σ_y , если вместо выражения

$$\tilde{K}_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-0,21|\tau|} (\cos 0,75\tau + 0,28 \sin 0,75|\tau|),$$

достаточно точно аппроксимирующего $K_x(\tau)$, принять выражение

$$\tilde{K}'_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha_1|\tau|} \cos \beta_1\tau,$$

где α_1 и β_1 подобраны таким образом, чтобы положение первого нуля и ордината первого минимума выражения $\tilde{K}'_x(\tau)$ совпали с соответствующими величинами для $K_x(\tau)$.

46.8. Подходящее значение $K_x(\tau)$ используется для нахождения $D[Y(t)]$, где

$$Y(t) = \frac{dX(t)}{dt}.$$

Определить, во сколько раз изменится σ_y , если вместо выражения

$$\tilde{K}_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-0,10|\tau|} (\cos 0,7\tau + \frac{1}{7} \sin 0,7|\tau|),$$

достаточно точно аппроксимирующего выражение $K_x(\tau)$, принять

$$\tilde{K}'_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha^2\tau^2} \cos \beta\tau,$$

где α и β подобраны так, что положение первого нуля и значение первого минимума у функций $\tilde{K}_x(\tau)$ и $\tilde{K}'_x(\tau)$ совпадают.

46.9. Корреляционная функция угла крена корабля приближенно может быть представлена в виде

$$\tilde{K}_\theta(\tau) = a e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right),$$

где $a = 36 \text{ град}^2$, $\alpha = 0,05 \text{ сек.}^{-1}$, $\beta = 0,75 \text{ сек.}^{-1}$.

Определить $D[\tilde{K}_\theta(\tau)]$ при $\tau = 0$ и $\tau = 3 \text{ сек.}$, если $\Theta(t)$ — нормальная случайная функция, а $\tilde{K}_\theta(\tau)$ получена в результате обработки записи качки за время $T = 20 \text{ мин.}$

46.10. Ордината оценки корреляционной функции при $\tau = 0$ равна 100 см^2 , а при $\tau = \tau_1 = 4,19 \text{ сек.}$ достигает

наибольшего по модулю отрицательного значения, равного $-41,5 \text{ см}^2$. По этим данным подобрать аналитическое выражение для $\tilde{K}(\tau)$:

а) в виде $\tilde{K}(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right)$;

б) в виде $\tilde{K}(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau$.

Определить, насколько отличается для этих двух случаев значение первого нуля функции $\tilde{K}(\tau)$.

46.11. Определить $D[\tilde{K}_\theta(\tau)]$ при $\tau = 0$; 2,09; 4,18 и 16,72 сек., если

$$\tilde{K}_\theta(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} \theta(t) \theta(t+\tau) dt,$$

$$K_\theta(\tau) = a e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau,$$

где $a = 25 \text{ град}^2$, $\alpha = 0,12 \text{ сек.}^{-1}$, $\beta = 0,75 \text{ сек.}^{-1}$, $\Theta(t)$ — нормальная случайная функция, $\bar{\theta} = 0$. Для определения $K_\theta(\tau)$ использована запись реализации $\Theta(t)$ длиной 10 м, причем 1 см графика по оси времени соответствует 1 сек.

46.12. График реализации случайной функции $X(t)$, нанесенный на бумажную ленту проводящим электрический ток составом, протаскивается с постоянной скоростью под двумя контактами, смещенными один относительно другого по направлению оси времени на расстояние, соответствующее τ сек. Контакты соединены с релейной схемой таким образом, что реле включает секундомер в том случае, когда ординаты реализации в точках, где находятся контакты, имеют одинаковые знаки, и выключает в противоположном случае. Показать, что если $\bar{x} = 0$, а $X(t)$ — нормальная стационарная случайная функция, то оценка ее нормированной корреляционной функции может быть определена по формуле

$$\tilde{k}(\tau) = \cos \pi \left(1 - \frac{t_1}{t} \right),$$

где t_1 — суммарный отсчет секундомера, t — общее время движения ленты.

46.13. В условиях предыдущей задачи определить $D[\tilde{k}(5)]$, если для определения $\tilde{k}(5)$ использован график реализации

случайной функции, соответствующий времени записи $T = 10$ мин.,

$$k(\tau) = e^{-a|\tau|}, \quad a = 0,2 \text{ сек.}^{-1}$$

46.14. В результате обработки трех реализаций одной и той же стационарной случайной функции $X(t)$ длительностью T_1 , T_2 и T_3 получено три графика оценок корреляционной функции. Предполагая процесс нормальным, вывести формулу для получения ординат оценки корреляционной функции $\tilde{K}_x(\tau)$ с учетом всего опытного материала, исходя из требования минимальной дисперсии ошибки, если для каждой реализации оценка корреляционной функции определялась по формуле

$$\tilde{K}_j(\tau) = \frac{1}{T_j} \int_0^{T_j} x(t) x(t + \tau) dt, \quad j = 1, 2, 3 \quad (\bar{x} = 0).$$

46.15. Определить дисперсию оценки корреляционной функции нормального случайного процесса с нулевым математическим ожиданием, если для нахождения $\tilde{K}_x(\tau)$ взяты ординаты реализации случайной функции через равные интервалы Δ , длительность записи $T = m\Delta$, а в окончательной формуле допустимо $K_x(\tau)$ заменить на $\tilde{K}_x(\tau)$.

46.16. Ординаты случайной функции определяются путем фотографирования шкалы прибора через равные промежутки времени $\Delta = 1$ сек. Определить, во сколько раз изменится $D[\tilde{K}(0)]$ сравнительно с дисперсией, полученной при обработке непрерывного графика реализации, если

$$K(\tau) = ae^{-0,5|\tau|}$$

(τ дано в секундах), процесс нормальный, время наблюдения $T = 5$ мин.

46.17. Для приближенного определения ординат реализации стационарной случайной функции $X(t)$, имеющей нулевое математическое ожидание и заданную корреляционную функцию $K_x(\tau)$, используется формула

$$X(t) = \sum_{j=0}^m \left(A_j \cos \frac{2\pi jT}{T} + B_j \sin \frac{2\pi jT}{T} \right) a_j,$$

где A_j, B_j — взаимно несвязанные случайные величины с единичными дисперсиями и нулевыми математическими ожиданиями, T — заданное число. Определить постоянные σ_j так, чтобы

$$\varepsilon \equiv \int_0^T [K_x(\tau) - \tilde{K}_x(\tau)]^2 d\tau = \min.$$

где $\tilde{K}_x(\tau)$ — корреляционная функция, соответствующая выписанному выше приближенному выражению для $X(t)$. Определить величину ε при оптимальных значениях постоянных.

46.18. При измерении слабого тока зеркальным гальванометром для уменьшения влияния случайного дрожания рамки гальванометра произведена запись показаний прибора длительностью $T = 10$ сек. и значение \tilde{J} средней ординаты этой записи принято за искомое значение силы тока. Определить среднюю ошибку результата, если дрожание рамки характеризуется корреляционной функцией силы тока $J(t)$:

$$K(\tau) = ae^{-\alpha|\tau|},$$

где

$$a = 10^{-16} A^2, \quad \alpha = 10^{-1} \text{ сек.}^{-1}$$

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

Глава I СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

§ 1. Соотношения между случайными событиями

1.1. По определению $A + A = A$, $AA = A$. 1.2. Событие A — частный случай события B . 1.3. $B = A_6$, $C = A_5$.

1.4. а) Достоверное событие U ; б) невозможное событие V .

1.5. а) Взята хотя бы одна книга; б) взято хотя бы по одному тому из всех трех сочинений; в) взята одна книга из первого сочинения или три из второго или одна из первого и три из второго; г) взято по два тома из первого и второго сочинений; д) взяты хотя бы один том из третьего сочинения и, кроме того, взяты один том из первого сочинения и три из второго или один из второго и три из первого.

1.6. Выбранное число оканчивается цифрой 5.

1.7. \bar{A} — все изделия доброкачественные; \bar{B} — бракованных изделий одно или нет ни одного.

1.8. Учитывая свойства событий ($B + B = B$, $BB = B$, $B + \bar{B} = U$, $B\bar{B} = \bar{B}$, $B + V = B$), получаем $A = BC$.

1.9. а) A — попадание в область S_A , \bar{A} — вне S_A . Тогда $A + B = U$, т. е. должно быть $A = V$, $B = U$; б) $\bar{A}\bar{B}$ — попадание в область S_{AB} , общую для S_A и S_B ; \bar{A} — вне S_A . Тогда $AB = V$, т. е. должно быть $A = U$, $B = V$; в) $\bar{A}\bar{B}$ — попадание в общую область S_{AB} ; $A + B$ — в S_{A+B} ; $S_{AB} = S_{A+B}$ только при $S_A = S_B$, т. е. должно быть $A = B$.

1.10. $X = \bar{B}$. 1.11. Воспользоваться равенствами $\bar{A} = \bar{A}B + \bar{A}\bar{B}$, $\bar{B} = \bar{A}\bar{B} + \bar{A}\bar{B}$.

1.12. Эквивалентность показывается переходом к противоположным событиям. Равенства доказываются переходом от n к $n + 1$. 1.13. Нет, так как $\overline{A + B} = \bar{A}\bar{B}$.

1.14. Воспользоваться равенством $\overline{A + B} = \bar{A}\bar{B}$. 1.15. C — ишнейный исход.

1.16. $C = A(B_1 + B_2)$, $\bar{C} = \bar{A} + \bar{B}_1\bar{B}_2$. 1.17. $D = A(B_1 + B_2 + B_3 + B_4)(C_1 + C_2)$, $\bar{D} = \bar{A} + \bar{B}_1\bar{B}_2\bar{B}_3\bar{B}_4 + \bar{C}_1\bar{C}_2$.

1.18. $C = (A_1 + A_2)(B_1B_2 + B_1B_3 + B_2B_3)$.

§ 2. Непосредственный подсчет вероятностей

2.1. $p = \frac{rm}{n}$. 2.2. $\frac{4}{9}$. 2.3. $p = 0,25$, так как первая карта может быть любой масти. 2.4. $\frac{1}{6^5} \approx 0,00013$. 2.5. $\frac{23}{240}$.

2.6. Очередность извлечения при таких условиях не имеет значения, поэтому $p = \frac{2}{9}$.

2.7. Можно считать, что для контроля детали берутся из общей партии; $p = \frac{n-k}{n+m-k}$.

2.8. Можно рассматривать только однозначные числа. а) 0,2; б) 0,4; в) 0,04.

2.9. а) $N = a + 10b$. Условию удовлетворяют только случаи, когда a — четное и $a + b$ делится на 9; $p = \frac{1}{18}$; б) $N = a + 10b + 100c$. Это число должно делиться на 4 и на 9, т. е. $a + b + c$ делится на 9; $a + 2b$ — на 4 ($m = 22$); $p = \frac{11}{360}$.

2.10. $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{10^5 - 1} \approx 0,302$. 2.11. $\frac{8 \cdot 7! \cdot 3!}{10!} = \frac{1}{15}$. 2.12. $\frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{5}{14}$.

2.13. 0,3. 2.14. а) $\frac{5}{9}$; б) $\frac{2}{9}$; в) $\frac{7}{9}$. 2.15. $p = \frac{C_n^s C_m^{k-s}}{C_{n+m}^k}$.

2.16. $p_k = \frac{C_5^k}{C_{90}^k}$ ($k = 1, 2, 3, 4, 5$), $p_1 = 0,0556$, $p_2 = 0,0025$, $p_3 =$

$= 0,85 \cdot 10^{-4}$, $p_4 = 0,2 \cdot 10^{-5}$, $p_5 = 0,2 \cdot 10^{-7}$. 2.17. а) $\frac{C_2^1 C_{2n-2}^{n-1}}{C_{2n}^n} = \frac{n}{2n-1}$;

б) $2 \frac{C_2^2 C_{2n-2}^{n-2}}{C_{2n}^n} = \frac{n-1}{2n-1}$. 2.18. $p = \frac{C_{n+k-m}^{n-m}}{C_{n+k}^n}$. 2.19. $p = \frac{C_4^1 C_4^1 C_4^1}{C_{52}^3} =$
 $= 0,0029$.

2.20. $n = C_{36}^3 = 7140$. Благоприятствующие комбинации: 1) (7, 7, 7); 2) (9, 9, 3), (9, 6, 6); 3) (2, 8, 11), (2, 9, 10), (3, 7, 11), (3, 8, 10), (4, 6, 11), (4, 7, 10), (4, 8, 9), (6, 7, 8), поэтому $m = 4 + 2 \cdot 4 \cdot C_4^2 + 4^3 \cdot 8 = 564$; $p = 0,079$.

2.21. а) $p = 1 - \frac{C_5^1 C_3^1 C_2^1}{C_{10}^3} = 0,75$; б) $= \frac{C_3^1 C_3^2 + C_5^2 C_2^1}{C_{10}^3} = \frac{7}{24}$.

2.22. Необходимо получить $n - m$ пятакот от $2n$ покупателей. Число возможных случаев C_{2n}^{n-m} ; $p = 1 - \frac{N}{C_{2n}^{n-m}}$, где N — число

случаев, когда невозможно продать $2n$ билетов; $N = \sum_{i=1}^{n-m} N_i$;

$N_1 = C_{2n-(2m+1)}^{n-m}$ — число случаев, когда первый пятак поступил от $(2m+2)$ -го покупателя; $N_2 = C_{2n-(2m+3)}^{n-m-1}$ — число случаев, когда первый пятак поступил не позднее, чем от $(2m+1)$ -го, а второй — от $(2m+4)$ -го и т. д.; $p = 1 - \frac{1}{C_{2n}^{n-m}} \sum_{i=1}^{n-m} C_{2i-1}^i$.

§ 3. Геометрические вероятности

3.1. $p = 1 - \frac{l}{L}$. 3.2. $p = \frac{3}{9,5} \approx 0,316$. 3.3. $p = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,134$.

3.4. Построение: AB — отрезок длиной $2h$, C — центр диска, AD и BE — касательные к диску, расположенные по одну сторону от прямой AC . Треугольники ADC , BEC совпадают при повороте на угол $\varphi = \angle DCE$, поэтому $\angle ACB = \varphi$, $h = l \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$; $p = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{h}{l}$.

3.5. $p = 1 - \left(1 - \frac{2r+d}{a}\right) \left(1 - \frac{2r+d}{b}\right)$. 3.6. а) 0,0185;

б) $p = \frac{160+25\pi}{1000\pi} = 0,076$. 3.7. а) 0,16; б) 0,6. 3.8. x — расстояние от берега до лодки, y (с соответствующим знаком) — от лодки до линии курса судна. Возможные значения: $x \leq 1 \cdot v$; при $y > 0$ $x + y \leq 1 \cdot v$, при $y < 0$ $|y| \leq x$ (v — скорость лодки, $1 = 1$ час).

Благоприятствующие значения: $|y| \leq \frac{1}{3}v$; $p = \frac{5}{9}$. 3.9. $k(2-k)$.

3.10. $x = AL$, $y = AM$. Возможные значения: $0 \leq x + y \leq L$. Благоприятствующие значения: $|y - x| \leq x$, $p = 0,75$.

3.11. Два отрезка x , y . Возможные значения: $0 \leq x + y \leq l$. Благоприятствующие значения: $x \leq \frac{l}{2}$, $y \leq \frac{l}{2}$, $x + y \geq \frac{l}{2}$; $p = \frac{1}{4}$.

3.12. Две дуги x , y . Возможные значения: $0 \leq (x+y) \leq 2\pi R$. Благоприятствующие значения: $x \leq \pi R$, $y \leq \pi R$, $x + y \geq \pi R$; $p = \frac{1}{4}$.

3.13. Отрезки x , y , z . Возможные значения: $0 \leq (x; y; z) \leq l$. Благоприятствующие значения: $x + y \geq z$, $x + z \geq y$, $y + z \geq x$; $p = 1/2$.

3.14. $AM = x$, $MN = y$. Возможные значения: $0 \leq x + y \leq l$. Благоприятствующие значения: $x \leq a$, $y \leq a$, $x + y \geq l - a$. При $\frac{l}{3} \leq a \leq \frac{l}{2}$ $p = \left(1 - \frac{3a}{l}\right)^2$; при $\frac{l}{2} \leq a \leq l$ $p = 1 - 3\left(1 - \frac{a}{l}\right)^2$.

3.15. x — произвольный момент времени, $0 \leq x \leq 12$ мин. Моменты прихода автобуса линии A : $x = 0; 4; 8$; моменты прихода автобуса линии B : $y; y+6$, где $0 \leq y \leq 4$. а) Благоприятствующие значения: при $0 < y \leq 2$ $y < x \leq 4$, $6 + y \leq x \leq 12$; при $y > 2$

$y < x < 8$ или $y + 6 < x < 12$; $p = \frac{2}{3}$. б) Благоприятствующие значения: $2 \leq x \leq 4$, $6 \leq x \leq 8$, $10 \leq x \leq 12$, $4 + y \leq x \leq 6 + y$; при $y < 2$ $0 < x \leq y$, а при $y > 2$ $y - 2 \leq x \leq y$; $p = \frac{2}{3}$.

3.16. x, y — время прибытия пароходов. Возможные значения: $0 \leq x \leq 24$; $0 \leq y \leq 24$. Благоприятствующие значения: $y - x \leq 1$; $x - y \leq 2$; $p = 0,121$.

3.17. $p = 1 - \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2$.

3.18. x — расстояние от берега до первого судна, y — до второго. Возможные значения: $0 \leq (x; y) \leq L$. Благоприятствующая область $|x - y| \leq d \sqrt{1 + \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2}$ получается при переходе к относительному движению (первое судно стоит, второе — движется со скоростью $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$);

при $L \geq d \sqrt{1 + \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2}$ $p = 1 - \left[1 - \frac{d}{L} \sqrt{1 + \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2}\right]^2$;

при $L \leq d \sqrt{1 + \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2}$ $p = 1$.

3.19. а) $p = 1 - \left(\frac{19}{20}\right)^2 = 0,0975$; б) x, y, z — координаты точек излома. Возможные значения: $0 \leq (x; y; z) \leq 200$. Благоприятствующие значения: $|x - y| \leq 10$, $|x - z| \leq 10$, $|y - z| \leq 10$; $p = 1 - \left(\frac{180}{200}\right)^3 = 0,271$.

3.20. $p = \frac{2\pi R^2 (1 - \cos \alpha)}{4\pi R^2} = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$.

3.21. $p = \left\{ R^2 \int_0^{2\pi} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos \varphi \, d\varphi \, d\psi \right\} : \left\{ 2R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \cos \varphi \, d\varphi \, d\psi \right\} = 0,21$.

3.22. x — расстояние от середины иглы до ближайшей линии, φ — угол между линией и иглой. Возможные значения: $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$; благоприятствующие значения: $x \leq \frac{l}{2} \sin \varphi$; $p = \frac{2l}{L\pi}$.

3.23. Возможные значения: $|a| \leq n$, $|b| \leq m$. а) Благоприятствующие значения: $b \leq a^2$. При $m \geq n^2$ $p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2nm} \int_0^n a^2 \, da = \frac{1}{2} + \frac{n^2}{6m}$. При $m \leq n^2$ $p = 1 - \frac{1}{2nm} \int_0^m \sqrt{b} \, db = 1 - \frac{\sqrt{m}}{3n}$.

Корни будут положительными, если $a \leq 0$, $b \geq 0$. При $m \geq n^2$ $p = \frac{n^2}{12m}$; при $m \leq n^2$ $p = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{m}}{6n}$. б) Корни уравнения будут вещественны, если $b^2 + a^3 \leq 0$. Область благоприятствующих значений

коэффициентов: $a \leq 0$, $b^2 \leq -a^3$. При $n^3 \leq m^2$ $p = \frac{1}{2nm} \int_0^n a^{3/2} da = \frac{n^{5/2}}{5m}$. При $n^3 \geq m^2$ $p = \frac{1}{2} - \frac{1}{2nm} \int_0^m b^{2/3} db = \frac{1}{2} \left(1 - 0,6 \frac{m^{2/3}}{n} \right)$.

3.24. Пусть A и B — положения движущейся точки и центра круга, u и v — их векторы скоростей, r — расстояние AB . Из точки B

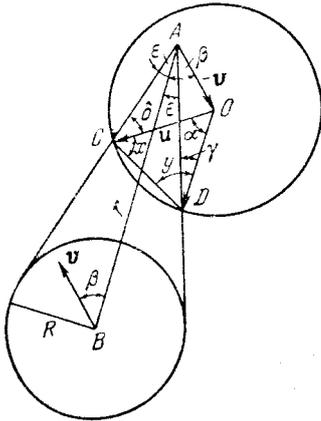


Рис. 41.

проведем окружность радиуса R . Считаем $\beta > 0$, если вектор v лежит левее линии AB , $-\pi \leq \beta \leq \pi$. Из точки A проводим касательные к окружности радиуса R . Точка A попадет в круг, если вектор относительной скорости попадет в получившийся сектор с углом при вершине 2ε ,

$\varepsilon = \arcsin \frac{R}{r}$. Из точки A проводим

вектор $-v$. Пусть точка O — конец этого вектора. Из точки O проводим окружность, радиус которой по величине совпадает со скоростью точки A . Точка A попадет в круг только в том случае, если вектор $u - v$ лежит в секторе. Пусть $u > v$. Тогда искомая вероятность будет

(рис. 41) $p = \frac{\alpha}{2\pi}$. Для определения α

положим $\delta = \angle OCA$, $x = \angle OCD$, $y = \angle ODC$, $\gamma = \angle ADO$. Тогда $\alpha = 2\varepsilon + \delta - \gamma$. Используя равенства

$$\frac{\sin \gamma}{v} = \frac{\sin(\beta - \varepsilon)}{u} \quad \text{и} \quad \frac{\sin \delta}{v} = \frac{\sin(\beta + \varepsilon)}{u},$$

получаем

$$p = \frac{1}{2\pi} \left\{ 2\varepsilon + \arcsin \left[\frac{v}{u} \sin(\beta + \varepsilon) \right] - \arcsin \left[\frac{v}{u} \sin(\beta - \varepsilon) \right] \right\}.$$

Данная формула справедлива при любом β . При $v > u$ задача решается аналогично, но при этом нужно рассматривать несколько случаев: 1) $|\beta| \geq \varepsilon + \frac{\pi}{2}$; $p = 0$. 2) $\frac{\pi}{2} + \varepsilon \geq |\beta| \geq \varepsilon$: а) при $u \leq v \sin(|\beta| - \varepsilon)$ будет $p = 0$; б) при $v \sin(|\beta| - \varepsilon) \leq u \leq$

$\leq v \sin(|\beta| + \epsilon)$ имеем $p = \frac{1}{\pi} \arccos \left[\frac{v}{u} \sin(|\beta| - \epsilon) \right]$; в) при $u > v \sin(|\beta| + \epsilon)$ будет

$$p = \frac{1}{\pi} \left\{ \arccos \left[\frac{v}{u} \sin(|\beta| - \epsilon) \right] - \arccos \left[\frac{v}{u} \sin(|\beta| + \epsilon) \right] \right\}.$$

3) $|\beta| \leq \epsilon$: а) при $u \leq v \sin(\epsilon - |\beta|)$ будет $p = 1$; б) при $v \sin(\epsilon - |\beta|) \leq u \leq v \sin(\epsilon + |\beta|)$ имеем $p = 1 - \frac{1}{\pi} \arccos \left[\frac{v}{u} \sin(\epsilon - |\beta|) \right]$; в) при $u > v \sin(\epsilon + |\beta|)$ будет

$$p = 1 - \frac{1}{\pi} \left\{ \arccos \left[\frac{v}{u} \sin(\epsilon - |\beta|) \right] + \arccos \left[\frac{v}{u} \sin(\epsilon + |\beta|) \right] \right\}.$$

§ 4. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей

4.1. $p = 1 - 0,3 \cdot 0,2 = 0,94$. 4.2. $p = 1 - \prod_{k=1}^n (1 - p_k)$. 4.3. $p = 1 - (1 - 0,2)^3 = 0,512$. 4.4. 0,251. 4.5. $p = 1 - (1 - 0,3)(1 - 0,2^2) = 0,328$. 4.6. $p(1 - p)^{n-1}$. 4.7. $1 - 0,5^n \geq 0,9; n \geq 4$. 4.8. $1 - (1 - p)^4 = 0,5; p \approx 0,159$. 4.9. $p = \left(\frac{S_{\Delta}}{\pi R^2} \right)^4 = \frac{729}{256\pi^4} = 0,029$. 4.10. $p = \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \times \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) \left(1 - \frac{1}{5^2} \right) \left(1 - \frac{1}{7^2} \right) \left(1 - \frac{1}{11^2} \right) \dots = \frac{6}{\pi^2} \approx 0,608^1$. 4.11. Из несовместности событий следует $P(A|B) = 0$ и $P(B|A) = 0$, т. е. события независимы. 4.12. $p_1 p_2$. 4.13. $p = 0,7 \cdot 0,9^{12} = 0,197$. 4.14. $p = 0,7^2 (1 - 0,6^2) = 0,314$. 4.15. 0,75. 4.16. $p_1 = 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,7 \times 0,9 \approx 0,45; p_2 = 0,7^2 \cdot 0,8 \approx 0,39$. 4.17. а) $0,1 = (p_1 p_3)^n$, т. е. $n = \frac{-1}{\lg p_1 p_3}$; б) $p = 1 - (1 - p_1 p_3)^3 (1 - p_2 p_4)^3$. 4.18. Следует из равенства $P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$. 4.19. $p = 2 \left(\frac{k}{n} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{k}{n} \right)^2 \right]$. 4.20. $p = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{360}$. 4.21. а) $p = 1 - \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} = 0,3$; б) $p = 1 - \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = 0,6$. 4.22. $p = 1 - \frac{(n-m)!(n-k)!}{n!(n-m-k)!}$. 4.23. а) $p = 1 - \frac{39\,997! \cdot 39\,000!}{40\,000! \cdot 38\,997!} \approx 1 - \left(\frac{39}{40} \right)^3 = 0,073$; б) $0,5 \geq \frac{(40\,000 - N)(39\,999 - N)(39\,998 - N)}{40\,000 \cdot 39\,999 \cdot 39\,998} \approx \left(\frac{40\,000 - N}{40\,000} \right)^3$, $N \geq 8252$.

¹⁾ Решение см. в книге А. М. Яглом и И. М. Яглом, Неэлементарные задачи в элементарном изложении, Гостехиздат, 1954, стр. 314—315, решение задачи 90.

$$4.24. \text{ а) } p = 1 - \frac{(100\,000 - 170)}{100\,000} \cdot \frac{(100\,000 - 2 \cdot 170)}{(100\,000 - 170)} \dots$$

$$\dots \frac{(100\,000 - 60 \cdot 170 - 10 \cdot 230)}{(100\,000 - 59 \cdot 170 - 10 \cdot 230)} = 1 - \frac{(100\,000 - 60 \cdot 170 - 10 \cdot 230)}{100\,000} =$$

$$= 0,125;$$

$$\text{ б) } p_{\text{доп}} = 1 - \frac{(100\,000 - 5 \cdot 170 - 230)}{(100\,000 - 5 \cdot 170)} \frac{(100\,000 - 11 \cdot 170 - 2 \cdot 230)}{(100\,000 - 11 \cdot 170 - 230)} \dots$$

$$\dots \frac{(100\,000 - 59 \cdot 170 - 10 \cdot 230)}{(100\,000 - 59 \cdot 170 - 9 \cdot 230)} \approx 0,0246;$$

$$\text{ в) } p = 1 - (1 - p_{\text{доп}})(1 - p_{\text{осп}}), \quad p_{\text{осп}} = 1 - \frac{1 - p}{1 - p_{\text{доп}}} = 0,1029.$$

4.25. $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$, $P(A|B) = P(B|A) =$
 $= P(C|A) = P(A|C) = P(B|C) = P(C|B) = \frac{1}{2}$, т. е. события
 попарно независимы; $P(A|BC) = P(B|AC) = P(C|AB) = 1$, т. е.
 события не являются независимыми в совокупности. 4.26. Нет (см.,
 например, задачу 4.25). 4.27. $p = \frac{n!}{n^n}$.

$$4.28. p = 2 \frac{n}{2n} \cdot \frac{n}{(2n-1)} \cdot \frac{(n-1)}{(2n-2)} \frac{(n-1)}{(2n-3)} \dots \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{2(n!)^2}{(2n)!}.$$

$$4.29. p = \frac{C_5^1 C_{10}^2}{C_{15}^3} \frac{C_4^1 C_8^2}{C_{12}^3} \frac{C_3^1 C_6^2}{C_9^3} \frac{C_2^1 C_4^2}{C_6^3} \cdot 1 = \frac{3^5 5! 10!}{15!} = 0,081.$$

$$4.30. p = \frac{C_n^1 C_m^1}{C_{n+m}^2} \frac{C_{n-1}^1 C_{m-1}^1}{C_{n+m-2}^2} \dots \frac{1 \cdot C_{m-(n-1)}^1}{C_{m-n+2}^2} = \frac{2^n n! m!}{(n+m)!}.$$

$$4.31. p = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(n-1)} \dots \frac{1}{[n-(k-1)]} = \frac{(n-k)!}{n!}.$$

$$4.32. p = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{99}{100} = \frac{100!}{2^{100} (50!)^2} \approx 0,08.$$

4.33. Пусть a_1, a_2, \dots, a_n — покупатели с деньгами пятирублевого достоинства, а b_1, b_2, \dots, b_m — десятирублевого, причем их номера соответствуют порядку в очереди. Событие A_k состоит в том, что придется ждать сдачи только из-за покупателя b_k ($k = 1, 2, \dots, m$);

$$p = \prod_{k=1}^m P(\bar{A}_k) = \frac{n}{(n+1)} \frac{(n-1)}{n} \dots \frac{(n-m+1)}{(n-m+2)} = \frac{n-m+1}{n+1}.$$

4.34. Решается так же, как и задача 4.33;

$$P(A_k) = \frac{2}{n-2k+3}, \quad p = \prod_{k=1}^m P(\bar{A}_k) = \frac{n-2m+1}{n+1}.$$

4.35. Первый извлеченный бюллетень должен быть подан за первого кандидата. Вероятность этого $\frac{n}{n+m}$. Затем бюллетени должны идти в такой последовательности, чтобы бюллетеней, поданных за первого кандидата, всегда было извлечено не меньше, чем за второго. Вероятность этого события равна $\frac{n-m}{n}$ (см. задачу 4.33);

$$p = \frac{n}{(n+m)} \frac{(n-m)}{n} = \frac{n-m}{n+m}.$$

§ 5. Теорема сложения вероятностей

5.1. 0,03. 5.2. 0,55. 5.3. $p_k = \sum_{j=1}^n p_{kj}$. 5.4. $2 \left(\frac{r}{R}\right)^2$. 5.5. $\frac{11}{26}$.

5.6. $p = 1 - \frac{1}{C_{17}^6} (C_{10}^6 + C_{10}^5 C_5^1 + C_{10}^4 C_2^1 + C_{10}^4 C_5^2 + C_{10}^4 C_5^1 C_2^1 + C_{10}^3 C_5^3) \approx 0,4$.

5.7. $P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB)$.

5.8. $P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B) = [P(A) + P(\bar{A})] P(B|A) = P(B|A)$.

5.9. $P(B) = P(A) + P(B\bar{A}) \geq P(A)$. 5.10. 0,323. 5.11. 0,5.

5.12. npq^{m-1} , 5.13. а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{5}{6}$.

5.14. A — первый билет имеет равные суммы; B — второй. а) $P(A+B) = 2P(A) = 0,1105$; б) $P(A+B) = 2P(A) - P^2(A) = 0,1075$.

5.15. Из $P(A+B) \leq 1$ следует $P(B) - P(AB) \leq P(\bar{A})$ или

$$P(A|B) \geq 1 - \frac{P(\bar{A})}{P(B)} = \frac{a+b-1}{b}.$$

5.16. Из $Z = X + Y$ следует: $Z \leq X + |Y|$, $Z \geq X - |Y|$, $P(Z \leq 11) \geq P(X \leq 10 \text{ и } |Y| \leq 1) = P(X \leq 10) + P(|Y| \leq 1) - P(X \leq 10 \text{ или } |Y| \leq 1) \geq 0,9 + 0,95 - 1 = 0,85$; $P(Z \geq 9) \geq 0,05$, $P(Z \leq 9) \leq 0,95$. 5.17. 0,44 и 0,35. 5.18. $p(2-p)$. 5.19. $p_B = 0,1 + 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,3 = 0,316$; $p_C = 0,9(0,2 + 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,4) = 0,3816$. 5.20. $p = \frac{1}{n} \frac{1}{(n-1)} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n} = \frac{n^2 - n + 1}{n^2(n-1)}$. 5.21. $p_B \approx 0,8$, $p_C \approx 0,2$.

5.22. $G(m+n) = G(m) + [1 - G(m)]G(n|m)$; $G(n|m) = \frac{G(n+m) - G(m)}{1 - G(m)}$.

5.23. $p_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \dots = \frac{2}{3}$, $p_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots = \frac{1}{3}$.

Другое решение: $p_1 + p_2 = 1$, $p_2 = \frac{1}{2} p_1$, т. е. $p_1 = \frac{2}{3}$, $p_2 = \frac{1}{3}$.

5.24. $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, $p_2 = \frac{1}{2} p_1$, $p_3 = \frac{1}{2} p_2$, т. е. $p_1 = \frac{4}{7}$, $p_2 = \frac{2}{7}$,
 $p_3 = \frac{1}{7}$. 5.25. $p + q = 1$, $q = \frac{1}{2} p$; $p = \frac{2}{3}$. 5.26. $p_1 + p_2 = 1$,
 $p_1 \frac{m}{n+m} = p_2$; $p = p_1 = \frac{n+m}{n+2m}$.

5.27. p_1 — вероятность попадания первым стрелком; p_2 — вторым; $p_1 + p_2 = 1$, $0,2p_2 = 0,8 \cdot 0,3p_1$; $p = p_1 = 0,455$. 5.28. Воспользоваться условием задачи 1.12. 5.29. Подсчитывая количество одинаковых членов, получаем

$$\mathbf{P} \left(\sum_{k=1}^n A_k \right) = C_n^1 \mathbf{P}(A_1) - C_n^2 \mathbf{P}(A_1 A_2) + C_n^3 \mathbf{P}(A_1 A_2 A_3) - \dots \\ \dots + (-1)^{n-1} \mathbf{P} \left(\prod_{k=1}^n A_k \right).$$

5.30. Используя равенство $\prod_{k=1}^n A_k = \overline{\sum_{k=1}^n \bar{A}_k}$ из задачи 1.12 и общую формулу для вероятности суммы событий, получаем

$$\mathbf{P} \left(\prod_{k=1}^n A_k \right) = 1 - \left\{ \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(\bar{A}_k) - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n \mathbf{P}(\bar{A}_k \bar{A}_j) + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{j=k+1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n \mathbf{P}(\bar{A}_k \bar{A}_j \bar{A}_i) - \dots + (-1)^{n-1} \mathbf{P} \left(\prod_{k=1}^n \bar{A}_k \right) \right\}.$$

Но согласно задаче 1.12 $\prod_{k=1}^s \bar{A}_k = \overline{\sum_{k=1}^s A_k}$, поэтому при любом s

$$\mathbf{P} \left(\prod_{k=1}^s \bar{A}_k \right) = 1 - \mathbf{P} \left(\sum_{k=1}^s A_k \right). \text{ Учитывая еще равенство } 1 - C_n^1 + \\ + C_n^2 - \dots + (-1)^n = 0, \text{ приходим к указанной в условии задачи формуле.}$$

5.31. Воспользоваться равенством

$$\mathbf{P} \left(\bar{A}_0 \prod_{k=1}^n A_k \right) = \mathbf{P} \left(\prod_{k=1}^n A_k \right) - \mathbf{P} \left(\prod_{k=0}^n A_k \right)$$

и формулой из условия задачи 5.30.

$$5.32. \quad p = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k!}.$$

5.33. Вероятность, что m человек из n займут свои места, есть $C_n^m \frac{(n-m)!}{n!} = \frac{1}{m!}$. Вероятность того, что оставшиеся $n-m$ человек будут сидеть не на своих местах, равна $\sum_{k=0}^{n-m} \frac{(-1)^k}{k!}$;

$$p = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{n-m} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

5.34. Событие A_j — в j -й вагон не войдет ни один пассажир, $P(A_j) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k$, $P(A_j A_l) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^k$, $P(A_j A_l A_s) = \left(1 - \frac{3}{n}\right)^k$ и т. д. Используя формулу из ответа к задаче 5.29, получаем

$$p = 1 - C_n^1 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k + C_n^2 \left(1 - \frac{2}{n}\right)^k - \dots \\ \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)^k.$$

5.35. Первый игрок выигрывает в следующих n случаях: 1) из m партий не проиграл ни одной; 2) из m партий проиграл одну, но $(m+1)$ -ю партию выиграл; 3) из $m+1$ партий проиграл две, но $(m+2)$ -ю партию выиграл; ... ; n) из $m+n-2$ партий проиграл $n-1$, а затем $(m+n-1)$ -ю выиграл.

$$P = p^m \left(1 + C_m^1 q + C_{m+1}^2 q^2 + \dots + C_{m+n-2}^{n-1} q^{n-1}\right).$$

5.36. Ставка делится пропорционально отношению $\frac{p_1}{p_2}$ вероятностей выигрыша для первого и второго игроков,

$$p_1 = \frac{1}{2^m} \left(1 + \frac{1}{2} C_m^1 + \frac{1}{2^2} C_{m+1}^2 + \dots + \frac{1}{2^{m-1}} C_{m+n-2}^{m-1}\right),$$

$$p_2 = \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{2^2} C_{n+1}^2 + \dots + \frac{1}{2^{m-1}} C_{m+n-2}^{m-1}\right).$$

5.37. Событие A — первый сказал правду; B — четвертый сказал правду; $p = P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$. Пусть p_k — вероятность того, что (с учетом двойных искажений) k -й лгун передал правильную информацию; $p_1 = \frac{1}{3}$, $p_2 = \frac{5}{9}$, $p_3 = \frac{13}{27}$, $p_4 = \frac{41}{81}$, $P(A) = p_1$,

$$P(B|A) = p_3, P(B) = p_4; p = \frac{13}{41}.$$

5.38. Заменяем выпуклый контур многоугольником с n сторонами. Событие A — будет пересечение, линии A_{ij} i -й и j -й

сторонами; $A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n A_{ij}$, $p' = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n p_{ij}$, где $p_{ij} = P(A_{ij})$;

$p' = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n p_k^*$, $p_k^* = \sum_{i=1}^n p_{ki} - p_{kk}$ — вероятность пересечения параллельных линий k -й стороной длины l_k . Из решения задачи

Бюффона 3.22 $p_k^* = \frac{2l_k}{L\pi}$; $p' = \frac{1}{L\pi} \sum_{k=1}^n l_k$. Так как эта вероятность

не зависит от числа и величин сторон, то $p = \frac{s}{L\pi}$.

§ 6. Формула полной вероятности

$$6.1. p = \frac{11}{12} \cdot \frac{1}{11} + \frac{1}{12} \cdot \frac{2}{11} = \frac{13}{132}. \quad 6.2. p = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{9} = \frac{7}{18}.$$

6.3. H_1 — среди извлеченных шаров нет белых; H_2 — один белый; H_3 — оба белых;

$$p = \frac{1}{2} \left(\frac{m_1}{n_1 + m_1} + \frac{m_2}{n_2 + m_2} \right).$$

6.4. H_{j1} — из j -й урны извлекается белый шар; H_{j2} — из j -й урны извлекается черный шар; $P(H_{11}) = \frac{m}{m+k}$, $P(H_{12}) = \frac{k}{m+k}$,

$$P(H_{21}) = \frac{m}{(m+k)} \frac{(m+1)}{(m+k+1)} + \frac{k}{(m+k)} \frac{m}{(m+k+1)} = \frac{m}{m+k},$$

$$P(H_{22}) = \frac{k}{m+k}. \quad \text{Считаем } P(H_{j1}) = \frac{m}{m+k}, \quad P(H_{j2}) = \frac{k}{m+k}.$$

Тогда $P(H_{j+1,1}) = \frac{m}{m+k}$. Поэтому $p = \frac{m}{m+k}$.

6.5. 0,7. 6.6. $\frac{2}{9}$. 6.7. 0,225. 6.8. 0,75. 6.9. 0,332.

6.10. Событие A — получение контакта. Гипотеза H_k — на k -й полосе возможен контакт ($k = 1, 2$). Пусть x — положение центра отверстия, y — точка приложения контакта. $P(H_1) = P(15 \leq x \leq 45) = 0,3$. $P(H_2) = P(60 \leq x \leq 95) = 0,35$. Контакт возможен на первой полосе, если: при $25 \leq x \leq 35$ $|x-y| \leq 5$; при $15 \leq x \leq 25$ $20 \leq y \leq x+5$; при $35 \leq x \leq 45$ $x-5 \leq y \leq 45$. Поэтому $P(A|H_1) = \frac{1}{15}$. Аналогично $P(A|H_2) = \frac{1}{14}$; $p = 0,045$.

6.11. Событие A — поступление s вызовов за промежуток $2t$. Гипотеза H_k ($k = 0, 1, \dots, s$) — за первый промежуток времени по-

сгруппило k вызовов, $P(H_k) = P_t(k)$. Вероятность поступления $s - k$ вызовов за второй промежуток будет

$$P(A|H_k) = P_t(s - k), \quad P_{2t}(s) = \sum_{k=0}^s P_t(k) P_t(s - k).$$

6.12. Гипотеза H_k — имеется k бракованных лампочек, $P(H_k) = \frac{1}{6}$ ($k = 0, 1, \dots, 5$). Событие A — все 100 лампочек исправные,

$$P(A|H_k) = \frac{C_{100-k}^{100}}{C_{100}^{100}} \approx 0,9^k \quad (k = 0, 1, \dots, 5);$$

$$p = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^5 P(A|H_k) \approx 0,78.$$

6.13. Гипотеза H_k — в урне было k белых шаров ($k = 0, 1, \dots, n$); событие A — из урны будет извлечен белый шар, $P(H_k) = \frac{1}{n+1}$,

$$P(A|H_k) = \frac{k+1}{n+1}; \quad p = \frac{n+2}{2(n+1)}.$$

6.14. Гипотеза H_k ($k = 0, 1, 2, 3$) — для первой игры взято k новых мячей. Событие A — для второй игры взято три новых мяча,

$$P(H_k) = \frac{C_9^k C_6^{3-k}}{C_{15}^3}, \quad P(A|H_k) = \frac{C_{9-k}^3}{C_{15}^3}; \quad p = 0,089.$$

$$6.15. \quad p = \frac{1}{14C_7^5} (9C_4^2 + 8C_3^2 C_4^3 + 7C_3^1) = 0,58.$$

$$6.16. \quad p = \frac{25}{30} \cdot \frac{24}{29} + \left(\frac{25}{30} \cdot \frac{5}{29} + \frac{5}{30} \cdot \frac{25}{29} \right) \cdot \frac{24}{28} = \frac{190}{203}.$$

6.17. $P(A) = P(AB) + P(A\bar{B}) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})$. Равенство возможно только в некоторых частных случаях: а) $A = V$; б) $B = U$; в) $B = A$; г) $B = \bar{A}$; д) $B = V$, где U — достоверное, а V — невозможное события.

6.18. По формуле из примера 6.2 следует, что $m \approx 13$, $p \approx 0,67$.

6.19. В первый район 8 вертолетов; $p \approx 0,74$.

§ 7. Вычисление вероятностей гипотез после испытания (формула Байеса)

$$7.1. \quad p = \frac{0,1 \cdot 5/6}{0,9 \cdot 1/2 + 0,1 \cdot 5/6} = \frac{5}{32}. \quad 7.2. \quad p = 1 : \left[1 + \frac{k_2 m_2 (m_1 + n_1)}{k_1 m_1 (m_2 + n_2)} \right].$$

7.3. Гипотезы H_1 — изделие стандартное, H_2 — нестандартное. Событие A — изделие признается пригодным; $P(H_1) = 0,96$, $P(H_2) = 0,04$, $P(A|H_1) = 0,98$, $P(A|H_2) = 0,05$, $P(A) = 0,9428$; $p = P(H_1|A) = 0,998$.

7.4. Гипотезы H_k ($k = 0, 1, \dots, 5$) — имеется k бракованных изделий. Событие A — извлекается бракованное изделие, $P(H_k) = \frac{1}{6}$,

$P(A|H_k) = \frac{k}{5}$, $P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{P(A)}$. Наиболее вероятна гипотеза H_5 , т. е. пять бракованных изделий.

7.5. $P(H_0|A) = \frac{1}{6 \cdot 0,78} = 0,214$ (см. задачу 6.12).

7.6. Событие A — выигрыш игрока D ; гипотеза H_k ($k = 1, 2$) — противником был игрок B или C ; $P(H_k) = 1/2$; $P(A|H_1) = 0,6 \cdot 0,3 + (1-0,18) \cdot 0,7 \cdot 0,5$; $P(A|H_2) = 0,2 \cdot 0,3 + (1-0,06) \cdot 0,4 \cdot 0,7$; $P(H_1|A) = 0,59$; $P(H_2|A) = 0,41$.

7.7. Из второй группы. 7.8. Событие A — попали двое; H_k — промахнулся k -й стрелок;

$$p = P(H_3|A) = \frac{6}{13}.$$

7.9. Событие A — вепрь убит одной пулей, $P(A) = \sum_{k=1}^3 P(H_k)$.

Гипотеза H_k — попал k -й стрелок ($k = 1, 2, 3$); $P(H_1) = 0,048$, $P(H_2) = 0,128$, $P(H_3) = 0,288$, $P(H_1|A) = 0,103$, $P(H_2|A) = 0,277$, $P(H_3|A) = 0,620$.

7.10. В четвертую часть. 7.11. $p = \frac{n^k}{1 + 2^k + \dots + n^k}$.

7.12. События: M_1 — первый близнец — мальчик; M_2 — второй — тоже мальчик. Гипотезы: H_1 — оба мальчика; H_2 — мальчик и девочка;

$$P(M_1) = a + \frac{1}{2}[1 - (a + b)]; \quad p = P(M_2|M_1) = \frac{2a}{1 + a - b}.$$

7.13. События A_k и B_k : k -м родился мальчик и k -й родилась девочка ($k = 1, 2$); $P(A_1A_2) + P(B_1B_2) + 2P(A_1B_2) = 1$,

$P(A_1A_2 + B_1B_2) = 4P(A_1B_2)$. Поэтому $P(A_1A_2) + P(B_1B_2) = \frac{2}{3}$,

$P(A_1B_2) = \frac{1}{6}$, $P(A_1A_2) = 0,51 - 1/6$; $p = P(A_2|A_1) = \frac{103}{153}$.

7.14. 5/11. 7.15. Одно появление.

7.16. Гипотезы: H_1 — первый студент учится первый год; H_2 — второй год. События: A — второй студент учится больше первого, B — второй студент учится третий год. $P(H_1) = \frac{n_1}{n-1}$,

$P(H_2) = \frac{n_2}{n-1}$, $P(A|H_1) = \frac{n_2 + n_3}{n-1}$, $P(A|H_2) = \frac{n_3}{n-1}$, $P(A) =$

$= \frac{1}{(n-1)^2} [n_1(n_2 + n_3) + n_2n_3]$, $P(AB) = \frac{n_3}{n-1}$, $p = P(B|A) =$

$$= \frac{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}}.$$

7.17. $1/4$ и $2/11$.
 7.18. Гипотезы H_k ($k=0, 1, \dots, 8$) — из 8 деталей k штук исправных. Событие A — из взятых четырех деталей три исправные: $P(H_k) = \frac{1}{9}$, $P(H_j|A) = 0$ ($j=0, 1, 2, 8$), $P(H_k|A) = \frac{C_k^3 C_{8-k}^1}{C_8^4}$ ($k=3, 4, 5, 6, 7$). $P(A) = \frac{1}{5}$; $p = P(H_4|A) \cdot \frac{3}{4} + P(H_5|A) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{14}$.

§ 8. Вычисление вероятностей появления события при повторных независимых испытаниях

8.1. а) $0,9^4 = 0,656$; б) $0,9^4 + 4 \cdot 0,1 \cdot 0,9^3 = 0,948$. 8.2. а) $C_{19}^5 \frac{1}{2^{10}} = \frac{63}{256}$; б) $1 - \frac{1}{2^{10}} (1 + C_{10}^1 + C_{10}^2 + C_{10}^3 + 1) = \frac{957}{1024}$. 8.3. а) $p = C_{200}^3 \cdot 0,01^3 \cdot 0,99^{197} \approx 1,35e^{-2} = 0,18$; б) $p \approx 0,09$. 8.4. 0,17. 8.5. 0,64. 8.6. а) 0,163; б) 0,353. 8.7. $p = 1 - (0,8^4 + 4 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^2 + 2 \cdot 0,8 \cdot 0,2^3) = 0,7^2 \cdot 0,6 = 0,718$. 8.8. $W_n = \sum_{m=0}^n C_n^m p^m q^{n-m} [1 - (1 - \frac{1}{\omega})^m] = 1 - (1 - \frac{p}{\omega})^n$. 8.9. $p = 1 - (0,7^4 + 4 \cdot 0,7^3 \cdot 0,3 \cdot 0,4) = 0,595$.

8.10. Гипотезы: H_1 — вероятность попадания при одном выстреле равна $1/2$; H_2 — она равна $2/3$. Событие A — произошло 116 попаданий. $P(H_1|A) \approx 2P(H_2|A)$, т. е. вероятнее первая гипотеза.
 8.11. См. таблицу 113.

Таблица 113

p	0,01	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$R_{10; 1}$	0,0956	0,4013	0,6513	0,8926	0,9718	0,9940	0,9990	0,9999

8.12. 0,2. 8.13. 0,73. 8.14. $R_{n; 1} \approx 1 - e^{-0,02n}$ ($n > 10$). См. таблицу 114.

Таблица 114

n	1	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$R_{n; 1}$	0,02	0,18	0,33	0,45	0,55	0,63	0,70	0,75	0,80	0,84	0,86

8.15. $p = 1 - 0,95^{10} = 0,4$. 8.16. $p = 1 - 0,9^5 = 0,41$. 8.17. $p =$
 $= P_{10}^3 + 3P_{10}^2(p_9 + p_8) + 3p_{10}p_9^2 = 0,0935$. 8.18. а) $p = \sum_{k=0}^3 P'_{3;k} P''_{3;k} =$
 $= 0,311$; б) 0,243. 8.19. 0,488.

8.20. Событие A — изготовлено два хороших изделия. Гипотеза
 H_k — изготовил k -й рабочий ($k = 1, 2, 3$); $p = \sum_{k=1}^3 P(H_k | A) \times$
 $\times P(A | H_k) \approx 0,22$. 8.21. а) $p = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = 0,794$; б) $3p^4 - 4p^3 + \frac{1}{2} = 0$;
 $p = 0,614$. 8.22. $P_1 = p^4 + C_4^1 p^4 q + C_3^2 p^4 q^2 + C_6^3 p^3 q^3 (p^2 + 2p^2 q) = 0,723$;
 $P_{11} = 0,277$.

8.23. $p = \frac{1}{2^{2n-k}} C_{2n-k}^n$. 8.24. 0,784. 8.25. По 200 вт ($R_{6;1} = 0,394$;
 $R_{10;2} = 0,117$). 8.26. 0,64. 8.27. 0,2816. 8.28. $P_m = n C_{m-1}^{k-1} p^k q^{m-k}$ при
 $m \geq k$; $P_m = 0$ при $m < k$. 8.29. $p = \sum_{m=k}^{2k-1} P_m = np^k \sum_{m=k}^{2k-1} C_{m-1}^{k-1} q^{m-k}$.

8.30. Должно быть $0,1 \geq 0,8^n \left[1 + \frac{n}{4} + \frac{n(n-1)}{32} \right]$; $n \geq 25$.
8.31. Должно быть $0,99 \cdot 5^{10} = 4^{10} + C_{10}^1 4^9 + \dots + C_{10}^n 4^{10-n}$; $n = 5$.
8.32. $P_{4;0} = 0,3024$, $P_{4;1} = 0,4404$, $P_{4;2} = 0,2144$, $P_{4;3} = 0,0404$,
 $P_{4;4} = 0,0024$. 8.33. 0,26. 8.34. 0,159. 8.35. 95/144. 8.36. $n = 29$.
8.37. $n \geq 10$. 8.38. $n \geq 16$. 8.39. 8. 8.40. 8. 8.41. $\mu = 4$; $p = 0,251$.
8.42. $\mu_+ = 3$, $\mu_- = 1$; $p = 32/81$.

§ 9. Полиномиальное распределение. Рекуррентные формулы. Производящие функции

9.1. $p = P_{5;2,2,1} + 2P_{5;3,2,0} = 50/243$. 9.2. $p = P_{3;1,1,1} + P_{3;2,1,0} +$
 $+ P_{3;1,2,0} = 0,245$. 9.3. а) $p = \frac{9!}{(3!)^3} \cdot \frac{1}{3^9} = 0,085$; б) $p = 6 \frac{9!}{4!3!2!} \times$
 $\times \frac{1}{3^9} = 0,385$. 9.4. $p = \frac{10!}{6!3!} 0,15^6 0,22^3 \cdot 0,13 = 0,13 \cdot 10^{-4}$. 9.5. $p = 1 -$
 $- 2(0,0664^4 + \frac{1}{2} \cdot 0,2561^4 + 4 \cdot 0,0664 \cdot 0,2561^3 + 6 \cdot 0,0664^2 \cdot 0,2561^2 +$
 $+ 4 \cdot 0,2561 \cdot 0,0664^3) = 0,983$.

9.6. а) $p = \frac{12!}{2^6 \cdot 6!^2} = 0,00344$; б) $= \frac{6!}{2} \cdot \frac{12!}{2!2!3!4!} \cdot \frac{1}{6!^2} = 0,138$.

9.7. а) $p_1 = \frac{l^l m^m n^{n_1}}{(l+m+n)^{l+m+n_1}}$; б) $p = 6p_1$; в) $p =$
 $= \frac{(l_1+m_1+n_1)!}{l_1! m_1! n_1!} \cdot \frac{l^l m^m n^{n_1}}{(l+m+n)^{l+m+n_1}}$.

9.8. $p = p_n, p_k = p_{k-1} \cdot \frac{1}{2} + (1 - p_{k-1}) \frac{1}{2} = 0,5; p = 0,5.$

9.9. Пусть p_k — вероятность ничейного исхода, когда сыграно $2k$ результативных партий; $p_{k+1} = \frac{1}{2} p_k (k = 0, 1, \dots), p_0 = 1, p_{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}; p = \frac{1}{2} p_{n-1} = \frac{1}{2^n}.$

9.10. Число n должно быть нечетным. Пусть p_k — вероятность того, что после $2k+1$ партий игра не закончилась; $p_0 = 1, p_k = \left(\frac{3}{4}\right)^k (k = 1, 2, \dots, \frac{n-3}{2}); p = \frac{1}{4} p_{\frac{n-3}{2}} = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-3}{2}}.$

9.11. Пусть p_k — вероятность разорения 1-го игрока, когда у него k рублей. По формуле полной вероятности $p_k = p p_{k+1} + q p_{k-1}$. Кроме того, $p + q = 1, p_0 = 1, p_{n+m} = 0$. Поэтому $q(p_k - p_{k-1}) = p(p_{k+1} - p_k)$. 1) $p = q$. Тогда $p_k = 1 - kc, c = \frac{1}{n+m}$, т. е. $p_1 = \frac{m}{n+m}, p_{11} = \frac{n}{n+m}, 2) p \neq q$. Тогда $p_k - p_{k-1} = \left(\frac{p}{q}\right)^k (p_1 - 1)$. Суммируя эти равенства от 1 до n и от 1 до $n+m$, получаем $1 - p_n = (1 - p_1) \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n}{1 - \frac{q}{p}}, 1 - p_{n+m} = (1 - p_1) \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+m}}{1 - \frac{q}{p}}$. Поэтому $p_1 = \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^m}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{n+m}}, p_{11} = 1 - p_1 = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+m}}.$

9.12. $P = P_m; P_m = 0$ при $m \leq n; P_n = \frac{1}{2^{n-1}}; P_m = \frac{1}{2^n}$ при $n < m < 2n - 1$. В общем случае P_m определяется из рекуррентной формулы $P_m = \frac{1}{2} P_{m-1} + \frac{1}{2^2} P_{m-2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} P_{m-n+1}$, которая получается по формуле полной вероятности. При этом гипотеза H_k — первый противник победителя выиграл k партий; $P_{m-k} = P(H_k) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} (k = 1, 2, \dots, n-1).$

9.13. P_k — вероятность того, что придется играть ровно k партий. При $k = 1, 2, 3, 4, 5 P_k = 0, P_6 = 2p^6 = \frac{1}{2^5}, P_7 = 2C_6^1 p^6 q = \frac{3}{2^5}, P_8 = 2C_7^2 p^6 q^2 = \frac{21}{2^7}, P_9 = \frac{7}{2^5}, P_{10} = \frac{63}{2^8}; а) R = \sum_{k=1}^{10} P_k = \frac{193}{256};$

б) если n нечетное, то $P_n = 0$. При четном n $P_n = \frac{1}{2} p_{\frac{n}{2}-1}$, где p_k — вероятность того, что после $2k$ партий противники имеют равное число очков; $p_5 = C_{10}^5 \frac{1}{2^{10}} = \frac{63}{2^8}$, $p_{k+1} = \frac{1}{2} p_k$, т. е. $p_k = \frac{63}{2^{k+3}}$ ($k = 5, 6, \dots$), $P_n = \frac{63}{2^{\frac{n}{2}+3}}$.

9.14. Разложить $(1-u)^{-1}$ в ряд и найти коэффициент при u^m .

9.15. Так же, как в задаче 9.14.

9.16. Искомая вероятность равна свободному члену в производящей функции

$$G(u) = \frac{1}{4^n} \left(u + 2 + \frac{1}{u} \right)^n = \frac{(1+u)^{2n}}{4^n u^n}; \quad p = \frac{1}{4^n} C_{2n}^n.$$

9.17. Искомая вероятность равна сумме коэффициентов при u в степени не меньше m в функции $G(u) = \left(\frac{1}{16} u^2 + \frac{1}{4} u + \frac{3}{8} + \frac{1}{4u} + \frac{1}{16u^2} \right)^n = \frac{(1+u)^{4n}}{(4u)^{2n}}$; $p = \frac{1}{4^{2n}} \sum_{k=2n+m}^{4n} C_{4n}^k$. При $n = m = 3$

$p = 0,073$.

9.18. Искомая вероятность равна удвоенной сумме коэффициентов при u^4 в функции

$$\begin{aligned} G(u) &= \frac{1}{5^{20}} \left(u + \frac{1}{u} + 3 \right)^{20} = \\ &= \frac{1}{5^{20}} \sum_{m=0}^{20} \sum_{n=0}^{20-m} \frac{20!}{m! n! (20-m-n)!} u^{m-n} 3^{20-m-n}; \\ p &= 2 \frac{20!}{5^{20}} \sum_{k=0}^8 \frac{3^{16-2k}}{(4+k)! k! (16-2k)!} = 0,104. \end{aligned}$$

9.19. а) Искомая вероятность $p_{\text{чемп}}$ равна сумме коэффициентов при неотрицательных степенях u в функции

$$G(u) = \left(\frac{1}{4} u + \frac{1}{4u} + \frac{1}{2} \right)^{24} = \frac{(1+u)^{48}}{4^{24} u^{24}};$$

$$p_{\text{чемп}} = \frac{1}{4^{24}} \sum_{k=24}^{48} C_{48}^k = \frac{1}{2 \cdot 4^{24}} (2^{48} + C_{48}^{24}) = 0,5577, \quad p_{\text{пер}} = 0,4423.$$

б) вероятность противоположного события равна сумме коэффициентов при u в степенях от -4 до 3 в функции

$$G(u) = \frac{1}{4^{20}} \frac{(1+u)^{40}}{u^{20}}; \quad p = 1 - \frac{1}{4^{20}} \sum_{k=16}^{23} C_{40}^k = 0,22.$$

9.20. а) Искомая вероятность P_m находится с помощью производящей функции $G(u) = \frac{1}{6^n} (u + u^2 + \dots + u^6)^n = \frac{u^n (1-u^6)^n}{6^n (1-u)^n}$.

Используя равенство $\frac{1}{(1-u)^n} = 1 + C_n^{n-1}u + C_n^{n-1}u^2 + \dots$, получаем $P_m = \frac{1}{6^n} (C_{m-1}^{n-1} - C_n^1 C_{m-7}^{n-1} + C_n^2 C_{m-13}^{n-1} - \dots)$, причем ряд

обрывается, когда $m - 6k < n$; б) $R_m = \sum_{k=n}^m P_k$. Используя равенство $1 + C_n^{n-1} + \dots + C_s^{n-1} = C_s^n$, получаем $R_m =$

$$= \frac{1}{6^n} (C_m^n - C_n^1 C_{m-6}^n + C_n^2 C_{m-12}^n - \dots). \text{ При } n = 10, m = 20 \quad P_{20} =$$

$$= \frac{1}{6^{10}} (C_{19}^9 - C_{10}^1 C_{13}^9) = 0,0014, \quad R_{20} = \frac{1}{6^{10}} (C_{20}^{10} - C_{10}^1 C_{14}^{10}) = 0,0029.$$

9.21. Искомая вероятность равна коэффициенту при u^{21} в функции

$$G(u) = \frac{1}{10^6} (1 + u + \dots + u^9)^6 = \frac{1}{10^6} \left(\frac{1-u^{10}}{1-u} \right)^6 =$$

$$= \frac{1}{10^6} (1 - C_6^1 u^{10} + C_6^2 u^{20} - \dots) (1 + C_6^5 u + C_6^5 u^2 + \dots);$$

$$p = \frac{1}{10^6} (C_{26}^5 - C_6^1 C_{16}^5 + C_6^2 C_6^5) = 0,04.$$

9.22. а) p_N равна коэффициенту при u^N в функции

$$G(u) = \frac{u^n}{m^n} \left(\frac{1-u^m}{1-u} \right)^n;$$

$$p_N = \frac{1}{m^n} (C_{N-1}^{n-1} - C_n^1 C_{N-m-1}^{n-1} + C_n^2 C_{N-2m-1}^{n-1} - \dots),$$

причем ряд обрывается, когда $N - ms < n$;

б) $p = 1 + p_N - \sum_{k=n}^N p_k =$

$$= 1 + p_N - \frac{1}{m^n} (C_N^n - C_n^1 C_{N-m}^n + C_n^2 C_{N-2m}^n - \dots)$$

(ср. с 9.20).

$$9.23. \text{ а) } G_1(u) = \frac{u^{21}}{4^3} \left(\frac{1-u^4}{1-u} \right)^3, \quad p = \frac{1}{4^3} (C_6^2 - 3) = 0,1875;$$

$$\text{ б) } G_2(v) = \frac{v^{21}}{8^3} (1+v)^9, \quad p = \frac{1}{8^3} C_9^4 = 0,2461; \quad \text{ в) } G(u) = G_1(u) \times \\ \times G_2\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{32^3} \frac{(1+u^2)^3 (1+u)^{12}}{u^9}, \quad p = \frac{2}{32^3} (C_{12}^3 + 3C_{12}^5) = 0,1585.$$

9.24. Гипотеза H_k — равное число гербов стало после k бросаний обеих монет ($k = 1, 2, \dots, n$); событие A — после n бросаний будет равное число гербов, но оно могло быть и раньше. $P(A) =$

$$= \sum_{k=1}^n P(H_k) P(A|H_k), \quad p = P(H_n), \quad P(A) = P(A|H_0), \quad P(A|H_k) =$$

$$= \frac{1}{4^{n-k}} C_{2n-2k}^{n-k}. \quad \text{Поэтому } C_{2n}^n = \sum_{k=1}^n 4^k C_{2n-2k}^{n-k} P(H_k). \quad \text{Задаваясь раз-}$$

личными n , можно найти $p = P(H_n)$. Пусть $R(u) = \sum_{k=1}^{\infty} u^k P(H_k)$,

$$Q(u) = \sum_{j=0}^{\infty} u^j p_j, \quad \text{где } p_{n-j} = P(A|H_j). \quad \text{Объединяя члены при } u^n,$$

$$\text{получаем: } Q(u) R(u) = \sum_{n=1}^{\infty} u^n \sum_{k=1}^n p_{n-k} P(H_k) = \sum_{n=1}^{\infty} u^n P_n(A) =$$

$$= Q(u) - 1; \quad Q(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{u}{4}\right)^k \frac{(2k)!}{(k!)^2} = (1-u)^{-\frac{1}{2}}; \quad R(u) = 1 -$$

$$- \sqrt{1-u} = \sum_{k=1}^{\infty} u^k \frac{(2k-2)!}{2^{2k-1} k! (k-1)!}; \quad p = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1} (n-1)! n!}.$$

9.25. Пусть μ — число голосов, поданных за определенного кандидата. Вероятность этого $P_\mu = C_n^\mu p^\mu q^{n-\mu}$. Вероятность того, что

за кандидата подано не более μ голосов, равна $\alpha_\mu = \sum_{s=0}^{\mu} P_s$. Вероятность того, что из k кандидатов $l-1$ человек получат не менее μ голосов, $k-l-1$ человек — не более μ голосов каждый, а двое —

по μ голосов, будет $\frac{k!}{2(l-1)!(k-l-1)!} (1 + P_\mu - \alpha_\mu)^{l-1} \alpha_\mu^{k-l-1} P_\mu^2$,

$$p = \frac{k!}{2(l-1)!(k-l-1)!} \sum_{\mu=0}^n P_\mu^2 \alpha_\mu^{k-l-1} (1 + P_\mu - \alpha_\mu)^{l-1}.$$

9.26. Вероятность выигрыша одного очка для подающей команды равна $\frac{2}{3}$. а) $P_k = C_{15}^1 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{13+k} + C_{k-1}^1 C_{15}^2 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^{11+k} + C_{k-1}^2 C_{15}^3 \left(\frac{1}{3}\right)^6 \left(\frac{2}{3}\right)^{9+k} + \dots + C_{k-1}^{k-2} C_{15}^{k-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{2k-2} \left(\frac{2}{3}\right)^{17-k} + C_{15}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{2k} \left(\frac{2}{3}\right)^{15-k}$ или $P_k = \left(\frac{2}{3}\right)^{15} \frac{1}{6^k} (4^{k-1} C_{15}^1 + 4^{k-2} C_{k-1}^1 C_{15}^2 + 4^{k-3} C_{k-1}^2 C_{15}^3 + \dots + 4 C_{k-1}^1 C_{15}^{k-1} + C_{15}^k)$; $Q_k = \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^{14} \frac{1}{6^k} \times (4^k + 4^{k-1} C_k^1 C_{14}^1 + 4^{k-2} C_k^2 C_{14}^2 + \dots + 4 C_k^{k-1} C_{14}^{k-1} + C_{14}^k)$ ($k = 0, 1, \dots, 13$). Числа P_k и Q_k приведены в таблице 115.

Таблица 115

k	0	1	2	3	4	5	6
P_k	0,00228	0,00571	0,01047	0,01623	0,02260	0,02915	0,03546
Q_k	0,00114	0,00342	0,00695	0,01159	0,01709	0,02312	0,02929
k	7	8	9	10	11	12	13
P_k	0,04118	0,04604	0,04986	0,05254	0,05407	0,05450	0,05392
Q_k	0,03524	0,04064	0,04525	0,04890	0,05148	0,05299	0,05345

б) $P_I = \sum_{k=0}^{13} P_k = 0,47401$, $Q_I = \sum_{k=0}^{13} Q_k = 0,42056$; в) пусть α_k — вероятность набрать $14 + k$ очков из $28 + 2k$ для первой (подающей) команды, выиграв последний мяч, β_k — аналогичная вероятность для второй команды; $\beta_0 = Q_{13}$, $\alpha_0 = C_{14}^1 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{26} + C_{13}^1 C_{14}^2 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^{24} + \dots + C_{13}^1 C_{14}^{13} \left(\frac{1}{3}\right)^{26} \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^{28} = 0,05198$, $\alpha_{k+1} + \beta_{k+1} = \frac{1}{3} (\alpha_k + \beta_k)$, $\alpha_{k+1} - \beta_{k+1} = -\frac{1}{9} (\alpha_k - \beta_k)$, т. е. $(\alpha_k + \beta_k) = \frac{1}{3^k} (\alpha_0 + \beta_0)$, $(\alpha_k - \beta_k) = \frac{(-1)^k}{9^k} (\alpha_0 - \beta_0)$; $p_k = \frac{\alpha_0 + \beta_0}{3^{k+1}} + \frac{(-1)^k}{9^{k+1}} (\alpha_0 - \beta_0)$, $q_k = \frac{\alpha_0 + \beta_0}{3^{k+1}} - \frac{(-1)^k}{9^{k+1}} (\alpha_0 - \beta_0)$; $p_k = \frac{0,10543}{3^{k+1}} - \frac{(-1)^k 0,00148}{9^{k+1}}$, $q_k = \frac{0,10543}{3^{k+1}} + \frac{(-1)^k 0,00148}{9^{k+1}}$; г) $P_{II} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k =$

$$= 0,05257, \quad Q_{II} = \sum_{k=0}^{\infty} q_k = 0,05286; \quad \text{д) } P = P_I + P_{II} = 0,52658, \quad Q = \\ = Q_I + Q_{II} = 0,47342.$$

Глава II

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

§ 10. Ряд, многоугольник и функция распределения вероятностей дискретных случайных величин

10.1. См. таблицу 116.

Таблица 116

x_i	0	1
p_i	0,7	0,3

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ 0,7 & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

10.2. См. таблицу 117.

Таблица 117

x_i	0	1	2	3
p_i	0,125	0,375	0,375	0,125

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ 0,125 & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 0,500 & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ 0,875 & \text{при } 2 < x \leq 3, \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

10.3. См. таблицу 118.

Таблица 118

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,09	0,081	0,0729	0,6561

10.4. а) $P(X = m) = q^{m-1} p = \frac{1}{2^m}$ б) один опыт.

10.5. X_1 — случайное число бросков для баскетболиста, начавшего броски; X_2 — то же для второго баскетболиста;

$$\left. \begin{aligned} P(X_1 = m) &= 0,6^{m-1} \cdot 0,4^m, \\ P(X_2 = m) &= 0,6^{m+1} \cdot 0,4^{m-1} \end{aligned} \right\} \text{ для всех } m \geq 1.$$

10.6. $P(X_2 = 0) = 0,4$
См. таблицу 119.

Таблица 119

x_i	-3	3	8	9	14	15	19	20	25	30
p_i	0,008	0,036	0,060	0,054	0,180	0,027	0,150	0,135	0,225	0,125

10.7. $P(X = m) = q^{m-4} p = \frac{1}{2^{m-3}}$ для всех $m \geq 4$, так как минимальное случайное число включений равно четырем и будет иметь место тогда, когда первый же включенный прибор сработает.

$$10.8. \text{ а) } P(X = m) = \begin{cases} q^{n-1} & \text{при } m = 0, \\ q^{n-m-1} & \text{при } 0 < m \leq n-1; \end{cases}$$

$$\text{ б) } P(X = m) = \begin{cases} pq^{m-1} & \text{для } 1 \leq m \leq n-1, \\ q^{n-1} & \text{для } m = n. \end{cases}$$

10.9. $P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}$ для всех $0 \leq m \leq n$.

10.10. $P(X = m) = 1 - 2 \cdot 0,25^m$ для всех $m \geq 1$. 10.11. $P(X = k) = \left(1 - \frac{p}{\omega}\right)^{k-1} \frac{p}{\omega}$ для всех $k \geq 1$. 10.12. $P(X = m) = \frac{(np)^m}{m!} e^{-np}$ для всех $m \geq 0$. 10.13. См. таблицу 120.

Таблица 120

z_i	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	4	∞
p_i	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

10.14. См. таблицу 121.

Таблица 121

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$10^3 p_i$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	63	69	73	75
x_i	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
$10^3 p_i$	75	73	69	63	55	45	36	28	21	15	10	6	3	1

§ 11. Функция распределения и плотность вероятности непрерывной случайной величины

11.1.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ принадлежит } (0, 1); \\ 0, & \text{если } x \text{ не принадлежит } (0, 1). \end{cases}$$

11.2. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. 11.3. $2^{\frac{1}{a}} x_0$. 11.4. а) $p = \frac{1}{e}$; б) $f(x) = \frac{1}{T} e^{-\frac{x}{T}}$. 11.5. а) σ ; б) $\sigma \sqrt{\frac{2 \lg 2}{\lg e}} \approx 1,18\sigma$; в) $f(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$.

11.6. а) $f(x) = \frac{m}{x_0} x^{m-1} e^{-\frac{x^m}{x_0}} (x \geq 0)$; б) $x_p = \{-x_0 \ln(1-p)\}^{\frac{1}{m}}$;

в) $\left(\frac{m-1}{m} x_0\right)^{\frac{1}{m}}$. 11.7. а) 10; б) $F(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{t_B} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, где $t_B = \frac{\lg x - \lg x_0}{\sigma}$. 11.8. а) $a = \frac{1}{2}$; б) $b = \frac{1}{\pi}$; в) $f(x) = \frac{a}{\pi(x^2 + a^2)}$;

в) $P(a < X < \beta) = \frac{1}{\pi} \arctg \frac{a(\beta - a)}{a^2 + a\beta}$. 11.9. $a = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

11.10. а) $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg x$; б) $P(|X| < 1) = \frac{1}{2}$. 11.11. $p = \frac{1}{2}$. 11.12. $p = \frac{2}{3}$.

11.13. Ввести случайную величину X — промежуток времени, в течение которого лампа теряет работоспособность. Составить дифференциальное уравнение для $F(x) = P(X < x)$ — функции рас-

пределения случайной величины X . Решение этого уравнения при $x = l$ имеет вид $F(l) = 1 - e^{-kl}$.

11.14. а) $\frac{z^2}{L^4} (6L^2 - 8Lz + 3z^2)$; б) $1 - \left(\frac{z-x}{L-x}\right)^{k+1}$.

11.15. $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \delta(x - x_i)$.

§ 12. Числовые характеристики дискретных случайных величин

12.1. $\bar{x} = p$. 12.2. $\bar{x}_2 = 1,8$; $\bar{x}_5 = 1,7$; $\bar{x}_8 = 2,0$; наименьшее среднее число взвешиваний будет при системе б). 12.3. $M[X] = 2$; $D[X] = 1,1$.

12.4. Для доказательства достаточно вычислить $M[X] = \left. \frac{dG(u)}{du} \right|_{u=1}$, где $G(u) = (q_1 + p_1u)(q_2 + p_2u)(q_3 + p_3u)$.

12.5. Составляем производящую функцию $G(u) = (q + pu)^n$; $M[X] = G'(1) = np$.

12.6. $\frac{2}{N} \sum_{i=1}^n m_i k_i$.

12.7. Для первого $\frac{7}{11}$, для второго $-\frac{7}{11}$ монет, т. е. игра проигрышная для второго игрока.

12.8. Ввести в рассмотрение величины a, b, c — математические ожидания выигрыша игроков A, B, C соответственно при условии, что игрок A выиграл у B . Для этих величин справедливы равенства $a = \frac{m}{2} + \frac{b}{2}$, $c = \frac{a}{2}$, $b = \frac{c}{2}$, которые составляют систему уравнений для нахождения неизвестных a, b и c . Решая систему, получим $a = \frac{4}{7} m$, $b = \frac{1}{7} m$, $c = \frac{2}{7} m$. Во втором случае для игроков A, B и C соответственно получим $\frac{5}{14} m$, $\frac{5}{14} m$, $\frac{2}{7} m$.

12.9. $M[A] = \frac{2}{2^2} + \left(\frac{4}{2^4} + \frac{5}{2^5}\right) + \left(\frac{7}{2^7} + \frac{8}{2^8}\right) + \dots = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{m}{2^{2m}}$
 $- 3 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{2^{2m}} = \frac{3}{2} - \frac{24}{49} = 1 \frac{1}{98}$; $M[C] = \frac{3}{2^2} + \frac{6}{2^5} + \frac{9}{2^8} + \dots =$
 $= \frac{3}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m+1}{8^m} = \frac{3}{4} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{8}\right)^2} = \frac{48}{49}$.

$$12.10. M[X] = p \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} = \frac{1}{p}.$$

$$12.11. M[X] = p \sum_{m=4}^{\infty} m(1-p)^{m-4} = 4 + \frac{1-p}{p} = 3 + \frac{1}{p} = 8.$$

$$12.12. M[X] = \frac{k}{p}; D[X] = \frac{k(1-p)}{p}. \text{ Ряд } S = \sum_{m=k}^{\infty} \frac{m!}{(m-k)!} q^{m-k}$$

$$\text{суммируется с помощью формулы } S = \frac{d^k}{dq^k} \sum_{m=0}^{\infty} q^m = \frac{k}{(1-q)^{k+1}},$$

где $q = 1 - p$.

$$12.13. \text{ а) } M[m] = \omega, \text{ где } \omega = \frac{1}{1 - e^{-a}}; \text{ б) } M[m] = \omega + 1. \text{ Сум-}$$

мирование ряда производится по формулам

$$\sum_{m=1}^{\infty} m e^{-am} = -\frac{d}{da} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-am} = -\frac{d}{da} \left(\frac{1}{1 - e^{-a}} \right).$$

$$12.14. M[X] = \frac{1}{p_1 + p_2 p_3 (1 - p_1)} = 4,55, \text{ где } p_1 = 0,18, p_3 = p_2 = 0,22.$$

$$12.15. M[X] = 4 \frac{2}{3}. \quad 12.16. M[n] = n + m \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

12.17. Исследовать на максимум дисперсию как функцию вероятности появления события.

12.18. $\mu_3 = np(1-p)(1-2p)$ обращается в нуль при $p = 0$, $p = 0,5$ и $p = 1$.

12.19. Рассмотреть дисперсию как функцию вероятности появления события.

12.20. В обоих случаях математическое ожидание числа черных шаров во второй урне равно 5, а белых — в первом случае $4 + \frac{1}{2^{10}}$, во втором случае $4 + e^{-5}$.

$$12.21. \text{ Два рубля. } \quad 12.22. \text{ При } p < \frac{3}{4}.$$

12.23. $M[X] = \frac{n^2 - 1}{3n} a$. При отыскании вероятностей $p_k = P(X = ka)$ того, что случайная длина перехода равна ka , воспользоваться формулой полных вероятностей, приняв в качестве гипотезы A_i то, что рабочий в данный момент стоит у i -го станка.

- 12.24. $q = 0,9$; $P_{10} = 1 - q^{10} \approx 0,651$. 12.25. $M[X] = \frac{3}{2}$.
- 12.26. $M[X] = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. 12.27. $y = \frac{1}{2p}$; $y = 6,5$ руб.
- 12.28. $M[X] = \frac{n}{m}$; $D[X] = \frac{n(m+n)}{m^2}$.
- 12.29. $X_k = \frac{M+M_1}{N+N_1}N + \frac{MN_1 - NM_1}{N+N_1} \left(1 - \frac{1}{N} + \frac{1}{N_1}\right)^k$;
 $\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = \frac{M+M_1}{N+N_1}N$. Составить конечноразностное уравнение для математического ожидания числа белых шаров X_k , находящихся в первой урне после k опытов:
- $$X_{k+1} - X_k = \frac{M+M_1}{N_1} - \left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N}\right)X_k.$$
- 12.30. $p = C_m^k \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(\frac{n-1}{n}\right)^{m-k}$; $\bar{x} = \frac{m}{n}$; $D[X] = \frac{m(n-1)}{n^2}$.
- 12.31. $\bar{x} = \frac{q}{p}$; $D[X] = \frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p}$, где $q = 1 - p$.
- 12.32. $M[X] = \sum_{n=1}^{\infty} 2np_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2} [(n-1)!]^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} =$
 $= \infty$, так как $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^n \frac{(2n)!}{(n!)^2} = (1-x)^{-\frac{1}{2}}$.

§ 13. Числовые характеристики непрерывных случайных величин

- 13.1. $M[X] = a$; $D[X] = \frac{l^2}{3}$; $E = \sigma \frac{\sqrt{3}}{2}$. 13.2. $M[X] = 0$;
 $D[X] = \frac{1}{2}$. 13.3. $M[X] = \frac{E}{\rho \sqrt{\pi}}$; $D[X] = \frac{E^2}{\rho^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\right)$.
- 13.4. $D[X] = \frac{a^2}{2}$; $E = \frac{a}{\sqrt{2}}$. 13.5. $P(a < \bar{a}) = 1 - e^{-\frac{\pi}{4}}$;
 $P(a > \bar{a}) = e^{-\frac{\pi}{4}}$; $\frac{P(a < \bar{a})}{P(a > \bar{a})} = \frac{0,544}{0,456} = 1,19$. 13.6. $A = \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}}$;
- $M[V] = \frac{2}{h\sqrt{\pi}}$; $D[V] = \frac{1}{h^2} \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi}\right)$. 13.7. $M[X] = D[X] =$
 $= m + 1$. 13.8. $M[X] = \frac{3}{2}x_0$; $D[X] = \frac{3}{4}x_0^2$. 13.9. $M[X] = 0$;

$$D[X] = 2. \quad 13.10. \quad A = \frac{1}{\beta^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1)}; \quad M[X] = (\alpha+1)\beta; \quad D[X] = \\ = \beta^2(\alpha+1). \quad 13.11. \quad A = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}; \quad M[X] = \frac{a}{a+b}; \quad D[X] = \\ = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}. \quad 13.12. \quad A = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}; \quad M[X] = 0;$$

$$D[X] = \frac{1}{n-2} \quad (n > 2). \quad \text{Для вычисления интеграла } \int_0^{\infty} (1+x^2)^{-\frac{n+1}{2}} dx$$

воспользоваться подстановкой $x = \sqrt{\frac{y}{1-y}}$, приводящей к бета-функции, а последнюю выразить через гамма-функцию.

$$13.13. \quad A = \frac{1}{2^{\frac{n-3}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}; \quad M[X] = \frac{\sqrt{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}; \quad D[X] =$$

$$= n-1-\bar{x}^2. \quad 13.14. \quad \text{Воспользоваться соотношением } f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \\ = -\frac{d[1-F(x)]}{dx}.$$

13.15. $M[T] = \frac{1}{\nu}$. Обратит внимание на то, что $p(t)$ является функцией распределения случайного времени поисков (T), необходимого для обнаружения судна.

13.16. $m(t) = m_0 e^{-pt}$. Учтеь, что вероятность распада любого фиксированного атома за промежуток времени $(t, t + \Delta t)$ равна $p \Delta t$, и составить дифференциальное уравнение для $m(t)$.

$$13.17. \quad T_{\Pi} = \frac{1}{p} \frac{\lg 2}{\lg e}. \quad \text{Воспользоваться решением задачи 13.16.}$$

13.18. $\frac{P(T < \bar{T})}{P(T > \bar{T})} = 0,79$, т. е. научных работников, имеющих возраст более среднего (среди научных работников), больше, чем имеющих возраст менее среднего. Средний возраст среди научных работников $\bar{T} = 41,25$ года.

$$13.19. \quad m_{2\nu} = \frac{(2\nu-1)(2\nu-3)\dots 5\cdot 3\cdot 1}{(n-2)(n-4)\dots (n-2\nu)} n^{\nu} \quad \text{при } n \geq 2\nu+1,$$

$$m_{2\nu+1} = 0. \quad \text{При вычислении интегралов вида } \int_0^{\infty} x^{2\nu} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx$$

произвести замену переменных $x = \sqrt{n \frac{y}{1-y}}$, приводящую к бета-функции, а последнюю выразить через гамма-функцию.

13.20. $m_k = \frac{\Gamma(p+k)\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(p+q+k)}$. 13.21. $M[X] = 0$; $D[X] = \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{2}$.

13.22. $\mu_k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} (\bar{x})^{k-j} m_j$, где $m_j = M[X^j]$.

13.23. $m_k = \sum_{j=0}^k C_k^j (\bar{x})^{k-j} \mu_j$, где $\mu_j = M[(X - \bar{x})^j]$.

§ 14. Закон Пуассона

14.1. $p = 1 - e^{-0,1} \approx 0,095$. 14.2. $p = \frac{3^4}{4!} e^{-3} \approx 0,17$.

14.3. $p = 1 - e^{-1} \approx 0,63$. 14.4. $p = e^{-0,5} \approx 0,61$.

14.5. 1) 0,95958; 2) 0,95963. 14.6. 0,9. 14.7. 0,143.

14.8. $p = \frac{1}{e} \sum_{m=3}^{500} \frac{1}{m!} \approx 1 - \frac{1}{e} \sum_{m=0}^2 \frac{1}{m!} \approx 0,08$. 14.9. 0,4.

14.10. $Sk = \frac{1}{\sqrt{a}}$. 14.11. а) $\frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}$; б) $1 - e^{-\lambda p}$.

14.12. $M[X] = D[X] = \frac{\lg 2}{\lg e} \frac{MN_0}{AT_{II}}$. Составить дифференциаль-

ное уравнение для среднего числа частиц в момент времени t . Приравнять среднее число частиц половине первоначального. Полученное в результате этого уравнение дает возможность найти вероятность распада данной частицы; умножая ее на число частиц, получим $M[X]$.

14.13. а) $p = \frac{n^{10}}{10!} e^{-n} \approx 1,02 \cdot 10^{-10}$; б) $p = 1 - e^{-n} - ne^{-n} \approx 0,673$, где $n = \frac{MN_0 p t S}{4\pi r^2 A} \approx 0,475$.

14.14. Представить $P_n(k_1, k_2, \dots, k_m, k_{m+1})$ в виде $P_n(k_1, k_2, \dots,$

$$\dots, k_m, k_{m+1}) = \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{s-1}{n}\right) \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i}{n}\right)}{\left(1 - \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m}{n}\right)^s} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^m \frac{\lambda_i^{k_i}}{k_i!}, \text{ где } s = \sum_{i=1}^m k_i. \text{ Так как } \sum_{i=1}^m \lambda_i \text{ и } s \text{ конечны, то}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{s-1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i\right)^n}{\left(1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i\right)^s} = e^{-\sum_{i=1}^m \lambda_i}.$$

§ 15. Закон нормального распределения

15.1. $p = 0,0536$. 15.2. $p_{\text{ниже}} = 0,1725$; $p_{\text{внутри}} = 0,4846$; $p_{\text{выше}} = 0,3429$. 15.3. а) 1372 м^2 ; б) $0,4105$. 15.4. 22 измерения.
15.5. $E_x = 2\rho \sqrt{\frac{2}{3}} E_y \approx 0,78 E_y$. 15.6. См. таблицу 122.

Т а б л и ц а 122

x	-65	-55	-45	-35	-25	-15	-5	+5	+15	+25	+35
$10^5 F(x)$	35	350	2150	8865	25 000	50 000	75 000	91 135	97 850	99 650	99 965

15.7. $E \approx 39 \text{ м}$. Получающееся трансцендентное уравнение проще всего решить графически. 15.8. $E_1 = \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}}$. 15.9. 1) $0,1587$; $0,0228$; $0,00135$; 2) $0,3173$; $0,0455$; $0,0027$. 15.10. $p \approx 0,089$. 15.11. $p = 0,25$.
15.12. а) $0,5196$; б) $0,1281$. 15.13. $M[X] = 3$ изделия. 15.14. Не менее 30 мк . 15.15. $\sim 8,6 \text{ км}$. 15.16. а) $1,25 \text{ мм}$; б) $0,73 \text{ мм}$.

$$15.17. \text{ а) } F_a(x) = \frac{\Phi\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{b-\bar{x}}{\sigma}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{b-\bar{x}}{\sigma}\right)} \text{ для } x > b; \text{ б) } F_b(x) =$$

$$= \frac{\Phi\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\bar{x}}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{b-\bar{x}}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\bar{x}}{\sigma}\right)} \text{ для } a < x < b. \text{ 15.18. } E = \rho \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{\ln \frac{b}{a}}}.$$

§ 16. Характеристические функции

16.1. $E(u) = q + pe^{iu}$, где $q = 1 - p$. 16.2. $E(u) = \prod_{i=1}^n (q_k + p_k e^{iu})$, где $p_k + q_k = 1$. 16.3. $E(u) = (q + pe^{iu})^n$; $M[X] = np$; $D[X] = npq$.

16.4. $E(u) = \frac{1}{1+a(1-e^{iu})}$; $M[X] = a$; $D[X] = a(1+a)$. 16.5. $E(u) =$

$= \exp\{a(e^{iu} - 1)\}$; $M[X] = D[X] = a$. 16.6. $E(u) = \exp\left(iu\bar{x} - \frac{\sigma^2 u^2}{2}\right)$.

16.7. $E(u) = \frac{1}{1-iu}$; $m_k = k!$ 16.8. $E(u) = \frac{e^{iub} - e^{iua}}{iu(b-a)}$; $m_k =$
 $= \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{(k+1)(b-a)}$.

16.9. $E(u) = 1 + v\sqrt{\pi} e^{-v^2} [i - \Phi(v)]$, где $v = \frac{u}{2h}$ и $\Phi(v) =$
 $= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^v e^{-z^2} dz$. Произвести интегрирование по частям, а затем

воспользоваться формулами: $\int_0^\infty e^{-x^2} \sin 2px \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-p^2} \Phi(p)$;

$\int_0^\infty e^{-px^2} \cos qx \, dx = \frac{1}{2} e^{-\frac{q^2}{4p}} \sqrt{\frac{\pi}{p}}$ (см. И. М. Рыжик и И. С. Градштейн, «Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений», Гостехиздат, 1951, стр. 200).

16.10. $E(u) = \left(1 - \frac{iu}{a}\right)^{-\lambda}$; $m_k = \frac{\lambda(\lambda+1) \dots (\lambda+k-1)}{a^k}$.

16.11. $E(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{iau \cos \varphi} d\varphi = I_0(au)$. Перейти к полярным

координатам и воспользоваться одним из интегральных представлений функции Бесселя (см. Янке и Эмде, «Таблицы функций», 1959, стр. 239).

16.12. $E(u) = \exp\{ixu - a|u|\}$. Путем замены переменных приводится к виду $E(u) = e^{ixu} \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixu}}{x^2 + a^2} dx$. Входящий в формулу

интеграл вычисляется с помощью теории вычетов, для чего необходимо рассмотреть интеграл по замкнутому контуру $\frac{a}{\pi} \oint \frac{e^{izu}}{z^2 + a^2} dz$. При положительных u интегрирование осуществляется по замкнутой дуге полуокружности в верхней полуплоскости, при отрицательных u — по такому же контуру в нижней полуплоскости.

16.13. $E_y(u) = \exp\left\{iu(b+a\bar{x}) - \frac{u^2}{2} a^2 \sigma^2\right\}$; $E_x(u) = e^{-\frac{u^2 \sigma^2}{2}}$.

$$16.14. \mu_{2k} = \sigma^{2k} (2k-1)!!; \mu_{2k+1} = 0.$$

$$16.15. f(x) = \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)} \text{ (закон Коши).}$$

$$16.16. f_1(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x > 0, \\ e^x & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Решать с помощью теории вычетов, рассматривая в отдельности случаи положительных и отрицательных значений x .

16.17. $P(X = k) = 2^{-k}$, где $k = 1, 2, 3, \dots$. Разложить характеристическую функцию в ряд по степеням $\frac{1}{2} e^{iu}$ и воспользоваться аналитическим представлением дельта-функции, приведенным во введении к § 11.

§ 17. Вычисление полной вероятности и условной плотности вероятности после опыта для гипотез, являющихся возможными значениями непрерывных случайных величин

$$17.1. p = \frac{b}{l(\theta_2 - \theta_1)} \left(\ln \operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2} - \ln \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2} \right). \quad 17.2. \text{ Обозначая диаметр круга } D \text{ и интервал между точками } l, \text{ получим } p = \frac{D(2l-D)}{l^2} = 0,4375.$$

$$17.3. p = 0,15. \quad 17.4. p = \frac{1}{2} \left[1 - \hat{\Phi} \left(\frac{L-\bar{x}}{E} \right) \right] + \frac{E}{2L\sqrt{\pi}} \left\{ e^{-\rho^2 \frac{\bar{x}^2}{E^2}} - e^{-\rho^2 \frac{(L-\bar{x})^2}{E^2}} \right\} + \frac{\bar{x}}{2L} \left[\hat{\Phi} \left(\frac{L-\bar{x}}{E} \right) + \hat{\Phi} \left(\frac{\bar{x}}{E} \right) \right] \approx 0,67.$$

17.5. В обоих случаях один и тот же результат $p_1 = p_2 = 0,4$.

$$17.6. p = 1 - \frac{1}{2l} \int_{-l}^{+l} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[\hat{\Phi} \left(\frac{z+r}{R} \right) - \hat{\Phi} \left(\frac{z-r}{R} \right) \right] \right\}^n dz.$$

$$17.7. F(w) = n \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \left\{ \int_y^{y+w} f(x) dx \right\}^{n-1} dy. \quad 17.8. p = 1 - \frac{128}{45\pi^2} \approx$$

$$\approx 0,712. \quad 17.9. p_i = \frac{r_i}{\sum_{i=1}^n r_i}, \quad \text{где } r_i = \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x) f_p(x-x_0) dx.$$

$$17.10. f(a|m_0) = \frac{2(2a)^{m_0+1}}{(m_0+1)!} e^{-2a}.$$

Глава III
СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

§ 18. Законы распределения и числовые характеристики систем случайных величин

18.1. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)(d-c)} & \text{при } a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, \\ 0 & \text{вне прямоугольника;} \end{cases}$
 $F(x, y) = F_1(x) F_2(y)$, где
 $F_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geq b, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{при } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{при } x \leq a; \end{cases}$ $F_2(y) = \begin{cases} 1 & \text{при } y \geq d, \\ \frac{y-c}{d-c} & \text{при } c \leq y \leq d, \\ 0 & \text{при } y \leq c. \end{cases}$

18.2. а) $A = 20$; б) $F(x, y) = \left(\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{5} + \frac{1}{2}\right)$.

18.3. $f(x, y, z) = abc e^{-(ax+by+cz)}$. 18.4. Треугольник с координатами вершин: $\left(\frac{1}{a} \ln \frac{abc}{f_0}, 0, 0\right)$; $\left(0, \frac{1}{b} \ln \frac{abc}{f_0}, 0\right)$; $\left(0, 0, \frac{1}{c} \ln \frac{abc}{f_0}\right)$.

18.5. а) $F(i, j) = P(X < i, Y < j) = P(X \leq i-1, Y \leq j-1)$. Значения $F(i, j)$ см. в таблице 123.

Т а б л и ц а 123

$j-1 \backslash i-1$	0	1	2	3	4	5	6
0	0,202	0,376	0,489	0,551	0,600	0,623	0,627
1	0,202	0,475	0,652	0,754	0,834	0,877	0,887
2	0,202	0,475	0,683	0,810	0,908	0,964	0,982
3	0,202	0,475	0,683	0,811	0,911	0,971	1,000

б) $1 - P(X \leq 6, Y \leq 1) = 1 - 0,887 = 0,113$; в) $M[X] = 1,947$;
 $M[Y] = 0,504$; $\|k_{ij}\| = \begin{vmatrix} 2,610 & 0,561 \\ 0,561 & 0,548 \end{vmatrix}$. 18.6. $F(x_1, x_2, \dots, x_n) =$

$= \prod_{i=1}^n F_i(x_i) = \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{x_i} f_i(\xi_i) d\xi_i$. 18.7. $P = \frac{f(u, v)}{f(u, v) + f(v, u)}$.

18.8. $P = f(u, v, w) : [f(u, v, w) + f(u, w, v) + f(v, u, w) + f(v, w, u) + f(w, u, v) + f(w, v, u)]$. 18.9. $P = F(a_1, b_3) - F(a_1, b_5) + F(a_2, b_1) - F(a_2, b_3) + F(a_3, b_4) - F(a_3, b_2) + F(a_4, b_2) - F(a_4, b_4) + F(a_5, b_5) - F(a_5, b_1)$. 18.10. $P = a^{-3} - a^{-6} - a^{-9} + a^{-12}$.

18.11.

$$p = \begin{cases} \frac{\pi R^2}{4ab} & \text{при } 0 \leq R \leq b, \\ \frac{R^2}{4ab} (\pi - 2\beta + \sin 2\beta) & \text{при } b \leq R \leq a, \\ \frac{R^2}{4ab} (\pi - 2\alpha - 2\beta + \sin 2\alpha + \sin 2\beta) & \text{при } a \leq R \leq \sqrt{a^2 + b^2}, \\ 1 & \text{при } R \geq \sqrt{a^2 + b^2}, \end{cases}$$

При этом $\alpha = \arccos \frac{a}{R}$, $\beta = \arccos \frac{b}{R}$. 18.12. а) $c = \frac{3}{\pi R^3}$;

$$б) p = \frac{3a^2}{R^2} \left(1 - \frac{2a}{3R}\right). \quad 18.13. а) r_{xy} = \begin{cases} +1 & \text{при } \frac{n}{m} < 0, \\ -1 & \text{при } \frac{n}{m} > 0; \end{cases}$$

б) $\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \left| \frac{n}{m} \right|$. 18.14. Рассмотреть математические ожидания квадратов выражений $\sigma_y(X - \bar{x}) + \sigma_x(Y - \bar{y})$ и $\sigma_y(X - \bar{x}) - \sigma_x(Y - \bar{y})$.

18.15. Воспользоваться соотношением $k_{xy} = \mathbf{M}[XY] - \bar{x}\bar{y}$.

$$18.16. \|r_{ij}\| = \begin{vmatrix} 1 & -0,5 & 0,5 \\ -0,5 & 1 & -0,5 \\ 0,5 & -0,5 & 1 \end{vmatrix}.$$

18.17. а) $\mathbf{M}[X] = \alpha + \gamma = 0,5$; б) $\mathbf{M}[Y] = \alpha + \beta = 0,45$,
 $\mathbf{D}[X] = (\alpha + \gamma)(\beta + \delta) = 0,25$; $\mathbf{D}[Y] = (\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = 0,2475$;
 $k_{xy} = \mathbf{M}[XY] - \mathbf{M}[X]\mathbf{M}[Y] = \alpha - (\alpha + \gamma)(\alpha + \beta) = 0,175$.

$$18.18. \mathbf{M}[X] = \mathbf{M}[Y] = 0; \|k_{ij}\| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}.$$

$$18.19. f(x, y) = \begin{vmatrix} \pi - 3 & 0 \\ 0 & \pi - 3 \end{vmatrix}.$$

$$18.20. p = \frac{2l}{\pi L} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{L^2}{l^2}} + \frac{L}{l} \arccos \frac{L}{l} \right]. \quad 18.21. p = \frac{l}{\pi ab} \times$$

$\times [2(a+b) - l]$. Указание. Воспользоваться формулой $\mathbf{P}(A+B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB)$, где событие A — пересечение углов стороны a , событие B — пересечение стороны b .

§ 19. Закон нормального распределения на плоскости и в пространстве. Многомерное нормальное распределение

$$19.1. F(x, y) = \frac{1}{4} \left[1 + \hat{\Phi} \left(\frac{x - \bar{x}}{E_x} \right) \right] \left[1 + \hat{\Phi} \left(\frac{y - \bar{y}}{E_y} \right) \right].$$

19.2. $f(x, y) = \frac{1}{182\pi\sqrt{3}} e^{-\frac{2}{3} \left[\frac{(x-26)^2}{196} + \frac{(x-26)(y+12)}{182} + \frac{(y+12)^2}{169} \right]}$.

19.3. а) $c = 1,39$; б) $\|k_{ij}\| = \begin{vmatrix} 0,132 & -0,026 \\ -0,026 & 0,105 \end{vmatrix}$; в) $S_{эл} = 0,162$.

19.4. $f(2, 2) = \frac{1}{2\pi e^3 \sqrt{2}} = 0,00560$. 19.5. $f(x, y, z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{230\pi}} \times$
 $\times e^{-\frac{1}{230}(33x^2+36y^2+26z^2-44xy+36xz-38yz)}$; $f_{\max} = \frac{1}{2\pi\sqrt{230\pi}} = 0,00595$.

19.6.

а) $\|k_{ij}^{-1}\| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & . \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$;

б) $f(x_1, \dots, x_n) = \frac{e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})^2}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$, где $x_0 = 0$.

19.7.

$\|k_{ij}\| = \begin{vmatrix} 10 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 10 \end{vmatrix}$;

$f(x_1, y_1, x_2, y_2) = \frac{1}{384\pi^2} e^{-\frac{5}{96}(x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2) + \frac{1}{48}(x_1x_2+y_1y_2)}$.

19.8. $P(k) = 1 - e^{-\frac{k^2}{2}}$. 19.9. $P(k) = \hat{\Phi}(k) - \frac{2\rho k}{\sqrt{\pi}} e^{-\rho^2 k^2}$.

19.10. $P(R) = e^{-\rho^2 \frac{R^2}{E^2}} \int_0^{\frac{\rho R^2}{E^2}} I_0\left(\frac{2\rho d \sqrt{t}}{E}\right) e^{-t} dt$, где $I_0(x)$ — функция Бесселя мнимого аргумента. 19.11. а) $P(X < Y) = \frac{1}{2}$;

б) $P(X < 0, Y > 0) = \frac{1}{4}$. 19.12. $P = \frac{1}{4} \left[\hat{\Phi}\left(\frac{c-\bar{x}}{E_x}\right) - \hat{\Phi}\left(\frac{a-\bar{x}}{E_x}\right) \right] \times$

$$\times \left[\hat{\Phi} \left(\frac{d-\bar{y}}{E_y} \right) - \hat{\Phi} \left(\frac{b-\bar{y}}{E_y} \right) \right] = 0,0335. \quad 19.13. \text{ а) } P_{\text{круг}} = 1 - e^{-\rho^2} =$$

$$= 0,2035; \text{ б) } P_{\text{кв}} = \left[\hat{\Phi} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) \right]^2 = 0,2030; \text{ в) } P_{\text{прямо}} = \hat{\Phi} \left(\frac{\sqrt{0,1\pi}}{2} \right) \times$$

$$\times \hat{\Phi} \left(\frac{\sqrt{10\pi}}{2} \right) = 0,1411. \quad 19.14. P = 0,5 \left(1 - e^{-\rho^2 \frac{R^2}{E^2}} \right).$$

$$19.15. P = \frac{\alpha}{2\pi} \left(e^{-\rho^2 \frac{R_1^2}{E^2}} - e^{-\rho^2 \frac{R_2^2}{E^2}} \right).$$

$$19.16. A = 4dk; \alpha = E_x \sqrt{1 + \frac{2\rho^2 d^2}{3E_x^2}}; \beta = E_z \sqrt{1 + \frac{2\rho^2 k^2}{3E_z^2}}.$$

$$19.17. P = \hat{\Phi} \left(\frac{d}{\alpha} \right) \hat{\Phi} \left(\frac{k}{\beta} \right) < \hat{\Phi} \left(\frac{d}{E_x} \right) \hat{\Phi} \left(\frac{k}{E_z} \right), \text{ так как } \alpha > E_x, \beta > E_z.$$

$$19.18. P_{\text{вып}} = 1 - q^3 - 3q^2(1-q) - 3q[(p_2 + p_3)^2 + 2p_2 p_4] - p_2^3 = 0,379,$$

$$P_{\text{отл}} = p_5^3 + 3p_5^2(p_3 + p_4) + 3p_4^2 p_5 = 0,007, \text{ где } p_2 = 0,196, p_3 = 0,198,$$

$$p_4 = 0,148, p_5 = 0,055, q = 0,403. \quad 19.19. P = \frac{1}{8} [\hat{\Phi}(k)]^2.$$

$$19.20. P = \hat{\Phi} \left(\frac{R}{E} \right) - \frac{2\rho R}{E\sqrt{\pi}} e^{-\rho^2 \frac{R^2}{E^2}} - \left[\hat{\Phi} \left(\frac{a}{2E} \right) \right]^3.$$

$$19.21. \text{ а) } P = 0,5 \left(1 - e^{-\rho^2 \frac{R^2}{E^2}} \right) \left[\hat{\Phi} \left(\frac{mh}{(m+n)B} \right) + \hat{\Phi} \left(\frac{nh}{(m+n)B} \right) \right];$$

$$\text{ б) } P = \frac{h}{2H} \left(1 - e^{-\rho^2 \frac{R^2}{E^2}} \right).$$

$$19.22. P = 0,5 \left[\hat{\Phi} \left(\frac{h}{a} \right) - \frac{hE}{\sqrt{h^2 E^2 + R^2 a^2}} \hat{\Phi} \left(\frac{\sqrt{h^2 E^2 + R^2 a^2}}{Ea} \right) \right].$$

$$19.23. 25(x_1 - 10)^2 + 36(x_1 - 10)(x_2 - 10) + 36(x_2 - 10)^2 = 7484,6.$$

$$19.24. 16(x_1 - 2)^2 + 5x_2^2 + 16(x_3 + 2)^2 + 8(x_1 - 2)(x_3 + 2) = 805,1.$$

$$19.25. \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})^2 = \frac{2}{\lg e} \left[5 - \frac{n}{2} \lg(2\pi) \right]. \text{ Задача не имеет}$$

решений при $n > 12$.

§ 20. Законы распределения подсистем непрерывных случайных величин и условные законы распределения

20.1.

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{1}{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)(c_2 - c_1)} & \text{при } a_1 \leq x \leq a_2, b_1 \leq y \leq b_2, \\ & c_1 \leq z \leq c_2, \\ 0 & \text{вне параллелепипеда;} \end{cases}$$

$$f(y, z) = \begin{cases} \frac{1}{(b_2 - b_1)(c_2 - c_1)} & \text{при } b_1 \leq y \leq b_2, c_1 \leq z \leq c_2, \\ 0 & \text{вне прямоугольника;} \end{cases}$$

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{c_2 - c_1} & \text{при } c_1 \leq z \leq c_2, \\ 0 & \text{вне интервала.} \end{cases}$$

Случайные величины X, Y, Z независимы.

20.2. При $|x| \leq R, |y| \leq R$ $f_x(x) = \frac{2\sqrt{R^2 - x^2}}{\pi R^2}, f_y(y) = \frac{2\sqrt{R^2 - y^2}}{\pi R^2},$

$$F_x(x) = \frac{1}{\pi} \left[\arcsin \frac{x}{R} + \frac{x}{R} \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}} \right] + \frac{1}{2},$$

$$F_y(y) = \frac{1}{\pi} \left[\arcsin \frac{y}{R} + \frac{y}{R} \sqrt{1 - \frac{y^2}{R^2}} \right] + \frac{1}{2};$$

X и Y зависимы, так как $f(x, y) \neq f_x(x)f_y(y).$

20.3.

$$f(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{R^2 - x^2}} & \text{при } |x| < R, \\ \frac{1}{2} [\delta(y+R) + \delta(y-R)] & \text{при } |x| = R, \\ 0 & \text{при } |x| > R. \end{cases}$$

$\delta(z)$ — дельта-функция.

20.4. $\|k_{ij}\| = \begin{vmatrix} \frac{R^2}{4} & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{4} \end{vmatrix};$ X и Y не коррелированы.

20.5. а) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{a^2} & \text{внутри квадрата,} \\ 0 & \text{вне квадрата.} \end{cases}$ Внутри квадрата:

б) $f_x(x) = \frac{a\sqrt{2-2|x|}}{a^2}, f_y(y) = \frac{a\sqrt{2-2|y|}}{a^2};$ в) $f(y|x) = \frac{1}{a\sqrt{2-2|x|}}, f(x|y) = \frac{1}{a\sqrt{2-2|y|}};$ г) $D[X] = D[Y] = \frac{a^2}{12},$
 $k_{xy} = 0;$ д) случайные величины X и Y зависимы, но не коррелированы.

20.6. $f_z(z) = \frac{3(R^2 - z^2)}{4R^3}$ при $|z| < R;$ $f(x, y|z) = \frac{1}{\pi(R^2 - z^2)}$ при $|z| < R.$ 20.7. $k = 4; f_x(x) = 2xe^{-x^2} (x \geq 0);$
 $f_y(y) = 2ye^{-y^2} (y \geq 0); f(x|y) = f_x(x); f(y|x) = f_y(y);$
 $M[X] = M[Y] = \frac{\sqrt{\pi}}{2}; D[X] = D[Y] = 1 - \frac{\pi}{4}; k_{xy} = 0.$

$$20.8. \mathbf{M}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{M}[X|y] f_y(y) dy; \quad \mathbf{D}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{D}[X|y] f_y(y) dy +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \{\bar{x} - \mathbf{M}[X|y]\}^2 f_y(y) dy. \quad 20.9. \text{ Так как } \mathbf{M}[X] = 5, \quad \mathbf{M}[Y] = -2,$$

$$\sigma_x = \sigma, \quad \sigma_y = 2\sigma, \quad r = -0,8, \quad \text{то: а) } \mathbf{M}[X|y] = 5 - \frac{0,8}{2}(y+2) = 4,2 - 0,4y,$$

$$\mathbf{M}[Y|x] = -2 - 0,8 \cdot 2(x-5) = 6 - 1,6x,$$

$$\sigma_{x|y} = 0,6\sigma, \quad \sigma_{y|x} = 1,2\sigma; \quad \text{б) } f_x(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-5)^2}{2\sigma^2}},$$

$$f_y(y) = \frac{1}{2\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y+2)^2}{8\sigma^2}}; \quad \text{в) } f(x|y) = \frac{1}{0,6\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+0,4y-4,2)^2}{0,72\sigma^2}},$$

$$f(y|x) = \frac{1}{1,2\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y+1,6x-6)^2}{2,88\sigma^2}}.$$

$$20.10. f_x(x) = A \sqrt{\frac{\pi}{c}} e^{-\left(a - \frac{b^2}{4c}\right)x^2}; \quad f_y(y) = A \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\left(c - \frac{b^2}{4a}\right)y^2}.$$

Для независимости X и Y необходимо, чтобы было $\frac{\sqrt{ac}}{\pi A} e^{-\frac{b^2}{4}\left(\frac{x^2}{c} - \frac{4xy}{b} + \frac{y^2}{a}\right)} = 1$. Это условие выполняется при $b = 0$.

При этом $A = \frac{\sqrt{ac}}{\pi}$. $20.11. k = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}; \quad k_{xy} = -\frac{1}{18};$

$$f(x|y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-(2x+1,5y)^2}; \quad f(y|x) = \frac{3}{\sqrt{\pi}} e^{-(x+3y)^2}.$$

$$20.12. \text{ а) } f_x(x) = \frac{1}{40\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-125)^2}{3200}}; \quad \text{ б) } f_y(y) = \frac{1}{30\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y+30)^2}{1800}};$$

$$\text{ в) } f(x|0) = \frac{1}{32\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-149)^2}{2048}}; \quad \text{ г) } f(y|25) = \frac{1}{24\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y+75)^2}{1152}}.$$

$$20.13. \mathbf{M}[X|y] = 0,8y + 149; \quad \mathbf{M}[Y|x] = 0,45x - 86,25.$$

$$20.14. f(r) = \frac{2r^2}{a^3 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r^2}{2a^2}}; \quad \bar{r} = \mathbf{M}(R) = \frac{4a}{\sqrt{2\pi}}. \quad 20.15. f_r(r) =$$

$$= \frac{r}{ab} e^{-\frac{r^2}{4}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)} I_0\left[\frac{r^2}{4}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)\right], \quad \text{где } I_0(x) \text{ — функция Бесселя нулевого порядка мнимого аргумента; } f_\varphi(\varphi) =$$

$$= \left[2\pi ab \left(\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}\right)\right]^{-1}.$$

$$20.16. f(r|\varphi) = r \left(\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2} \right) e^{-\frac{r^2}{2} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2} \right)};$$

$$f(\varphi|r) = \frac{1}{2\pi I_0 \left[\frac{r^2}{4} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \right]} e^{-\frac{r^2}{4} \cos 2\varphi \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right)}.$$

$$20.17. \text{ а) } f(r, \vartheta, \varphi) = \frac{r^2 \sin \vartheta}{(2\pi)^{3/2} abc} \exp \left[-\frac{r^2}{2} \left(\frac{\cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi}{b^2} + \frac{\sin^2 \vartheta}{c^2} \right) \right];$$

$$\text{ б) } f(r, \vartheta) = \frac{r^2 \sin \vartheta}{\sqrt{2\pi} abc} \exp \left[-\frac{r^2}{2} \left(\frac{\sin^2 \vartheta}{c^2} + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \frac{\cos^2 \vartheta}{2} \right) \right] I_0 \left[\frac{r^2 \cos^2 \vartheta}{4} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \right],$$

$$f(\vartheta, \varphi) = \frac{\sin \vartheta}{4\pi abc} \left(\frac{\cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi}{b^2} + \frac{\sin^2 \vartheta}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}};$$

$$\text{ в) } f(r|\vartheta, \varphi) = \frac{2r^2}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi}{b^2} + \frac{\sin^2 \vartheta}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}} \times$$

$$\times \exp \left[-\frac{r^2}{2} \left(\frac{\cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi}{b^2} + \frac{\sin^2 \vartheta}{c^2} \right) \right], f(\varphi|r, \vartheta) =$$

$$\exp \left[-\frac{r^2}{4} \cos^2 \vartheta \cos 2\varphi \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \right].$$

$$= \frac{1}{2\pi I_0 \left[\frac{r^2 \cos^2 \vartheta}{4} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \right]}.$$

$$20.18. f_{x_1, x_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi \sqrt{96}} e^{-\frac{1}{96} (5x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2)};$$

$$f_{x_1, y_1}(x_1, y_1) = \frac{1}{20\pi} e^{-\frac{x_1^2 + y_1^2}{20}}.$$

$$20.19. f(x_2, y_2|0; 10) = \frac{5}{96\pi} e^{-\frac{5}{96} [x_2^2 + (y_2 - 2)^2]}; \mathbf{M}[X_2|0; 10] = 0;$$

$$\mathbf{M}[Y_2|0; 10] = 2; \quad \mathbf{D}[X_2|0; 10] = \mathbf{D}[Y_2|0; 10] = 9.6.$$

Глава IV

**ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И ЗАКОНЫ
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН**

§ 21. Числовые характеристики функций случайных величин

$$21.1. \frac{4a}{\pi}. \quad 21.2. \pi \frac{a}{2}. \quad 21.3. \mathbf{M}[G] = 4,1 z; \mathbf{D}[G] = 0,32 z^2.$$

$$21.4. \mathbf{M}[\varphi] = \arctg \frac{l}{h} - \frac{h}{2l} \ln \left(1 + \frac{l^2}{h^2} \right). \quad 21.5. \frac{40}{\pi} \text{ с.м.} \quad 21.6. \mathbf{M}[Y] = 1.$$

21.7. 1,15 м. 21.8. $\frac{a^2}{2}$. 21.9. $(n-2)pq^2$ (при $n \geq 3$),
 21.10. $M[R] = \frac{E\sqrt{\pi}}{2\rho}$. 21.11. $\frac{11a^2}{18\pi}$. 21.12. $\frac{3}{\pi}$. 21.13. $\lambda\bar{w}$.
 21.14. $\sum_{k=1}^n p_k$. 21.15. $n\left[1 - \left(1 - \frac{p}{n}\right)^m\right]$. 21.16. $n[1 - (1-p)^m]$.
 21.17. $\bar{t} = T[1 - e^{-a(1-e^{-\alpha})}]$; $\bar{s} = kT^2[1 - 2e^{-a(1-e^{-\alpha})} + e^{-a(1-e^{-2\alpha})}]^2$
 21.18. $n\left[1 - \left(1 - \frac{p}{n}\right)^m\right] + \sum_{k=0}^m (n-k)\left[1 - \left(1 - \frac{p}{n-k}\right)^m\right]P_n^m(k)$,

где $P_n^m(k)$ — вероятность того, что после первой серии циклов будут повреждены хотя бы один раз ровно k блоков;

$$P_n^m(k) = C_n^k \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i \left[1 - \frac{p(n-k+i)}{n}\right]^m.$$

21.19. а) $mp + \sum_{k=0}^4 \{(m-2k)p + k[1 - (1-p)^2]\}P_n^m(k) +$
 $+ P_n^m(5)[3 - (1-p)^2 - 2(1-p)^3] + 2P_n^m(6)[1 - (1-p)^4] +$
 $+ P_n^m(7)[1 - (1-p)^5]$, где $P_n^m(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ для $n =$
 $= m = 8$; б) $2mp$ для $n > 2m$. 21.20. $\frac{a^2}{6b} \ln \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a} +$
 $+ \frac{b^2}{6a} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b} + \frac{1}{3} \sqrt{a^2 + b^2}$. 21.21. $\frac{b^2}{a} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b} +$
 $+ \frac{a^2 - 2b^2}{3a^2} \sqrt{a^2 + b^2} + \frac{2}{3} \frac{b^3}{a^2}$. 21.22. $\sum_{k=1}^n p_k$; $\sum_{k=1}^n p_k(1-p_k)$.
 21.23. 0,316 з. 21.24. $\frac{l}{3}$; $\frac{l^2}{18}$. 21.25. $M[Z] = 5a$; $D[Z] = 100a^2 +$
 $+ 225b^2 - 150ab$. 21.26. $M[Y] = \frac{E_x}{\rho\sqrt{\pi}}$; $D[Y] = \frac{E_x^2}{\rho^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\right)$.
 21.27. $M[Y] = e^{-\bar{x}(1-\cos b)} \cos(\bar{x} \sin b)$; $D[Y] = \frac{1}{2}[1 + e^{-\bar{x}(1-\cos 2b)} \times$
 $\times \cos(\bar{x} \sin 2b)] - \bar{y}^2$. 21.28. а) 26,7 м²; б) 22,0 м²; в) 10 м².
 21.29. $M[Z] = 2a \sqrt{\frac{2}{\pi}} - \frac{E}{2\rho} \sqrt{\pi}$; $D[Z] = a^2 \left(3 - \frac{8}{\pi}\right) + \frac{E^2}{4\rho^2} (4 - \pi)$.
 21.30. $M[Z] = 5(\sqrt{3} - 1)$; $D[Z] = 7600$. 21.31. $r_{xy} = \frac{n!}{\sqrt{(2n-2)!}}$,
 если n — четное; $r_{xy} = 0$, если n — нечетное. 21.32. $M[Z] = 0$;

$$D[Z] = 2\Delta^2\sigma^2. \quad 21.33. \frac{2a}{\pi}; \quad a^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \right). \quad 21.34. \bar{r} = a \left(1 + \frac{e^2}{2} \right);$$

$$D[R] = \frac{a^2 e^2}{2} \left(1 - \frac{e^2}{2} \right) \text{ (где } e \text{ — эксцентриситет).}$$

§ 22. Законы распределения функций случайных величин

22.1.

$$F_y(y) = \begin{cases} F_x\left(\frac{y-b}{a}\right) & \text{при } a > 0, \\ 1 - F_x\left(\frac{y-b}{a}\right) & \text{при } a < 0. \end{cases}$$

22.2. $f_y(y) = f_x(e^y) e^y.$

22.3.

$$f_z(z) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi a z}} e^{-\frac{z}{2a\sigma^2}} & \text{при } z > 0, \\ 0 & \text{при } z \leq 0. \end{cases}$$

22.4.

$$f_y(y) = \begin{cases} \frac{2\rho}{E \sqrt{\pi}} e^{-\rho^2 \left(\frac{y}{E}\right)^2} & \text{при } y \geq 0, \\ 0 & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

22.5.

$$f_y(y) = \begin{cases} \frac{\pi}{\sin \pi y} & \text{при } \frac{1}{2} \leq y \leq \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} e, \\ 0 & \text{при } y < \frac{1}{2} \text{ или } y > \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} e. \end{cases}$$

22.6.

$$f(v) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{при } 0 < v \leq a^3, \\ 3av^{\frac{2}{3}} & \\ 0 & \text{при } v < 0 \text{ или } v > a^3. \end{cases}$$

22.7. $f_x(x) = \frac{1}{\pi} \frac{l}{l^2 + x^2} \quad (-\infty \leq x \leq \infty).$

22.8.

$$f_y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - y^2}} & \text{при } |y| < a, \text{ (закон распределения арксинуса).} \\ 0 & \text{при } |y| \geq a \end{cases}$$

22.9. а) $f_y(y) = \frac{1}{3\pi \left[1 + (1-y)^{\frac{3}{2}}\right] (1-y)^{\frac{3}{2}}}$; б) если $a > 0$, то

$$f_y(y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{a}}{\pi(a+y)\sqrt{y}} & \text{при } y \geq 0, \\ 0 & \text{при } y < 0; \end{cases}$$

если $a < 0$, то

$$f_y(y) = \begin{cases} \frac{-\sqrt{a}}{\pi(a+y)\sqrt{y}} & \text{при } y \leq 0, \\ 0 & \text{при } y > 0; \end{cases}$$

в) $f_y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{при } |y| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при } |y| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

22.10. Для нечетного n $f_y(y) = \frac{ay^{\frac{1}{n}-1}}{\pi n (a^2 + y^{2/n})}$; для четного n

$$f_y(y) = \begin{cases} \frac{2ay^{\frac{1}{n}-1}}{\pi n (a^2 + y^{2/n})} & \text{при } y > 0, \\ 0 & \text{при } y \leq 0. \end{cases}$$

22.11. а) $f_y(y) = |y|e^{-y^2}$ ($-\infty \leq y \leq \infty$);

б) $f_y(y) = \begin{cases} 2ye^{-y^2} & \text{при } y \geq 0, \\ 0 & \text{при } y < 0. \end{cases}$

22.12.

$$f_y(y) = \begin{cases} \frac{\Gamma(k+1.5)}{\sqrt{\pi} \Gamma(k+1)} \cos^{2k+1} y & \text{при } |y| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при } |y| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

22.13. а) $f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$; б) $f_y(y) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\bar{y})^2}{2\sigma_y^2}}$.

22.14.

$$f_y(y) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{при } y < 0 \text{ или } y > 1. \end{cases}$$

22.16. $f_z(z) = \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}}$, где $\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$.

22.17. а) $f_z(z) = \int_0^{\infty} \frac{1}{x} f\left(x, \frac{z}{x}\right) dx - \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x} f\left(x, \frac{z}{x}\right) dx$; б) $f_z(z) =$
 $= \frac{1}{2} e^{-|z|}$; в) $f_z(z) = \frac{1}{2\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{|z|}{\sigma_x\sigma_y}}$; г) $f_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$.

22.18. а) $f_z(z) = \int_0^{\infty} y f(z y, y) dy - \int_{-\infty}^0 y f(z y, y) dy$; б) $f_z(z) =$
 $= \frac{2z}{(1+z^2)^2}$; в) $f_z(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi}} (1+z^2)^{-\frac{n+1}{2}}$ (закон распреде-
 ления Стьюдента); г) $f_z(z) = \frac{\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}}{\pi(\sigma_y^2 z^2 - 2rz\sigma_x\sigma_y + \sigma_x^2)}$, при $r=0$
 $f_z(z) = \frac{\frac{\sigma_x}{\sigma_y}}{\pi\left[z^2 + \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\right)^2\right]}$ (закон распределения Коши).

22.19. а) $f_r(r) = r \int_{-r}^r \frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}} [f(x, \sqrt{r^2-x^2}) +$
 $+ f(x, -\sqrt{r^2-x^2})] dx = r \int_0^{2\pi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi$;

б) $f_r(r) = \begin{cases} \frac{2r\rho^2}{E^2} e^{-\rho^2\left(\frac{r}{E}\right)^2} & \text{при } 0 \leq r < \infty, \\ 0 & \text{при } r < 0; \end{cases}$

в) $f_r(r) = \begin{cases} \frac{2r}{a^2} & \text{при } 0 \leq r \leq a, \\ 0 & \text{при } r > a \text{ или } r < 0; \end{cases}$

г) $f_r(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2+h^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{rh}{\sigma^2}\right)$, где $I_0(z)$ — бesselова функция нулевого порядка от мнимого аргумента;

д) $f_r(r) = \frac{r}{\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{r^2(\sigma_x^2+\sigma_y^2)}{4\sigma_x^2\sigma_y^2}} I_0\left[\frac{r^2(\sigma_x^2-\sigma_y^2)}{4\sigma_x^2\sigma_y^2}\right]$. 22.20. $U =$
 $= (X - \bar{x}) \cos \alpha + (Y - \bar{y}) \sin \alpha$; $V = (X - \bar{x}) \sin \alpha + (Y - \bar{y}) \cos \alpha$;

$$\operatorname{tg} 2\alpha = 2 \frac{r\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}; \quad \sigma_u^2 = \sigma_x^2 \cos^2 \alpha + \sigma_y^2 \sin^2 \alpha + r\sigma_x\sigma_y \sin 2\alpha; \quad \sigma_v^2 = \\ = \sigma_x^2 \sin^2 \alpha + \sigma_y^2 \cos^2 \alpha - r\sigma_x\sigma_y \sin 2\alpha \quad (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 = \sigma_u^2 + \sigma_v^2).$$

22.21.

$$f_\alpha(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{4}(2 - |\alpha|) & \text{при } |\alpha| \leq 2, \\ 0 & \text{при } |\alpha| > 2; \end{cases}$$

$$f_\beta(\beta) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \ln |\beta| & \text{при } |\beta| \leq 1, \\ 0 & \text{при } |\beta| > 1. \end{cases}$$

$$22.22. f(t, \varphi) = \frac{t}{2\pi \sqrt{1-r_{xy}^2}} e^{-\frac{t^2(1-r_{xy} \sin 2\varphi)}{2(1-r_{xy}^2)}}. \quad \text{При } r_{xy} = 0$$

Φ равномерно распределена в интервале $(0, 2\pi)$, а случайная величина T подчиняется закону Рэлея.

$$22.23. f(s|t) - \text{плотность вероятности закона нормального распределения с параметрами } M[S|t] = \bar{s}_0 + \bar{v}_0 t + \bar{a} \frac{t^2}{2}; \quad D[S|t] = \\ = D[S_0] + t^2 D[V_0] + \frac{t^4}{4} D[a] + 2tk_{s_0 v_0} + t^2 k_{s_0 a} + t^3 k_{v_0 a}$$

$$22.24. f_y(y) = \frac{2 \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sigma^n} y^{n-1} e^{-\frac{ny^2}{2\sigma^2}}. \quad \text{Характеристическая функ-}$$

ция случайной величины X_j^2 , если $\sigma^2 = 1$, $\bar{x}_j = 0$, равна $E_{X_j}(t) = (1-2t)^{-\frac{1}{2}}$. Тогда характеристическая функция случайной величины $U = \sum_{j=1}^n X_j^2$ будет $E_u(t) = (1-2t)^{-\frac{n}{2}}$, а плотность вероятности $f(U) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut} (1-2t)^{-\frac{n}{2}} dt = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}} u^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}}$.

Если случайные величины X_j имеют одну и ту же дисперсию σ^2 , а $\bar{x}_j = 0$, то случайная величина $Y = +\sqrt{\frac{\sigma^2 U}{n}}$. Поэтому $f_y(y) = f_u[\psi(y)] |\psi'(y)|$, где $\psi(y) = \frac{y^2 n}{\sigma^2}$.

22.25.

$$f(r, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}) = \frac{r^{n-1} \cos^{n-2} \varphi_1 \cos^{n-3} \varphi_2 \dots \cos \varphi_{n-2}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sigma^n} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}.$$

22.26.

$$f_y(y_1, y_2, \dots, y_n) = f_x \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} y_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj} y_j \right) |\Delta|, \Delta = |a_{ij}|.$$

22.27. $f(r, \vartheta) = r^2 \cos \vartheta \int_0^{2\pi} f(r \cos \vartheta \cos \varphi, r \cos \vartheta \sin \varphi, r \sin \vartheta) d\varphi.$

§ 23. Характеристические функции систем и функции случайных величин

23.1. Воспользоваться тем, что для независимых случайных величин $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n f_k(x_k).$ 23.2. $E_z(u) =$

$= E_{x_1, x_2, \dots, x_n}(u, u, \dots, u).$ 23.3. $E_y(u) = e^{iuc} \prod_{k=1}^n E_{x_k}(a_k u).$

23.4. $E_y(u) = (1 - 2iu\sigma_x^2)^{-\frac{1}{2}}; m_r = M[Y^r] = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2r - 1) \sigma_x^{2r}.$

23.5. $E_y(u) = \frac{e^{iu(a+b)} - e^{iub}}{iua}.$ 23.6. $E_y(u) = (1 + iu)^{-1}; m_r =$

$= M[Y^r] = (-1)^r r!.$ 23.7. $E_y(u) = J_0(au),$ где $J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos \varphi} d\varphi$ — функция Бесселя первого рода нулевого

порядка; $f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} J_0(au) \cos uy du = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - y^2}}.$

23.8.

$$E_{x, y}(u_1, u_2) = \exp \left[i(\bar{x}u_1 + \bar{y}u_2) - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 u_1^2 + 2\sigma_1 \sigma_2 r u_1 u_2 + \sigma_2^2 u_2^2) \right].$$

23.9.

$$E_{x_1, x_2, \dots, x_n}(u_1, u_2, \dots, u_n) = \exp \left[ai \sum_{m=1}^n u_m - \frac{\sigma^2}{2} \sum_{m=1}^n u_m^2 - a\sigma^2 \sum_{m=1}^{n-1} u_m u_{m+1} \right].$$

23.10.

$$E_y(u) = \exp \left[iu \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(2n^2+1)}{6} u^2 \right].$$

23.11. $M[(X_1^2 - \sigma^2)(X_2^2 - \sigma^2)] = 2k_{12}^2.$

23.12. а) $M[X_1^2 X_2^2 X_3^2] = 8k_{12}k_{13}k_{23} + 2\sigma^2(k_{12}^2 + k_{13}^2 + k_{23}^2) + \sigma^6;$

б) $M[(X_1^2 - \sigma^2)(X_2^2 - \sigma^2)(X_3^2 - \sigma^2)] = 8k_{12}k_{13}k_{23}.$

23.13. $M[X_1 X_2 X_3] = 0.$

23.14. $M[X_1 X_2 X_3 X_4] = k_{12}k_{34} + k_{13}k_{24} + k_{14}k_{23}.$

23.15. Для доказательства воспользоваться разложением характеристической функции

$$E_{x_1, x_2, \dots, x_n}(u_1, u_2, \dots, u_n) = \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^n k_{ml} u_m u_l \right]$$

в бесконечный ряд по степеням $u_1, u_2, \dots, u_n.$ 23.16. Для доказательства воспользоваться свойством характеристической функции $E_{\sum_{j=1}^n x_j}(u) = E(u_1, \dots, u_n) |_{u_1 = \dots = u_n = u}$, где $E(u_1, \dots, u_n)$ — характеристическая функция системы, и формулой для характеристической функции системы нормальных случайных величин.

23.17.

$$E(u_1, u_2) = (p_1 e^{iu_1 S_1} + q_1 e^{iu_1 S_2})^{N_1} (p_2 e^{i(u_1+u_2) S_1} + q_2 e^{i(u_1+u_2) S_2})^{N_2} \times \\ \times (p_3 e^{i(u_1+u_2) S_1} + q_3 e^{i(u_1+u_2) S_2})^{N_3} (p_4 e^{iu_2 S_1} + q_4 e^{iu_2 S_2})^{N_4}; \\ k_{xy} = -2S_1 S_2 (N_2 p_2 q_2 + N_3 p_3 q_3).$$

§ 24. Композиция законов распределения

24.1.

$$f_z(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z \leq 2a, \\ \frac{z-2a}{(b-a)^2} & \text{при } 2a \leq z \leq a+b, \\ \frac{2b-z}{(b-a)^2} & \text{при } a+b \leq z \leq 2b, \\ 0 & \text{при } z \geq 2b. \end{cases}$$

24.2.

$$f_z(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z \geq \bar{x} + \bar{y} + a + b, \\ \frac{\bar{x} + \bar{y} + a + b - z}{4ab} & \text{при } \bar{x} + \bar{y} + b - a \leq z \leq \bar{x} + \bar{y} + a + b, \\ \frac{1}{2b} & \text{при } \bar{x} + \bar{y} + a - b \leq z \leq \bar{x} + \bar{y} + b - a, \\ \frac{a + b - \bar{x} - \bar{y} + z}{4ab} & \text{при } \bar{x} + \bar{y} - a - b \leq z \leq \bar{x} + \bar{y} + a - b, \\ 0 & \text{при } z \leq \bar{x} + \bar{y} - a - b. \end{cases}$$

24.3. $f_z(z) = \frac{1}{2(b-a)} \left[\Phi\left(\frac{z-a-\bar{x}}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{z-b-\bar{x}}{\sigma_x}\right) \right],$

где $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$

24.4.

$$f_z(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z \leq 3a, \\ \frac{(z-3a)^2}{2(b-a)^3} & \text{при } 3a \leq z \leq 2a+b, \\ \frac{(z-3a)^2 - 3[z-(b+2a)]^2}{2(b-a)^3} & \text{при } 2a+b \leq z \leq a+2b, \\ \frac{(3b-z)^2}{2(b-a)^3} & \text{при } a+2b \leq z \leq 3b, \\ 0 & \text{при } z \geq 3b. \end{cases}$$

24.5. Композиция закона нормального распределения с законом равной вероятности имеет плотность вероятности $f_z(z) = \frac{1}{4l} \left[\hat{\Phi}\left(\frac{z-2\bar{x}+l}{E}\right) - \hat{\Phi}\left(\frac{z-2\bar{x}-l}{E}\right) \right].$ Уравняв математическое ожидание и дисперсию для $f_z(z)$ и для плотности вероятностей закона нормального распределения $f'_z(z)$, получим: $f'_z(z) =$

$$= \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-\bar{z})^2}{2\sigma_z^2}}, \text{ где } \bar{z} = 2\bar{x}, \sigma_z = \sqrt{\frac{E^2}{2l^2} + \frac{l^2}{3}}. \text{ Если } \bar{x} = 0,$$

то относительная ошибка такой замены в точке $z = 0$ равна $\Delta\% = \frac{f_z(0) - f'_z(0)}{f_z(0)} 100\%$ (табл. 124).

Таблица 124

l	E	$2E$	$3E$	$4E$
$\Delta\%$	-0,30	-3,02	-9,70	-17,10

24.6. $f_z(z) = \frac{1}{\pi} \frac{l}{1+l^2(z-c)^2}$, где $c = a + b$, $l = \frac{hk}{h+k}$ (для решения использовать характеристические функции случайных величин X и Y). 24.7. $f_z(z) = \frac{2}{\pi^2} \frac{z}{\operatorname{sh} z}$.

$$24.8. f_z(z) = \begin{cases} e^{-\frac{z}{3}} \left(1 - e^{-\frac{z}{6}}\right) & \text{при } z \geq 0, \\ 0 & \text{при } z < 0. \end{cases}$$

24.9. $f_r(r) = \frac{r}{\sqrt{\Delta}} e^{-\frac{(k_{11}+k_{22})r^2}{4\Delta}} I_0 \left[\frac{r^2}{4\Delta} \sqrt{(k_{22}-k_{11})^2 + 4k_{12}^2} \right]$, где $I_0(z)$ — функция Бесселя нулевого порядка; $\Delta = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix}$; $k_{11} = \frac{1}{2\rho^2} [a_1^2 + a_2^2 + (b_2^2 - a_2^2) \sin^2 \alpha]$; $k_{22} = \frac{1}{2\rho^2} [b_1^2 + b_2^2 + (a_2^2 - b_2^2) \sin^2 \alpha]$; $k_{12} = \frac{1}{4\rho^2} (a_2^2 - b_2^2) \sin 2\alpha = k_{21}$.

24.12. $M[X] = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 2$; $D[X] = \frac{1}{p_1} \left(\frac{1}{p_1} - 1\right) + \frac{1}{p_2} \left(\frac{1}{p_2} - 1\right)$;
 $F_n(x) = \frac{1}{p_2 - p_1} \{(1-p_1) p_2 [1 - (1-p_1)^n] - (1-p_2) p_1 [1 - (1-p_2)^n]\}$.

24.13. Требуемый запас прочности $0,37\bar{q}_1 = 7,4$ кг.

$$24.14. \text{ а) } P = \frac{1}{4L} \int_0^L \left[1 - \hat{\Phi} \left(\frac{y-x}{E} \right) \right] \left[1 + \hat{\Phi} \left(\frac{y-L+x}{E} \right) \right] dy -$$

$$- \frac{1}{2L} \left\{ (L-x) \hat{\Phi} \left(\frac{L-x}{E} \right) - x \hat{\Phi} \left(\frac{x}{E} \right) + \frac{E}{\rho \sqrt{\pi}} \left[e^{-\rho^2 \left(\frac{L-x}{E} \right)^2} - \right. \right.$$

$$\left. - e^{-\rho^2 \left(\frac{x}{E} \right)^2} \right] \right\}; \text{ б) } P = 0,75 - \frac{(L-x)}{2L} \hat{\Phi} \left(\frac{L-x}{E} \right) + \frac{x}{2L} \hat{\Phi} \left(\frac{x}{E} \right) -$$

$$- \frac{E}{2L\rho \sqrt{\pi}} \left[e^{-\rho^2 \left(\frac{L-x}{E} \right)^2} - e^{-\rho^2 \left(\frac{x}{E} \right)^2} \right] + \frac{1}{4L} \int_0^L \hat{\Phi} \left(\frac{y-x}{E} \right) \times$$

$$\times \hat{\Phi} \left(\frac{y-L+x}{E} \right) dy.$$

24.15. $P(X_A > X_B) = \frac{1}{2} \left[1 + \hat{\Phi} \left(\frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{\sqrt{E_A^2 + E_B^2}} \right) \right]$. 24.16. $f_z(z) = \frac{z^{m-1} \lambda^m}{(m-1)!} e^{-\lambda z}$. 24.17. $F_z(z) = \frac{1}{a-b} \left[a(1-b)(1-a^n) - b(1-a) \times \right. \\ \left. \times (1-b^n) \right]$. 24.18. См. таблицу 125.

Т а б л и ц а 125

z_l	0	1	2	3	4
$P(Z = z_l)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$

24.19. $P(Z = m) = \frac{(2a)^m}{m!} e^{-2a}$. 24.20. Случайная величина Y имеет биномиальное распределение. 24.21. $F_z(n) = P(Z < n) = 1 - \frac{n}{2^{n-1}}$ ($n = 1, 2, \dots$).

§ 25. Линеаризация функций случайных величин

25.1. $E_Q \approx 9100$ кал.

25.2. $D[\Omega] \approx \frac{\bar{p}}{16\bar{m}l} \left[\left(\frac{\sigma_p}{\bar{p}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{\bar{m}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_l}{\bar{l}} \right)^2 - \frac{2\sigma_p\sigma_m r_{pm}}{\bar{p}\bar{m}} - \frac{2\sigma_p\sigma_l r_{pl}}{\bar{p}\bar{l}} + \frac{2\sigma_m\sigma_l r_{ml}}{\bar{m}\bar{l}} \right]$.

25.3. $E_z \approx \frac{\sqrt{\bar{r}^2 E_R^2 + \left(\bar{\omega} \bar{l} - \frac{1}{\bar{\omega} \bar{c}} \right)^2 \left[\bar{\omega}^2 E_l^2 + \frac{E_c^2}{\bar{\omega}^2 \bar{c}^4} + \left(\bar{l} + \frac{1}{\bar{\omega} \bar{c}} \right)^2 E_\omega^2 \right]}}{\sqrt{\bar{r}^2 + \left(\bar{\omega} \bar{l} - \frac{1}{\bar{\omega} \bar{c}} \right)^2}}$.

25.4. $D[J] \approx \bar{j}^2 \left[\frac{\sigma_E^2}{\bar{e}^2} + \frac{\sigma_R^2}{\left(\bar{r} + \frac{\bar{\omega}}{N} \right)^2} + \frac{\sigma_W^2}{N^2 \left(\bar{r} + \frac{\bar{\omega}}{N} \right)^2} \right]$, где $\bar{j} = \frac{\bar{e}}{\bar{r} + \frac{\bar{\omega}}{N}}$.

25.5. $E \approx 66,66$ м; $E_y \approx 38,60$ м. 25.6. $E_{v_1} \approx 0,52$ м/сек. 25.7. Для принятых условий функция $V_1 = -V \cos q$ не может быть линеаризована. 25.8. $\sigma_x \approx 23,1$ м; $\sigma_y \approx 14,3$ м; $\sigma_z \approx 25$ м. 25.9. $\sigma_x = \sigma_y \approx 8,66$ м; $\sigma_z \approx 7,05$ м. 25.10. $E_v \approx \frac{U}{q + \omega} E_\omega$. 25.11. $E_h = 43$ м. 25.12. $\sigma_z \approx 10^{-6}$.

25.13. $E_h \approx 12,98$ м.

25.14. Среднее отклонение ошибок определения дальности по формуле с использованием данных радиолокационной станции $\approx 22,85$ м.

$$25.15. \quad \bar{y} \approx \varphi(\bar{x}) + \frac{1}{2} \varphi''(\bar{x}) D[X]; \quad D[Y] \approx [\varphi'(\bar{x})]^2 D[X] +$$

$$+ \frac{1}{2} [\varphi''(\bar{x})]^2 D^2[X]. \quad 25.16. \quad M[S] \approx \frac{ab}{2} \left(1 - \frac{\sigma_y^2}{2}\right) \sin \bar{\gamma};$$

$$D[S] \approx \frac{a^2 b^2}{4} \left[\sigma_y^2 \cos^2 \bar{\gamma} + \frac{\sigma_y^4}{2} (1 + \cos^2 \bar{\gamma}) + \frac{5}{12} \sigma_y^6 \cos^2 \bar{\gamma} \right].$$

$$25.17. \quad E_x = \frac{b \sqrt{\frac{E_a^2}{a^2} \sin^2 \bar{\alpha} + E_u^2 \cos^2 \bar{\alpha}}}{\sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 \bar{\alpha}}}; \quad \bar{x} = \arcsin \left(\frac{b}{a} \sin \bar{\alpha} \right).$$

25.18. а) При удержании двух первых членов разложения в ряд Тейлора функции $Y = \frac{1}{X}$ будем иметь $\bar{y} \approx -0,2$; $D[Y] \approx 0,16$; б) при удержании трех первых членов разложения в ряд Тейлора функции $Y = \frac{1}{X}$ будем иметь $\bar{y} \approx -1,00$; $D[Y] \approx 1,44$.

24.19. а) По точным формулам $\bar{v} = \frac{4\pi r}{3} (3\sigma_r^2 + r^2)$; $D[V] = \frac{16\pi^2}{3} [3\sigma_r^6 + 12r^2\sigma_r^4 + 3r^4\sigma_r^2]$; б) по формулам метода линеаризации $\bar{v} \approx \frac{4\pi r^3}{3}$; $D[V] \approx 16\pi^2 r^4 \sigma_r^2$.

25.20. а) При измерении высоты конуса $D[V] \approx 4\pi^2$; б) при измерении длины образующей $D[V] \approx 3,57\pi^2$.

$$25.21. \quad 19,9 \text{ мг.} \quad 25.22. \quad E_g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} \sqrt{\frac{4}{n^2 T^2} (E_l^2 + 2E_{l'}^2) + \frac{E_l^2}{L^2}} =$$

$$= 4,67 \text{ см/сек}^2. \quad 25.23. \quad D[Z] \approx \frac{(1-k)^2 \pi}{96(1+k)}.$$

§ 26. Композиция двумерных и трехмерных нормальных законов распределения с использованием понятия векториальных отклонений

26.1. Нормальный закон распределения с главными полуосями единичного эллипса $a = 48,4$ м, $b = 12,4$ м, наклоненными к векториальному отклонению \vec{c}_1 под углами $\alpha = 19^\circ 40'$ и $109^\circ 40'$.

26.2. При $\gamma = 0$ — вырожденный нормальный закон (векториальное отклонение) $\sqrt{c_1^2 + c_2^2} = 50$ м, При $\gamma = 90^\circ$ — нормальный закон

распределения с главными полуосями единичного эллипса $a = c_1 = 30$ м, $b = c_2 = 40$ м, совпадающими с направлениями векторных отклонений.

26.3. Главные полуоси $a = 1,2$ м, $b = 1,1$ м наклонены к оси абсцисс под углами 33° и 123° .

26.4. Главные полуоси $a = b = 100$ м, т. е. суммарное рассеивание круговое.

26.5. $a = 30,8$ м, $b = 26,0$ м, $\alpha = 18^\circ 15'$. 26.6. а) $a = b = 25\sqrt{5}$ м; б) $a = 68,9$ м, $b = 38,8$ м, $\alpha = 15^\circ$.

26.7. Из системы уравнений для определения сопряженных диаметров m и n : $m^2 + n^2 = a^2 + b^2$; $mn = \frac{ab}{\sin \gamma}$, находим $m = 20$ м,

$$n = 15 \text{ м и } P = \hat{\Phi}\left(\frac{l}{m}\right) \hat{\Phi}\left(\frac{l}{n}\right) = 0,556.$$

26.8. $|\vec{m}| = 73,2$ м, $|\vec{n}| = 68,1$ м, $\epsilon = 74^\circ 21'$.

26.9. а) $f(x, y) = 1,17 \cdot 10^{-5} \exp\{-7,06 \times 10^{-2} (0,295 x^2 - 0,670 xy + 1,31 y^2)\}$;

б) $a = 126,5$ м, $b = 53,8$ м, $\alpha = 12^\circ 10'$.

26.10. $a = 880$ м, $b = 257$ м, $\alpha = 39^\circ 12'$.

26.11. Закон распределения определяется двумя векторными ошибками

(рис. 42): $a_1 = CC_1 = \frac{BE_\beta \sin \beta_2}{\sin^2 (\beta_1 + \beta_2)},$

$$a_2 = CC_2 = \frac{BE_\beta \sin \beta_1}{\sin^2 (\beta_1 + \beta_2)},$$

$\alpha_1 = \pi - \beta_2, \alpha_2 = \beta_1,$ вследствие чего

$$k_{11} = \frac{B^2 E_\beta^2}{2\rho^2 \sin^4 (\beta_1 + \beta_2)} (\sin^2 \beta_1 \cos^2 \beta_1 + \sin^2 \beta_2 \cos^2 \beta_2),$$

$$k_{22} = \frac{B^2 E_\beta^2}{2\rho^2 \sin^4 (\beta_1 + \beta_2)} (\sin^4 \beta_1 + \sin^4 \beta_2).$$

$$k_{12} = \frac{B^2 E_\beta^2}{2\rho^2 \sin^4 (\beta_1 + \beta_2)} (\sin^3 \beta_1 \cos \beta_1 - \sin^3 \beta_2 \cos \beta_2),$$

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{\sin^2 \beta_1 \sin 2\beta_1 - \sin^2 \beta_2 \sin 2\beta_2}{\sin^2 \beta_1 \cos 2\beta_1 + \sin^2 \beta_2 \cos 2\beta_2}.$$

26.12. $a = 18,0$ км, $b = 7,39$ км, $\alpha = 85^\circ 36'$.

26.13. К векторным ошибкам \vec{a}_1 и \vec{a}_2 прибавляется еще

векторная ошибка \vec{a}_3 : $a_3 = \frac{\sqrt{E_1^2 \sin^2 \beta_2 + E_2^2 \cos^2 \beta_2}}{\sin (\beta_1 + \beta_2)}$ при

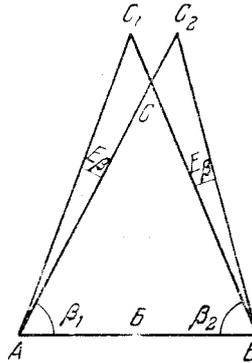


Рис. 42.

$\alpha_3 = \beta_0$, что дает в точке C единичный эллипс ошибок с главными полуосями $a = 41,2$ м, $b = 19,7$ м, образующими с направлением базы углы $74^\circ 20'$ и $164^\circ 20'$.

26.14. $E_v = 2,1$ м/сек, $E_q = 0,042$ рад.

26.15. $a = 156$ м, $b = 139$ м; главная полуось направлена вдоль курса судна.

26.16. $a = 64,0$ м, $b = c = 78,1$ м; полуось a направлена вдоль курса судна.

$$26.17. f(x, y, z) = \frac{1}{120 (2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{(x-45)^2}{50} - \frac{(y-15)^2}{32} - \frac{(z+75)^2}{72}}.$$

26.18. Уравнение единичного суммарного эллипсоида

$$\frac{(x-30)^2}{2100} + \frac{y^2}{1125} + \frac{z^2}{64} = 1.$$

26.19.

$$\|k_{ij}\| = \begin{vmatrix} 7421 & -2568 & -7597 \\ -2568 & 8406 & 2322 \\ -7597 & 2322 & 9672 \end{vmatrix}.$$

26.20. $p = -1,47 \cdot 10^7$; $q = -8,9 \cdot 10^9$; $\varphi = 65^\circ 45'$; $u_1 = 4106$; $u_2 = -622$; $u_3 = -3484$; $a = 89,3$; $b = 57,0$; $c = 19,3$; $\cos(a, x) = \pm 0,6179$; $\cos(a, y) = \mp 0,3528$; $\cos(a, z) = \mp 0,7025$.

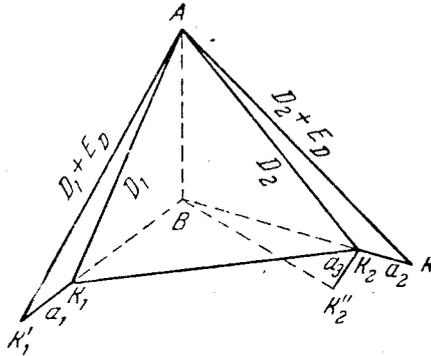


Рис. 43.

26.21. Если выбрать (рис. 43) за ось Ox направление BK_2 , а за ось Oy — перпендикулярное направление, то с помощью метода

линеаризации находим три векториальные ошибки: $a_1 = \frac{D_1 E_D}{\sqrt{D_1^2 - H^2}}$,
 $\alpha_1 = \alpha$; $a_2 = \frac{D_2 E_D}{\sqrt{D_2^2 - H^2}}$, $\alpha_2 = 0$; $a_3 = \sqrt{D_2^2 - H^2} E_\alpha$, $\alpha_3 = 90^\circ$.

Отсюда находим:

$$k_{11} = \frac{E_D^2}{2\rho^2} \left(\frac{D_1^2 \cos^2 \alpha}{D_1^2 - H^2} + \frac{D_2^2}{D_2^2 - H^2} \right),$$

$$k_{12} = \frac{E_D^2}{2\rho^2} \cdot \frac{D_1^2 \sin \alpha \cos \alpha}{D_1^2 - H^2},$$

$$k_{22} = \frac{E_D^2}{2\rho^2} \left[\frac{D_1^2 \sin^2 \alpha}{D_1^2 - H^2} + \frac{E_\alpha^2}{E_D^2} (D_2^2 - H^2) \right].$$

26.22. Векториальные ошибки $\overleftrightarrow{a_2}$ и $\overleftrightarrow{a_3}$ остаются по величине и направлению такими же, как и в предыдущей задаче. Величина

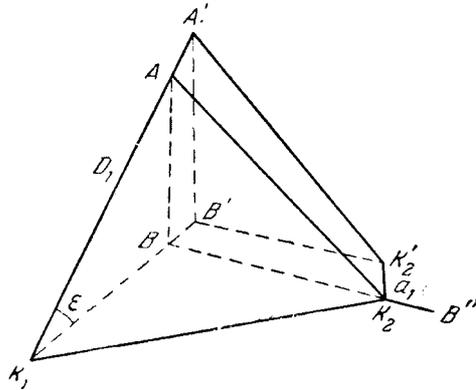


Рис. 44.

векториальной ошибки $\overleftrightarrow{a_1}$ из-за ошибки в дальности D_1 и ее направление $\alpha_1 = \angle K_2'K_2B''$ определяются по формулам (рис. 44):

$$a_1 = K_2K_2' = E_2 \lambda \cos \epsilon, \quad \sin \alpha_1 = \frac{1}{\lambda} \sin \alpha,$$

где

$$\lambda = \sqrt{1 + \frac{2D_1 \sin \epsilon \operatorname{tg} \epsilon \cos \alpha}{\sqrt{D_2^2 - D_1^2 \sin^2 \epsilon}} + \frac{D_1^2 \sin^2 \epsilon \operatorname{tg}^2 \epsilon}{D_2^2 - D_1^2 \sin^2 \epsilon}}.$$

Глава V
ЭНТРОПИЯ И ИНФОРМАЦИЯ

§ 27. Энтропия случайных событий и величин

27.1. Так как $H_1 = H_2 = 1,4 \lg 2 - \frac{1}{3} - 0,2 \lg 3 = -0,073$ дес. ед. < 0 , то для первой урны исход опыта более определенный. 27.2. $p = \frac{1}{2}$.

27.3. $H_1 = -\frac{\pi}{3\sqrt{3}} \lg \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \left(1 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right) \lg \left(1 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right) = 0,297$ дес. ед., $H_2 = -\frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \lg \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} - \left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\right) \lg \left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\right) = 0,295$ дес. ед., т. е. неопределенность практически одинакова.

27.4. а) $H = -\cos^2 \frac{\pi}{n} \log_a \cos^2 \frac{\pi}{n} - \sin^2 \frac{\pi}{n} \log_a \sin^2 \frac{\pi}{n}$; б) $n = 4$.

27.5. Так как $P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$, то $H[X] = -\frac{p \log_a p + (1-p) \log_a (1-p)}{p}$. С уменьшением p от 1 до 0 энтропия монотонно возрастает от 0 до ∞ .

27.6. а) $H[X] = -n[p \log_a p + (1-p) \log_a (1-p)] - \sum_{m=1}^{n-1} C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \log_a C_n^m$; б) $H[X] = 1,5 \log_a 2$.

27.7. а) $\log_a (d-c)$; б) $\log_a [\sigma_x \sqrt{2\pi e}]$; в) $\log_a \frac{e}{c}$.

27.8. $H[X] = \log_a (0,5 \sqrt{e})$. 27.9. $H[X|y] = H_y[X] = \log_a (\sigma_x \sqrt{2\pi e (1-r^2)})$, $H[Y|x] = H_x[Y] = \log_a (\sigma_y \sqrt{2\pi e (1-r^2)})$, где σ_x и σ_y — средние квадратические отклонения, r — коэффициент корреляции между X и Y .

27.10.

$$H[X_1, X_2, \dots, X_n] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{V(2\pi)^n |k|} e^{-\frac{1}{2|k|} \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j} \left[\frac{1}{2|k|} \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j \log_a e + \log_a V(2\pi)^n |k| \right] dx_1 \dots dx_n = \log_a V(2\pi e)^n |k|$$

где $|k|$ — определитель корреляционной матрицы.

27.11. $H_r[Y] = H[Y] - H[X] + H_y[X]$.

27.12. Закон равномерного распределения:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{при } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{при } x < a, x > b. \end{cases}$$

27.13. Закон экспоненциального распределения:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{M[X]} \exp\left[-\frac{x}{M[X]}\right] & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

27.14. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi m_2}} e^{-\frac{x^2}{2m_2}}$.

27.15. Нормальный закон:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |k|}} \times \\ \times \exp\left[-\frac{1}{2|k|} \sum_{i,j} a_{ij}(x_i - M[X_i])(x_j - M[X_j])\right].$$

27.16. $p_{1i} = \frac{\alpha}{k}$, $p_{2j} = \frac{1-\alpha}{n}$. 27.17. $\log_a 1050$ и $\log_a 30$.

27.18. $H[Y_1, Y_2, \dots, Y_n] - H[X_1, X_2, \dots, X_n] =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x_1, x_2, \dots, x_n) \log_a \left| I \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} \right) \right| dx_1 \dots dx_n \quad \text{где}$$

$I \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} \right)$ — определитель Остроградского — Якоби для преобразования от (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) к (X_1, X_2, \dots, X_n) . 27.19. а) Логарифм абсолютного значения определителя $|a_{kj}|$; б) 1,85 дес. ед.

§ 28. Количество информации

28.1. а) 5 дв. ед.; б) 5 дв. ед., в) 3 дв. ед.

28.2. Для числа монет, удовлетворяющего неравенству $3^{k-1} < N \leq 3^k$, надо k взвешиваний. При $k = 5$ можно найти фальшивую монету, если общее число монет не больше 243.

28.3. $I = 500 (-0,51 \log_2 0,51 - 0,31 \log_2 0,31 - 0,12 \log_2 0,12 - 0,06 \log_2 0,06) = 815$ дв. ед.

28.4. Первый опыт дает количество информации $I_1 = H_0 - H_1 = \log_2 N - \frac{1}{N} [k \log_2 k + (N - k) \log_2 (N - k)]$, а второй опыт $I_2 = H_1 - H_2 = \frac{1}{N} [k \log_2 k + (N - k) \log_2 (N - k)] - \frac{1}{N} [l \log_2 l + (k - l) \log_2 (k - l) + r \log_2 r + (N - k - r) \log_2 (N - k - r)]$.

28.5. Минимальное число проверок равно трем, например, в последовательностях № 6, № 5 и № 3. У к а з а н и е. Определить количество информации, которое дает каждая проверка, и выбрать в качестве первой проверки одну из тех, которым соответствует наибольшее количество информации. Аналогично выбирать номера

последующих проверок, пока энтропия системы не станет равной нулю. Для расчета количества информации воспользоваться ответом к предыдущей задаче.

$$28.6. \frac{I}{T} = - \frac{\sum_i P(A_i) \log_2 P(A_i)}{\sum_j P(a_j) t_j}, \text{ где } P(a_j) = P(A_i), \text{ если}$$

символу алфавита A_i соответствует символ кода a_j . Для кода № 1 $\frac{I}{T} = \frac{1,782}{5,85} = 0,304$ дв. ед./ед. вр. Для кода № 2 $\frac{I}{T} = \frac{1,782}{6,30} = 0,283$ дв. ед./ед. вр.

28.7. Для наиболее эффективного кода символам алфавита, расположенным в порядке убывания их вероятностей, должны соответствовать символы кода, занимающие те же порядковые номера при их расположении в порядке возрастания длительностей, т. е. символам A_1, A_4, A_3 и A_2 должны соответствовать символы кода d, c, b и a . Эффективность такого кода равна

$$\frac{I}{T_{\min}} = \frac{1,782}{4,55} = 0,391 \text{ дв. ед./ед. вр.}$$

$$28.8. l = 1 - \frac{H}{H_{\max}} = 1 + \frac{0,8 \log_2 0,8 + 0,1 \log_2 0,1 + 0,1 \log_2 0,1}{\log_2 3} = 0,42.$$

28.9. а) См. таблицу 126.

Таблица 126

Буква	A	B
Вероятности	0,8	0,2
Кодовые обозначения	1	0

б) См. таблицу 127.

Таблица 127

Буквенные сочетания	AA	AB	BA	BB
Вероятности	0,64	0,16	0,16	0,04
Кодовые обозначения	1	01	001	000

в) См. таблицу 128.

Таблица 128

Буквенные сочетания	AAA	AAB	ABA	BAA	ABB	BAB	BBA	BVB
Вероятности . .	0,512	0,128	0,128	0,128	0,032	0,032	0,032	0,008
Кодовые обозначения	1	011	010	001	00011	00010	00001	00000

- Экономности кодов соответственно равны: а) $\frac{0,722}{1} = 0,722$;
 б) $\frac{1,444}{1,56} = 0,926$; в) $\frac{2,166}{2,184} = 0,992$.
 28.10. а) $P(1) = 0,8$, $P(0) = 0,2$, $l_a = 1 - 0,722 = 0,278$;
 б) $P(1) = \frac{0,96}{1,56} = 0,615$, $P(0) = 0,385$, $l_b = 1 - 0,962 = 0,038$;
 в) $P(1) = \frac{1,152}{2,184} = 0,528$, $P(0) = 0,472$, $l_b = 1 - 0,9977 = 0,0023$.
 28.11. 1) См. таблицы 129 и 130.

Таблица 129

Буквы	A	B	C
Вероятности	0,7	0,2	0,1
Кодовые обозначения . . .	1	01	00

Таблица 130

Двухбуквенные сочетания . .	AA	AB	BA	AC	CA	BB	BC	CB	CC
Вероятности .	0,49	0,14	0,14	0,07	0,07	0,04	0,02	0,02	0,01
Кодовые обозначения . .	1	011	010	0011	0010	0001	00001	000001	000000

- 2) Экономности кодов соответственно равны 0,890 и 0,993.
 3) Избыточности кодов соответственно равны 0,109 и 0,0007.

28.12. См. таблицу 131.

Таблица 131

Буквы	Кодовые обозначения						
—	111	р	01011	я	001001	х	0000100
о	110	в	01010	ы	001000	ж	0000011
с, ё	1011	л	01001	з	000111	ю	0000010
а	1010	к	01000	ь, ъ	000110	ш	00000011
и	1001	м	00111	б	000101	ц	00000010
т	1000	д	00101	г	000100	щ	00000001
н	0111	п	001101	ч	000011	з	000000001
с	0110	у	001100	й	0000101	ф	000000000

28.13. Воспользоваться тем, что кодовое обозначение буквы A_j будет состоять из k_j символов.

28.14. При отсутствии помех количество информации равно энтропии входной схемы сообщений: $I = -\mathbf{P}(A_1) \log_2 \mathbf{P}(A_1) - \mathbf{P}(A_2) \log_2 \mathbf{P}(A_2) = 1$ дв. ед. При наличии помех $I = 0.919$ дв. ед.; оно уменьшается на величину средней условной энтропии, равной $-\mathbf{P}(a_1) [\mathbf{P}(A_1 | a_1) \log_2 \mathbf{P}(A_1 | a_1) + \mathbf{P}(A_2 | a_1) \log_2 \mathbf{P}(A_2 | a_1)] - \mathbf{P}(a_2) [\mathbf{P}(A_1 | a_2) \log_2 \mathbf{P}(A_1 | a_2) + \mathbf{P}(A_2 | a_2) \log_2 \mathbf{P}(A_2 | a_2)]$, где $\mathbf{P}(A_j | a_i) = \frac{\mathbf{P}(A_j) \mathbf{P}(a_i | A_j)}{\mathbf{P}(a_i)}$.

28.15. При отсутствии помех $I = H_1 = \log_2 m$; при наличии помех $I = H_1 - H_2 = \log_2 m + p \log_2 p + q \log_2 \frac{q}{m-1}$.

28.16. $I = \log_2 m + \sum_i \sum_j \mathbf{P}(a_i) \mathbf{P}(A_j | a_i) \log_2 \mathbf{P}(A_j | a_i)$, где

$$\mathbf{P}(a_i) = \frac{1}{m} \sum_j p_{ij} \quad \mathbf{P}(A_j | a_i) = \frac{p_{ij}}{\sum_j p_{ij}}$$

Глава VI

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

§ 29. Закон больших чисел

29.1. а) $\mathbf{P}(|X - \bar{x}| \geq 4E) \leq 0.1375$; б) $\mathbf{P}(|X - \bar{x}| \geq 3\sigma) \leq \frac{1}{9}$.

29.2. Доказывается так же, как неравенство Чебышева. В ходе доказательства использовать очевидное неравенство $\int_{\Omega} f(x) dx \leq$

$\leq \int_{\Omega} \frac{1}{J} e^{\varepsilon x - t^2} f(x) dx$, где Ω — множество всех x , удовлетворяющих условию $x > \frac{t^2 + \ln J}{\varepsilon}$.

29.3. С помощью рассуждений, аналогичных доказательству неравенства Чебышева, получается цепь неравенств $P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{e^{a\varepsilon}} \int_{e^{ax} > e^{a\varepsilon}} e^{ax} dF(e^{ax}) \leq e^{-a\varepsilon} M[e^{aX}]$.

29.4. Воспользоваться неравенством Чебышева, учтя при этом, что $\bar{x} = m + 1$, а $M[X^2] = (m + 1)(m + 2)$ и, следовательно, $P(0 < X < 2(m + 1)) = P(|X - \bar{x}| < m + 1) > 1 - \frac{D[X]}{(m + 1)^2}$.

29.5. Обозначая X_n случайное число появлений события A в результате n опытов, имеем $P(|X_n - 500| < 100) > 1 - \frac{250}{100^2} = 0,975$. Следовательно, сказанное в задаче справедливо.

29.6. Случайные величины X_k взаимно независимы и имеют одинаковые математические ожидания $\bar{x}_k = 0$ и дисперсии $D[X_k] = 1$, что свидетельствует о выполнении условий теоремы Чебышева.

29.7. При $s < \frac{1}{2}$, так как в этом случае $\lim_{n \rightarrow \infty} D \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k^{2s} = 0$.

29.8. $\lim_{n \rightarrow \infty} D \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \ln(n!) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \ln \left\{ n^{n + \frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left\{ \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln n - n + \ln \sqrt{2\pi} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$, что доказывает применимость закона больших чисел.

29.9. а) Не выполняются, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} D \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4(4^n - 1)}{3n^2} = \infty$; б) выполняются, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} D \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \right\} =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0; \text{ в) не выполняются, так как } \lim_{n \rightarrow \infty} D \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \right\} >$$

$$> \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

29.10. Применим, так как при $k_{ij} < 0$ справедливо неравенство $0 \leq D \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \right] < \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n D[X_k] < \frac{c}{n}$, где c — верхняя граница $D[X_k]$ для всех $k = 1, 2, \dots, n$. Из неравенства следует $\lim_{n \rightarrow \infty} D \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \right\} = 0$.

29.11. Для доказательства достаточно оценить $D \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \right] = \frac{1}{n^2} \left[\sum_{k=1}^n \sigma_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} r_{k, k+1} \sigma_k \sigma_{k+1} \right]$, где $\sigma_k^2 = D[X_k]$, а $r_{k, k+1} = \frac{M[(X_k - \bar{x}_k)(X_{k+1} - \bar{x}_{k+1})]}{\sigma_k \sigma_{k+1}}$. Заменяя все σ_k их наибольшим значением b , получим $D \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \right] < \frac{3n-2}{n^2} b^2$, откуда немедленно следует $\lim_{n \rightarrow \infty} D \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \right] = 0$.

29.12. Применим, так как выполнены условия теоремы Хинчина.

29.13. Рассмотрим $D[Z_n] = D \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \right] = \frac{1}{n^2} \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij} \sigma_i \sigma_j \right| <$

$$< \frac{c}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |r_{ij}|$$
, где σ_i — среднее квадратическое отклонение слу-

чайной величины X_i . Так как $r_{ij} \rightarrow 0$ при $|i-j| \rightarrow \infty$, то по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое N , что для всех $|i-j| > N$ справедливо неравенство $|r_{ij}| < \varepsilon$. Это значит, что в матрице $\|r_{ij}\|$, насчитывающей n^2 элементов, не более Nn элементов превосходит ε (их мы заменим единицей), остальные же меньше ε . Из сказанного сле-

дует неравенство $\left| \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij} \right| < \frac{Nn}{n^2} + \frac{1}{n^2} (n^2 - Nn) \varepsilon = \varepsilon +$

$+\frac{N}{n}(1-\epsilon)$, указывающее на то, что $\lim_{n \rightarrow \infty} D[z_n] = 0$; это и доказывает теорему.

29.14. Закон больших чисел неприменим, так как ряд $\frac{6}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, определяющий $M[X_i]$, не является абсолютно сходящимся.

§ 30. Теоремы Муавра — Лапласа и Ляпунова

30.1. $P\left(0,2 \leq \frac{m}{n} < 0,4\right) = 0,97$. 30.2. $P(70 \leq m < 86) = 0,927$.

30.3. а) $P(m \geq 20) = 0,5$; б) $P(m < 28) = 0,9772$;
в) $P(14 \leq m < 26) = 0,8664$.

30.4. В предельном равенстве теоремы Муавра — Лапласа положить $b = -a = \epsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}$, а затем воспользоваться интегральными представлениями функций $\Phi(x)$ и $\hat{\Phi}(x)$.

30.5. Ввиду того, что вероятность события неизвестна, дисперсию числа появлений события следует принять максимальной, т. е. положить $pq = 0,25$. При этом допущении: а) $n \approx 250\,000$; б) $n = 16\,600$.

30.6. В задачах, где верхний предел допустимого числа появлений события равен числу произведенных опытов, b оказывается настолько большим, что $\Phi(b) \approx 1$. При этом допущении $n \approx 108$.

30.7. $n \approx 65$. 30.8. $p = 0,943$. 30.9. $67,5$.

30.10. $J = \int_0^1 x^2 dx$ можно рассматривать как начальный момент второго порядка случайной величины, равномерно распределенной в интервале $[0, 1]$; тогда его статистическим аналогом, определяемым методом Монте-Карло, будет величина $J_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^2$, где X_k — случайные числа из интервала $[0, 1]$. С помощью теоремы Ляпунова находим $P(|J_{1000} - J| < 0,01) = 0,71$.

30.11. $n \approx 1,55 \cdot 10^6$. Положить $J_n = \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^n \sin X_k$, где X_k — случайные числа из интервала $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

30.12. 1) Так как разность $P(C) - P_n(C) = \left[\frac{m}{n} - P(A)\right] \times [1 - P(B|A)]$, то с точки зрения закона больших чисел оба метода приводят к правильным результатам; 2) в первом

случае потребуется более 9750 опытов, во втором случае — 4500 опытов.

30.13. 1) 3100; 2) 1500.

30.14. Во всех трех случаях предельная характеристическая функция равна $e^{-\frac{u^2}{2}}$. 30.15. $\lim_{n \rightarrow \infty} E_{Y_n}(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$.

Глава VII

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 31. Общие свойства корреляционных функций и законов распределения случайных функций

31.1. Обозначая закон распределения второго порядка для случайной функции $X(t)$ через $f(x_1, x_2 | t_1, t_2)$, по определению $K_x(t_1, t_2)$

$$\text{имеем } K_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2) f(x_1, x_2 | t_1, t_2) dx_1 dx_2.$$

Применение неравенства Буняковского дает $|K_x(t_1, t_2)|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \bar{x}_1)^2 f(x_1, x_2 | t_1, t_2) dx_1 dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_2' - \bar{x}_2')^2 \times$
 $\times f(x_1', x_2' | t_1, t_2) dx_1' dx_2' = \sigma_{x(t_1)}^2 \sigma_{x(t_2)}^2$, что эквивалентно первому неравенству. Для доказательства второго неравенства достаточно рассмотреть очевидное соотношение $M\{|[X(t_1) - \bar{x}(t_1)] - [X(t_2) - \bar{x}(t_2)]|^2\} \geq 0$.

31.2. Доказывается аналогично предыдущему.

31.3. Следует из определения корреляционной функции.

31.4. Так как $X(t) = \sum_{j=1}^n \Delta_j + c$, где c — неслучайная постоянная,

а n — число скачков за время t , то $D[X(t)] = M[n\sigma^2] = \lambda t \sigma^2$.

31.5. Корреляционная функция $K_x(\tau)$ равна вероятности того, что за время τ произойдет четное число перемен знака, за вычетом вероятности нечетного числа перемен знака, т. е.

$$K_x(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^{2n}}{(2n)!} e^{-\lambda\tau} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^{2n+1}}{(2n+1)!} e^{-\lambda\tau} = e^{-2\lambda\tau}.$$

31.6. Так как $M[X(t)X(t+\tau)]$ отлично от 0 только в том случае, когда оба конца интервала τ попадают в один единичный интервал, вероятность чего равна 0 при $|\tau| > 1$ и $(1 - |\tau|)$ при $|\tau| \leq 1$, то при $|\tau| \leq 1$ $K_x(\tau) = (1 - |\tau|) M[X^2] = (1 - |\tau|) \times$

$$\times \int_0^{\infty} x^2 \frac{x^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} e^{-x} dx = (\lambda+2)(\lambda+1)(1-|\tau|). \text{ Следовательно,}$$

$$K_\tau(\tau) = \begin{cases} (\lambda+2)(\lambda+1)(1-|\tau|), & |\tau| \leq 1, \\ 0, & |\tau| > 1. \end{cases}$$

31.7. Обозначая $\theta_1 = \theta(t_1)$, $\theta_2 = \theta(t_1 + \tau)$, для условного закона распределения θ_2 имеем $f(\theta_2 | \theta_1 = 5^\circ) = \frac{f(\theta_1, \theta_2)}{f(\theta_1)}$, где $f(\theta_1, \theta_2)$ — нормальный закон распределения системы случайных величин с корреляционной матрицей

$$\begin{vmatrix} K_\theta(0) & K_\theta(\tau) \\ K_\theta(\tau) & K_\theta(0) \end{vmatrix}.$$

Подставляя данные из условия задачи, получим

$$P = \int_{15}^{\infty} f(\theta_2 | \theta_1 = 5^\circ) d\theta_2 = \frac{1}{2} [1 - \Phi(2.68)] = 0.0037.$$

31.8. Обозначая углы крена в моменты t и $t + \tau$ через θ_1 и θ_2 соответственно, а их закон распределения через $f(\theta_1, \theta_2)$, для условного закона распределения угла крена в момент второго измерения

получим $f(\theta_2 | -\theta_0 \leq \theta_1 \leq \theta_0) = \frac{\int_{-\theta_0}^{\theta_0} f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1}{\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta_1, \theta_2) d\theta_2 d\theta_1}$. Иско-

мая вероятность

$$P = \frac{1}{2\sqrt{2\pi} \sigma_\theta \Phi\left(\frac{\theta_0}{\sigma_\theta}\right)} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} e^{-\frac{\theta_2^2}{2\sigma_\theta^2}} \left[\Phi\left(\frac{\theta_0 + k\theta_2}{\sigma_\theta \sqrt{1-k^2}}\right) + \Phi\left(\frac{\theta_0 - k\theta_2}{\sigma_\theta \sqrt{1-k^2}}\right) \right] d\theta_2.$$

31.9. Обозначая $X_1 = \theta(t)$, $X_2 = \dot{\theta}(t)$, $X_3 = \theta(t + \tau_0)$, для корреляционной матрицы системы X_1, X_2, X_3 получим

$$\|k_{jt}\| = \begin{vmatrix} K_\theta(0) & 0 & K_\theta(\tau_0) \\ 0 & -\dot{K}_\theta(0) & -\dot{K}_\theta(\tau_0) \\ K_\theta(\tau_0) & -\dot{K}_\theta(\tau_0) & K_\theta(0) \end{vmatrix}.$$

что после подстановки чисел дает

$$\|k_{jt}\| = \begin{vmatrix} 36 & 0 & 36e^{-0,5} \\ 0 & 36(0,25^2 + 1,57^2) & 0 \\ 36e^{-0,5} & 0 & 36 \end{vmatrix}.$$

Определяя по закону распределения $f(x_1, x_2, x_3)$ условный закон распределения

$$f(x_3 | x_1 = 2, x_2 > 0) = \frac{\int_0^{\infty} f(x_1, x_2, x_3) dx_2}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} f(x_1, x_2, x_3) dx_2 dx_3} \Bigg|_{x_1=2}$$

для искомой вероятности, получим

$$P = \int_{-10}^{10} f(x_3 | x_1 = 2, x_2 > 0) dx_3 = 0,958.$$

$$31.10. \bar{y}(t) = a(t)\bar{x}(t) + b(t); K_y(t_1, t_2) = a^*(t_1) a(t_2) K_x(t_1, t_2).$$

$$31.11. f(x) dx = \int \int_{x \leq a \cos \theta \leq x+dx} f_a(a) f_{\theta}(\theta) da d\theta;$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

31.12. Вероятность того, что интервал T будет заключен между τ и $\tau + d\tau$, равна вероятности того, что в интервале $(0, \tau)$ будет n точек, а в интервале $(\tau, \tau + d\tau)$ — одна точка. Так как по условию эти события независимы, то $P(\tau \leq T \leq \tau + d\tau) = \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} e^{-\lambda\tau} \lambda d\tau$,

$$\text{т. е. } f(\tau) = \frac{\lambda^{n+1} \tau^n}{n!} e^{-\lambda\tau}.$$

$$31.13. f(u) = \frac{1}{15,8 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{498}}.$$

§ 32. Линейные операции над случайными функциями

32.1. Так как $\dot{K}_x(\tau)$ не имеет разрыва при $\tau = 0$, то

$$K_{\dot{x}}(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2} K_x(\tau) = \alpha^2 e^{-\alpha|\tau|} (1 - \alpha|\tau|).$$

$$32.2. K_y(\tau) = a(\alpha^2 + \beta^2) e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta\tau - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right),$$

$$D[Y(t)] = K_y(0) = a(\alpha^2 + \beta^2).$$

32.3. Пользуясь определением корреляционной функции связи, получим $R_{x\dot{x}}(\tau) = M \left\{ [X^*(t) - \bar{x}^*] \frac{dX(t+\tau)}{d\tau} \right\} =$
 $= \frac{d}{d\tau} M \{ [X^*(t) - \bar{x}^*] [X(t+\tau) - \bar{x}] \} = \frac{d}{d\tau} K_x(\tau).$

32.4. Так как любая производная $K_x(\tau)$ непрерывна в нуле, то $X(t)$ дифференцируема любое число раз.

32.5. Два раза, так как $\frac{d^2}{d\tau^2} K_x(\tau)|_{\tau=0}$ и $\frac{d^4}{d\tau^4} K_x(\tau)|_{\tau=0}$ существуют, $\frac{d^5}{d\tau^5} K_x(\tau)$ терпит разрыв в нуле. 32.6. Существует только первая производная, так как $\frac{d^2}{d\tau^2} K_x(\tau)$ существует при $\tau=0$, а $\frac{d^3}{d\tau^3} K_x(\tau)$ терпит разрыв в этой точке.

32.7. $R_{\dot{x}\dot{x}}(\tau) = \alpha^2 \sigma_x^2 (\tau - t_0) e^{-\alpha|\tau-t_0|}$. 32.8. $D[Y(t)] = \sigma_x^2$,

$D[Z(t)] = \alpha^2 \sigma_x^2$. 32.9. $K_y(\tau) = 2\alpha^2 \sigma_x^2 \alpha^2 e^{-\alpha^2 \tau^2} (1 - 2\alpha^2 \tau^2)$.

32.10. Закон распределения $f(v)$ нормальный с дисперсией $\sigma_v^2 = a(\alpha^2 + \beta^2)$ и $\bar{v} = 0$, $P = 0.3085$.

32.11. $\bar{z}(t) = \bar{x}(t) + \bar{y}(t)$; $K_z(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2) + K_y(t_1, t_2) + R_{xy}(t_1, t_2) + R_{yx}(t_1, t_2)$.

32.12. $\bar{x}(t) = \sum_{j=1}^n \bar{x}_j(t)$; $K_x(t_1, t_2) = \sum_{j=1}^n K_{x_j}(t_1, t_2) + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^n \sum_{j=1}^n R_{x_l x_j}(t_1, t_2)$.

32.13. $K_y(\tau) = K_x(\tau) + \frac{d^2}{d\tau^2} K_x(\tau) + \frac{d^4}{d\tau^4} K_x(\tau)$.

32.14. $K_z(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|} \left\{ 1 + \alpha|\tau| + \frac{1}{3} \alpha^2 \tau^2 + \frac{2\alpha^2}{3} (\alpha^2 \tau^2 - \alpha|\tau| - 1) + \frac{\alpha^4}{3} (\alpha^2 \tau^2 - 5\alpha|\tau| + 3) \right\}$.

32.15. Так как $K_y(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} K_x(t'_2 - t'_1) dt'_2 dt'_1$, то, полагая $t_1 = t_2 = t$, переходя к новым переменным интегрирования и выполняя одно интегрирование, получим $D[Y(t)] = K_y(t, t) = 2 \int_0^t (t-\tau) K_x(\tau) d\tau$.

32.16. Решая задачу аналогично предыдущей, после преобразования двойного интеграла получим $K_x(t_1, t_2) = \int_0^{t_2} (t_2 - \tau) K_y(\tau) d\tau +$
 $+ \int_0^{t_1} (t_1 - \tau) K_y(\tau) d\tau - \int_0^{t_2 - t_1} (t_2 - t_1 - \tau) K_y(\tau) d\tau.$

$$32.17. R_{xy}(t_1, t_2) = \int_0^{t_2} K_x(t_1, \xi) d\xi. \quad 32.18. D[Y(20)] = 1360 \text{ см}^2.$$

$$32.19. \bar{y}(t) = a_0 \bar{x}(t) + a_1 \frac{d\bar{x}(t)}{dt} + b_1 \int_0^t e^{-\lambda t_1} \bar{x}(t_1) dt_1 + c;$$

$$K_y(t_1, t_2) = a_0^2 K_x(t_1, t_2) + a_0 a_1 \left[\frac{\partial K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1} + \frac{\partial K_x(t_1, t_2)}{\partial t_2} \right] +$$

$$+ a_1^2 \frac{\partial^2 K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} + a_0 b_1 \left[\int_0^{t_1} e^{-\lambda t_1'} K_x(t_1', t_2) dt_1' + \right.$$

$$+ \left. \int_0^{t_2} e^{-\lambda t_2'} K_x(t_1, t_2') dt_2' \right] + a_1 b_1 \left[\int_0^{t_1} e^{-\lambda t_1'} \frac{\partial K_x(t_1', t_2)}{\partial t_2} dt_1' + \right.$$

$$+ \left. \int_0^{t_2} e^{-\lambda t_2'} \frac{\partial K_x(t_1, t_2')}{\partial t_1} dt_2' \right] + b_1^2 \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} e^{-\lambda(t_1' + t_2')} K_x(t_1', t_2') dt_1' dt_2'.$$

$$32.20. R_{yz}(t_1, t_2) = ac \frac{\partial K_x(t_1, t_2)}{\partial t_2} + ad \frac{\partial^2 K_x(t_1, t_2)}{\partial t_2^2} +$$

$$+ bc \frac{\partial^2 K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} + bd \frac{\partial^3 K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2^2}.$$

32.21. Так как дисперсия $D[\theta(t)]$ мала, то $\sin \theta \approx \theta$, $D[\Delta V(t)] =$
 $= 2g^2 \int_0^t (t - \tau) K_\theta(\tau) d\tau = \frac{2g^2 a}{\alpha} \left[t - \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) \right]$, что после подстановки числовых величин дает $\sigma_{\Delta v} = 1.86 \text{ м/сек}.$

32.22. Используя определение корреляционной функции как математического ожидания произведения отклонений ординат случайной функции и формулы для моментов нормальных случайных величин, получим $K_x(\tau) = a^2 K_\theta^{(IV)}(\tau) + b^2 K_\theta(\tau) + 2c^2 \dot{K}_\theta^2(\tau) - 2ab \dot{K}_\theta(\tau).$

$$32.23. K_m(\tau) = 2a^2 K_\theta^2(\tau) + 2b^2 K_\psi^2(\tau) - c^2 K_\theta(\tau) \dot{K}_\psi(\tau).$$

$$32.24. K_y(\tau) = e^{-\alpha^2 \tau^2} [1 + 2\alpha^2 (1 - 2\alpha^2 \tau^2)].$$

32.25. $R_{xy}(\tau) = -\frac{1}{3} a \alpha^2 e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau| - \alpha^2 \tau^2)$.

32.26. $K_y(t_1, t_2) = a^*(t_1) a(t_2) K_x(\tau) + b^*(t_1) b(t_2) \frac{d^4 K_x(\tau)}{d\tau^4} + [a^*(t_1) b(t_2) + b^*(t_1) a(t_2)] \frac{d^2 K_x(\tau)}{d\tau^2}$.

32.27. Не существует. 32.28. а) Стационарна; б) не стационарна.

32.29. $\sigma_y^2 = 6,5 \cdot 10^8 \sigma_x^2 [0,1t - 0,2 + 0,1 \cos(2,48 \cdot 10^{-3}t) - 8,0 \sin(2,48 \cdot 10^{-3}t)]$. При $t = 1$ час. $\sigma_y \approx 1,5$ км.

32.30. $D[\alpha(t)] \approx a_1 t$; $D[\beta(t)] \approx b_1 t$; $a_1 = \frac{2}{\pi p} \int_0^\infty [(\cos \lambda \tau + 2) \times$
 $\times \left(\frac{1}{p} k_1^2 \arcsin k_\psi(\tau) + k_2^2 \frac{\cos \lambda \tau}{q} \arcsin k_\theta(\tau) \right)] d\tau$;

$b_1 = \frac{2}{\pi q} \int_0^\infty [(\cos \lambda \tau + 2) \left(\frac{1}{q} k_2^2 \arcsin k_\theta(\tau) + k_1^2 \frac{\cos \lambda \tau}{p} \arcsin k_\psi(\tau) \right)] d\tau$.

$k_\psi(\tau)$ и $k_\theta(\tau)$ — нормированные корреляционные функции $\dot{\Psi}(t)$ и $\dot{\Theta}(t)$; $\lambda = \sqrt{pq}$.

32.31. $D[Z(t)] = \int_0^t \int_0^t \exp\{a^2(\tau_1 + \tau_2) + \frac{a^4}{4}[3\varphi(\tau_1) +$
 $+ 3\varphi(\tau_2) - \varphi(\tau_2 - \tau_1)] K_x(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2$, где

$$\varphi(\tau) = 2 \int_0^\tau (\tau - \tau_1) K_y(\tau_1) d\tau_1.$$

§ 33. Задачи о выбросах

33.1. $\bar{\tau}_a = 10\pi [1 - \Phi(1)] e^{\frac{1}{2}} = 16,45$ сек. 33.2. $D[V(t)] = 0,25 \text{ см}^2/\text{сек}^2$.

33.3. Число выбросов снизу вверх за уровень $a = 25^\circ$ равно числу выбросов сверху вниз за уровень $a_1 = -25^\circ$; следовательно,

искомое число выбросов $2T \frac{1}{2\pi} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} e^{-\frac{a^2}{2\beta}} = 11,9$ раза.

33.4. $\frac{\pi}{1,5} e^{0,9} \left[1 - \Phi\left(\frac{3\sqrt{5}}{5}\right) \right] = 9,91$ сек. 33.5. Начиная с $t = (\sqrt{4\pi^2 p_0^2 - \alpha^2})^{-1}$.

33.6. Задача сводится к определению числа выбросов случайной функции $\dot{X}(t)$ за уровни $\sqrt{\frac{w_0}{k}}$ вверх и $-\sqrt{\frac{w_0}{k}}$ (вниз).

Ответ: $\frac{1}{\pi} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} e^{-\frac{w_0}{2ka}}$.

33.7. Так как радиус кривизны R равен $\frac{v}{\dot{\Psi}(t)}$, то чувствительный элемент будет доходить до упора, когда $\dot{\Psi}(t)$ выйдет за пределы полосы $\pm \frac{v}{R_0}$, что дает в единицу времени $\frac{1}{\pi} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \times \times \exp \left\{ -\frac{v^2}{2a(\alpha^2 + \beta^2) R_0^2} \right\}$ сек⁻¹.

33.8. При $\bar{h} \geq 54,5$ м. 33.9. $Q = \exp \left\{ -\frac{aT}{\pi} e^{-\frac{a^2}{2b}} \right\}$.

33.10. Обозначив плотность вероятности системы нормальных величин $X(t)$, $\dot{X}(t)$ и $\ddot{X}(t)$ через $f(x, x_1, x_2)$, для искомой плотности вероятности получим

$$f(x) = \frac{\int_{-\infty}^0 f(x, 0, x_2) dx_2}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^0 f(x, 0, x_2) dx_2 dx}$$

Учитывая, что корреляционная матрица системы имеет вид

$$\|k_{jl}\| = \begin{vmatrix} K_x(0) & 0 & \dot{K}_x(0) \\ 0 & -\ddot{K}_x(0) & 0 \\ \dot{K}_x(0) & 0 & K_x^{IV}(0) \end{vmatrix},$$

после интегрирования получим $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{x^2}{2a}} \left[1 + \Phi \left(\frac{x}{\sqrt{2a}} \right) \right]$.

33.11. $f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \left[1 - \Phi \left(\frac{x}{2\sigma \sqrt{2}} \right) \right]$.

33.12. Искомое число равно числу выбросов (в обе стороны) за нулевой уровень; следовательно,

$$\frac{T}{\pi} \sqrt{\frac{D[\ddot{X}(t)]}{D[\dot{X}(t)]}} = \frac{Ta}{\pi} \sqrt{10}.$$

33.13.

$$\bar{n} = p = \frac{1}{8\pi^2 \sqrt{\Delta_1 A_{55}}} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 \left[\Phi \left(\frac{A_{55} \sqrt{z_3 z_4} + A_{35} z_3 + A_{45} z_4}{\sqrt{A_{55} \Delta_2}} \right) + \Phi \left(\frac{A_{55} \sqrt{z_3 z_4} - A_{35} z_3 - A_{45} z_4}{\sqrt{A_{55} \Delta_2}} \right) \right] z_3 z_4 \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\Delta_2} \left[A_{33} z_3^2 + A_{44} z_4^2 + 2A_{34} z_3 z_4 - \frac{(A_{35} z_3 + A_{45} z_4)^2}{A_{55}} \right] \right\} dz_3 dz_4,$$

где

$$\Delta_1 = k_{11} k_{22} - k_{12}^2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ k_{34} & k_{44} & k_{45} \\ k_{35} & k_{45} & k_{55} \end{vmatrix}, \quad A_{jl} \quad (j, l = 3, 4, 5)$$

— алгебраические дополнения определителя Δ_2 , а k_{jl} приведены в ответе к задаче 33.14.

33.14. \bar{n} равно плотности вероятности p перемены знаков у ξ_x и ξ_y вблизи точки с координатами x, y , определяемой формулой

$$p dx dy = \mathbf{P} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} > 0; \frac{\partial \xi}{\partial x} (x + dx, y) < 0; \frac{\partial \xi}{\partial y} > 0; \frac{\partial \xi}{\partial y} (x, y + dy) < 0 \right) = \\ = \mathbf{P} \left(0 < \frac{\partial \xi}{\partial x} < -\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx; 0 < \frac{\partial \xi}{\partial y} < -\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} dy \right).$$

Вероятность $p dx dy$ может быть вычислена, если учесть, что $K(\xi, \eta)$ однозначно определяет закон распределения $\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial y}, \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}$.

Выполнив вычисления, получим:

$$\bar{n} = p = \frac{\Delta_2}{4\pi^2 \sqrt{\Delta_1 \Delta_2}} \left[1 + \frac{k_{34}}{\sqrt{\Delta_2}} \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{k_{34}}{\sqrt{\Delta_2}} \right) \right],$$

где

$$\Delta_1 = k_{11} k_{22} - k_{12}^2, \quad \Delta_2 = k_{33} k_{44} - k_{34}^2;$$

$$k_{11} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega_1, \omega_2) \omega_1^2 d\omega_1 d\omega_2; \quad k_{22} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega_1, \omega_2) \omega_2^2 d\omega_1 d\omega_2;$$

$$k_{34} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega_1, \omega_2) \omega_1^2 \omega_2^2 d\omega_1 d\omega_2, \quad k_{33} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega_1, \omega_2) \omega_1^4 d\omega_1 d\omega_2;$$

$$k_{44} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega_1, \omega_2) \omega_2^4 d\omega_1 d\omega_2;$$

$$k_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega_1, \omega_2) \omega_1 \omega_2 d\omega_1 d\omega_2;$$

$$k_{35} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega_1, \omega_2) \omega_1^3 \omega_2 d\omega_1 d\omega_2; \quad k_{45} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega_1, \omega_2) \omega_1 \omega_2^3 d\omega_1 d\omega_2;$$

$$k_{55} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega_1, \omega_2) \omega_1^2 \omega_2^2 d\omega_1 d\omega_2.$$

§ 34. Спектральное разложение стационарных случайных функций

$$34.1. K(\tau) = 2a \frac{\sin b\tau}{\tau}. \quad 34.2. K(\tau) = 2c^2 (2 \cos \omega_0 \tau - 1) \frac{\sin \omega_0 \tau}{\tau}.$$

$$34.3. \text{Обозначив } J(\alpha, \omega) = \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau| - i\omega\tau} d\tau = \frac{a\alpha}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)}, \text{ имеем}$$

$$S(\omega) = J - \alpha \frac{\partial J}{\partial \alpha} = \frac{2a}{\pi} \frac{\alpha^3}{(\omega^2 + \alpha^2)^2}. \quad 34.4. S(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left(\frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}} \right)^2.$$

$$34.5. S(\omega) = \frac{\alpha\sigma^2}{\pi} \frac{\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2}{(\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\beta^2\omega^2} = \\ = \frac{\alpha\sigma^2}{\pi} \frac{\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2}{(\omega^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2} = \frac{\alpha\sigma^2}{\pi} \frac{\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2}{(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2}.$$

$$34.6. S(\omega) = \frac{2\sigma^2}{\pi} \frac{\alpha(\alpha^2 + \beta^2)}{(\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\beta^2\omega^2} = \\ = \frac{2\sigma^2}{\pi} \frac{\alpha(\alpha^2 + \beta^2)}{(\omega^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2} = \frac{2\sigma^2}{\pi} \frac{\alpha(\alpha^2 + \beta^2)}{(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2}.$$

$$34.7. \text{Решая задачу аналогично 34.3, получим } S(\omega) = \frac{\sigma^2}{\pi} \frac{16a^3\omega^4}{(\omega^2 + \alpha^2)^4}.$$

34.8. $S(\omega) = \frac{2a\alpha\omega^2}{\pi[(\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\beta^2\omega^2]}$. 34.9. Две производные, так

как $S_x(\omega)$ с ростом ω убывает, как $\frac{1}{\omega^6}$. 34.10. $S(\omega) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n \frac{a_j \alpha_j}{\omega^2 + \alpha_j^2}$.

34.11. $\frac{dS(\omega)}{d\omega} = \frac{2a\alpha^2\omega}{\pi[(\omega^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2]} \{4\beta^2(\alpha^2 + \beta^2) - (\alpha^2 + \beta^2 + \omega^2)^2\}$. Следовательно, при $\omega = 0$ всегда будет экстремум. Если при $\omega = 0$ выражение в фигурных скобках отрицательно, то знак производной в этой точке меняется с плюса на минус; в этой точке будет максимум, и других максимумов не может быть. Таким образом, условием отсутствия максимумов, кроме нулевой точки, будет $\alpha^2 > 3\beta^2$. При $\alpha^2 = 3\beta^2$ $S(\omega) = \frac{\alpha^2\alpha}{\pi} \frac{1}{\omega^2 + 4\beta^2}$, т. е. $S(\omega)$ тоже имеет только один максимум в начале координат. Таким образом, если $\alpha^2 \geq 3\beta^2$, то имеется один максимум в начале; если $\alpha^2 < 3\beta^2$, то в начале будет минимум и появятся два максимума

в точках $\omega = \pm \omega_2$, $\omega_2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sqrt{2\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} + \beta^2}$.

34.12. Так как $S_{\dot{x}}(\omega) = \frac{a^2\omega^2}{(\omega^2 + \alpha^2)^2}$, то $D[\dot{X}(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\dot{x}}(\omega) d\omega = \frac{\pi a^2}{2\alpha}$.

34.13. Так как $S_x(\omega) = \frac{a}{2\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}}$, а $R_{x\dot{x}}(\tau) = \frac{d}{d\tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_x(\omega) d\omega$, то $S_{x\dot{x}}(\omega) = i\omega S_x(\omega) = \frac{i a \omega}{2\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}} = -S_{\dot{x}x}(\omega)$.

34.14. Так как $K_{\Delta}(\tau) = a e^{-\alpha|\tau|} [k_1^2(1 + \alpha|\tau|) + \alpha^2 k_2^2(1 - \alpha|\tau|)]$, то преобразование Фурье дает

$$S_{\Delta}(\omega) = \frac{2a\alpha^2}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)^2} (k_1^2 + k_2^2\omega^2).$$

34.15. $R_{xy}(\tau) = K_x(\tau + \tau_0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(\tau + \tau_0)} S_x(\omega) d\omega$; $S_{xy}(\omega) = e^{i\omega\tau_0} S_x(\omega)$.

34.16. $S_{xy}(\omega) = (i\omega)^k e^{i\omega\tau_0} [S_u(\omega) + S_{vu}(\omega)]$.

34.17. Так как $K_z(\tau) = K_{\dot{x}}(\tau) K_{\dot{y}}(\tau) = a_1 a_2 (\alpha_1^2 + \beta_1^2)(\alpha_2^2 + \beta_2^2) \times \times e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)|\tau|} \left(\cos \beta_1 \tau - \frac{\alpha_1}{\beta_1} \sin \beta_1 |\tau| \right) \left(\cos \beta_2 \tau - \frac{\alpha_2}{\beta_2} \sin \beta_2 |\tau| \right)$, то

обращение по Фурье дает

$$S_z(\omega) = a \left\{ \frac{\alpha \cos \gamma' + (\omega - \beta') \sin \gamma'}{(\omega - \beta')^2 + \alpha^2} - \frac{\alpha \cos \gamma' + (\omega + \beta') \sin \gamma'}{(\omega + \beta')^2 + \alpha^2} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha \cos \gamma'' + (\omega - \beta'') \sin \gamma''}{(\omega - \beta'')^2 + \alpha^2} - \frac{\alpha \cos \gamma'' + (\omega + \beta'') \sin \gamma''}{(\omega + \beta'')^2 + \alpha^2} \right\},$$

где $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta' = \beta_1 + \beta_2$, $\beta'' = \beta_1 - \beta_2$, $\gamma' = \gamma_1 + \gamma_2$, $\gamma'' = \gamma_1 - \gamma_2$,

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \quad \operatorname{tg} \gamma_2 = \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \quad a = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1^2 \beta_2^2}{4\pi \cos^3 \gamma_1 \cos^3 \gamma_2}.$$

34.18. Так как $K_z(\tau) = K_x(\tau) K_y(\tau) + \bar{x}^2 K_y(\tau) + \bar{y}^2 K_x(\tau)$, то

$$S_z(\omega) = \frac{a_1 a_2 (\alpha_1 + \alpha_2)}{\pi [\omega^2 + (\alpha_1 + \alpha_2)^2]} + \frac{\bar{x}^2 a_2 \alpha_2}{\pi (\omega^2 + \alpha_2^2)} + \frac{\bar{y}^2 a_1 \alpha_1}{\pi (\omega^2 + \alpha_1^2)}.$$

34.19. Так как $K_\Delta(\tau) = K_\psi(\tau) K_\theta(\tau)$, то преобразование Фурье дает

$$S_\Delta(\omega) = \frac{a_1 a_2}{4\pi \cos \gamma_1 \cos \gamma_2} \left\{ \frac{\alpha \cos \gamma' - (\omega - \beta') \sin \gamma'}{(\omega - \beta')^2 + \alpha^2} - \right. \\ \left. - \frac{\alpha \cos \gamma' - (\omega + \beta') \sin \gamma'}{(\omega + \beta')^2 + \alpha^2} + \frac{\alpha \cos \gamma'' - (\omega - \beta'') \sin \gamma''}{(\omega - \beta'')^2 + \alpha^2} - \right. \\ \left. - \frac{\alpha \cos \gamma'' - (\omega + \beta'') \sin \gamma''}{(\omega + \beta'')^2 + \alpha^2} \right\},$$

где $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta' = \beta_1 + \beta_2$, $\beta'' = \beta_1 - \beta_2$, $\gamma' = \gamma_1 + \gamma_2$, $\gamma'' = \gamma_1 - \gamma_2$,

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \quad \operatorname{tg} \gamma_2 = \frac{\alpha_2}{\beta_2}.$$

34.20. Применяя общую формулу $S_y(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_1)^2 \times$
 $\times S_x(\omega - \omega_1) \omega_1^2 S_x(\omega_1) d\omega_1$ и результаты задачи 34.17, получим

$$S_y(\omega) = \frac{2a^2 \alpha \beta^4}{\pi \cos^2 \gamma} \left\{ \frac{1}{\omega^2 + 4\alpha^2} + \frac{4(\alpha^2 + \beta^2)}{(\omega^2 + 4\alpha^2 - 4\beta^2)^2 + 16\alpha^2 \beta^2} \right\}, \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{\alpha}{\beta}.$$

$$34.21. \quad S_y(\omega) = \frac{4a\alpha}{\pi} \left(\frac{a}{\omega^2 + 4\alpha^2} + \frac{\bar{x}^2}{\omega^2 + \alpha^2} \right).$$

$$34.22. \quad S_y(\omega) = \omega^2 \left(a^2 \alpha \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}} + a \bar{x} e^{-\frac{\omega^2}{2\alpha^2}} \right).$$

$$34.23. \quad S_\Delta(\omega) = S_\varphi(\omega) + \cos^4 q \int_{-\infty}^{\infty} S_\psi(\omega - \omega_1) S_\theta(\omega_1) d\omega_1 + \\ + \frac{1}{8} \sin^2 2q \left[\int_{-\infty}^{\infty} S_\theta(\omega - \omega_1) S_\theta(\omega_1) d\omega_1 + \int_{-\infty}^{\infty} S_\psi(\omega - \omega_1) S_\psi(\omega_1) d\omega_1 \right],$$

где $S_\varphi(\omega) = S_1(\omega)$, $S_\theta(\omega) = S_2(\omega)$, $S_\psi(\omega) = S_3(\omega)$; $S_j(\omega) = \frac{2a_j\alpha_j}{\pi} \frac{\alpha_j^2 + \beta_j^2}{(\omega^2 + \alpha_j^2 + \beta_j^2)^2 - 4\beta_j^2\omega^2}$, $j = 1, 2, 3$, а все интегралы могут быть вычислены в конечном виде, однако ввиду громоздкости окончательного результата в данном случае предпочтительней прибегнуть к численным методам интегрирования.

34.24. Так как $K_y(\tau) = 2K_x^2(\tau) + 4x^2K_x(\tau)$, то $S_y(\omega) = \frac{4\alpha_x^4}{\pi} \frac{\alpha}{\omega^2 + 4\alpha^2} + 4x^2 \frac{\sigma_x^2\alpha}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)}$ имеет один максимум при $\omega = 0$.

34.25. $S_j(\omega) = \frac{\sigma^2\alpha}{\pi} \left[\frac{1 - \cos \frac{\omega}{a}}{\omega^2} + \frac{1}{\omega a} \left(1 - \frac{\alpha}{a} \right) \sin \frac{\omega}{a} \right]$, где $\sigma^2 = \frac{\Gamma j_0^2 n^2}{\pi a^2} \left\{ \frac{1}{3aT} \left[1 + \frac{n(n-1)\Gamma}{2\pi} \right] - \frac{n^2\Gamma}{4\pi} \right\}$, $\alpha = \frac{j_0^2 n^2 \Gamma}{2\pi a^2 T \sigma^2} \times \left[1 + \frac{n(n-1)\Gamma}{2\pi} \right]$, $T = \frac{4\pi^2}{\Omega_1\Omega_2}$, $a = \frac{2(\Omega_1 + \Omega_2)}{\gamma}$, а j_0 — сила фототока, возникающего при попадании в просвет диафрагмы одного отверстия.

§ 35. Вычисление вероятностных характеристик случайных функций на выходе динамических систем

35.1. $Y(t)$ — стационарная функция; следовательно, $S_y(\omega) = \frac{c^2}{\omega^2 + \alpha^2}$, что после обратного преобразования Фурье дает $K_y(\tau) = \frac{\pi c^2}{\alpha} e^{-\alpha|\tau|}$.

35.2. Так как $Y(t)$ стационарна, то, находя математические ожидания обеих частей уравнения, получаем $\bar{y} = \frac{b_1}{a_1} \bar{x}$. Для спектральной плотности имеем

$$S_y(\omega) = \frac{b_0^2\omega^2 + b_1^2}{a_0^2\omega^2 + a_1^2} S_x(\omega) = \frac{\sigma_x^2\alpha}{\pi} \frac{b_0^2\omega^2 + b_1^2}{(a_0^2\omega^2 + a_1^2)(\omega^2 + \alpha^2)},$$

что после интегрирования в бесконечных пределах дает $D[Y(t)] = \frac{\sigma_x^2}{a_0 a_1} \frac{a_1 b_0^2 \alpha + a_0 b_1^2}{a_1 + a_0 \alpha}$.

35.3. $S_u(\omega) = \frac{n^4}{g^2} \frac{\omega^2 [S_{\eta_c}(\omega) + c^2\omega^2 S_\theta(\omega)]}{(\omega^2 - n^2)^2 + 4h^2\omega^2}$, где $S_{\eta_c}(\omega) = \frac{2a_1\alpha_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)}{\pi [(\omega^2 - \beta_1^2 - \alpha_1^2)^2 + 4\alpha_1^2\omega^2]}$, $S_\theta(\omega) = \frac{2a_2\alpha_2(\alpha_2^2 + \beta_2^2)}{\pi [(\omega^2 - \beta_2^2 - \alpha_2^2)^2 + 4\alpha_2^2\omega^2]}$.

35.4. Так как по условию задачи $\alpha(t)$ можно считать стационарной, то $S_\alpha(\omega) = \frac{\varepsilon^2}{\omega^2 + \varepsilon^2} S_u(\omega)$, где $S_u(\omega)$ получена в задаче 35.3. Интегрируя $S_\alpha(\omega)$ в бесконечных пределах с помощью вычетов, получим $\sigma_\alpha^2 = 2,13 \cdot 10^{-6} \text{ рад}^2$, $\sigma_\alpha = 1,46 \cdot 10^{-3} \text{ рад}$.

35.5. $S_y(\omega) = \frac{2\sigma^2\alpha(\alpha^2 + \beta^2)}{\pi[(\omega^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2]}$, где обозначено: $\alpha = h$, $\beta = \sqrt{k^2 - h^2}$, $\sigma = \frac{\pi c^2}{2hk^2}$. Применение обратного преобразования Фурье к $S_y(\omega)$ дает $K_y(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right)$.

$$35.6. S_\theta(\omega) = \frac{2\sigma_0^2\alpha(\alpha^2 + \beta^2)}{\pi[(\omega^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2];$$

$$K_\theta(\tau) = \sigma_0^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right),$$

где $\sigma_0^2 = \frac{kT}{D}$, $\alpha = \frac{1}{2} \frac{r}{T}$, $\beta = \frac{1}{2T} \sqrt{4ID - r^2}$.

$$35.7. S_y(\omega) = \frac{4(49\omega^6 + 25)}{\pi(\omega^2 + 1)^2(\omega^2 + 4)(\omega^2 + 9)}.$$

35.8. Не может, так как корни характеристического уравнения имеют положительные вещественные части и, следовательно, система, описываемая уравнением, неустойчива.

$$35.9. \text{ Так как } \zeta_c(t) \text{ стационарна, то } S_{\zeta_c}(\omega) = \frac{\omega_0^4 S_x(\omega)}{|-\omega^2 + 2hi\omega + \omega_0^2|^2},$$

$$D[\zeta_c(t)] = \frac{\alpha\alpha(\alpha^2 + \beta^2)\omega_0^4}{[(\beta_1 - \beta)^2 + (\alpha_1 - \alpha)^2][(\beta_1 + \beta)^2 + (\alpha_1 - \alpha)^2] \times} \times \\ \times \frac{[(\beta_1 - \beta)^2 + (\alpha_1 + \alpha)^2][(\beta_1 + \beta)^2 + (\alpha_1 + \alpha)^2]}{(-\beta_1^2 + \beta^2 + \alpha^2 + \alpha_1^2)^2 + 4(\alpha^2\beta_1^2 - 2\alpha_1^2\beta^2 + \alpha_1^4 - 2\alpha^2\alpha_1^2 + \alpha_1^2\beta^2)} + \\ + \frac{\alpha_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)}{(-\beta^2 + \beta_1^2 + \alpha_1^2 + \alpha^2)^2 + 4(\alpha_1^2\beta^2 - 2\alpha^2\beta^2 + \alpha^4 - 2\alpha_1^2\alpha^2 + \alpha^2\beta_1^2)} \Bigg\},$$

$$\alpha_1 = h, \beta_1 = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}.$$

35.10. Обозначив $\omega_0 = n$, $a = 3 \cdot 10^{-4} g^2$, получим $D[\varepsilon(t)] = D[\zeta_c(t)]$, где $D[\zeta_c(t)]$ указана в ответе к задаче 35.9. Подставляя числовые данные, получим $D[\varepsilon(t)] = 0,06513$; $\sigma_\varepsilon = 0,255$.

35.11. Формула является следствием общей формулы, данной во введении.

35.12. Положив $\omega_0 = k$, получим $D[\Theta(t)] = D[\zeta_c(t)]$, где $D[\zeta_c(t)]$ дана в ответе к задаче 35.9.

35.13. $S_{yx}(\omega) = \frac{k^2 S_x(\omega)}{(k^2 - \omega^2) - 2hi\omega},$

$$R_{yx}(\tau) = k^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \frac{S_x(\omega)}{(k^2 - \omega^2) - 2hi\omega} d\omega.$$

35.14. Независимые частные интегралы однородного уравнения e^{-t}, e^{-7t} , весовая функция $p(t) = \frac{1}{6}(e^{-t} - e^{-7t}),$

$$\frac{336}{\sqrt{\pi}} K_y(\tau) = 7e^{-\tau + \frac{1}{4a^2}} \left\{ 1 + \Phi \left[\sqrt{2} \left(a\tau - \frac{1}{2a} \right) \right] \right\} - e^{-7\tau + \frac{12,25}{a^2}} \times$$

$$\times \left\{ 1 + \Phi \left[\sqrt{2} \left(a\tau - \frac{3,5}{a} \right) \right] \right\} + 7e^{\tau + \frac{1}{4a^2}} \left\{ 1 - \Phi \left[\sqrt{2} \left(a\tau + \frac{1}{2a} \right) \right] \right\} -$$

$$- e^{7\tau + \frac{12,25}{a^2}} \left\{ 1 - \Phi \left[\sqrt{2} \left(a\tau + \frac{3,5}{a} \right) \right] \right\}.$$

35.15. $D[Y(t) - Z(t)] = D[Z(t)] + \int_{0-}^{\infty} \int_{0-}^{\infty} p^*(\tau_1) p(\tau_2) \times$

$\times K_x(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 - 2 \operatorname{Re} \int_{0-}^{\infty} p^*(\tau) R_{xz}(\tau) d\tau,$ где знак минус в нижних пределах интегрирования обозначает, что точка 0 включена в область интегрирования.

35.16. $D[Y(t)] = \frac{\sigma_x^2}{a(a+\alpha)} \left[t^2 + \frac{2a+\alpha}{2a^2(a+\alpha)} (1-2at) \right].$

35.17. $\bar{\alpha} = \text{const},$ значение которой можно принять равным нулю, выбрав соответствующим образом начало отсчета; $D[a(t)] =$

$$= \frac{\sigma_i^2 P^2}{H^2} \left(1 + \frac{\bar{\omega}}{g} \right)^2 t^2 + \frac{2\sigma_i^2 P^2}{g^2 H^2} \int_0^t (t-\tau) K_w(\tau) d\tau.$$

35.18. Заменяя $X(t)$ спектральным разложением, получим спектральное разложение для $Y_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{-\omega^2 + 2hi\omega + k^2} \left[e^{-at+i\omega t} + \frac{-(\omega+\omega_0)+(a-h)i}{2\omega_0} e^{-(h-i\omega_0)t} + \frac{-(\omega_0-\omega)-(a-h)i}{2\omega_0} e^{-(h+i\omega_0)t} \right] d\Phi(\omega),$

где $\omega_0 = \sqrt{k^2 - h^2}.$ Отсюда следует $K_{y_1}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_x(\omega)}{(\omega^2 - k^2)^2 + 4h^2\omega^2} \times$

$$\times \left\{ e^{-a(t_1+t_2)+i\omega(t_2-t_1)} + \frac{1}{4\omega_0^2} e^{-h(t_1-t_2)} \left[[(\omega-\omega_0)^2 + (a-h)^2] e^{-i\omega_0(t_2-t_1)} + \right. \right.$$

$$+[(\omega + \omega_0)^2 + (a - h)^2] e^{i\omega_0(t_2 - t_1)} + [\omega_0^2 - (\omega - ai + hi)^2] e^{i\omega_0(t_1 + t_2)} +$$

$$+ [\omega_0^2 - (\omega + ai - hi)^2] e^{-i\omega_0(t_1 + t_2)} + \frac{1}{2\omega_0} e^{-(a+i\omega)t_1 - ht_2} [(\omega - \omega_0 +$$

$$+ ai - hi) e^{-i\omega_0 t_2} + (-\omega - \omega_0 + ai - hi) e^{i\omega_0 t_2}] + \frac{1}{2\omega_0} e^{-(a-i\omega)t_2 - ht_1} \times$$

$$\times [(\omega - \omega_0 - ai + hi) e^{i\omega_0 t_1} + (-\omega - \omega_0 - ai + hi) e^{-i\omega_0 t_1}] \} d\omega, \quad \text{что}$$

после подстановки выражения $S_x(\omega)$ и интегрирования с помощью вычетов дает окончательный результат в конечном виде

$$K_{y_1}(t_1, t_2) = \sigma_x^2 a \left\{ \frac{[e^{(\alpha-a)t_1} - M_1 \alpha - N_1] [e^{-(\alpha+a)t_2} + M_2 \alpha - N_2]}{\alpha [(a^2 + k^2 - 2ha + \alpha^2)^2 - 4\alpha^2 (h-a)^2]} + \right.$$

$$\left. + \operatorname{Re} \frac{[e^{(\gamma-a-i\beta)t_1} + M_1 (i\beta - \gamma) - N_1] [e^{(i\beta - \gamma - a)t_2} - M_2 (i\beta - \gamma) - N_2]}{2\gamma\beta [(\beta^2 - \gamma^2 + \alpha^2) + 2i\beta\gamma] (\beta + i\gamma)} \right\},$$

$$M_j = e^{-ht_j} \frac{\sin \beta t_j}{\beta}, \quad N_j = e^{-ht_j} \left(\cos \beta t_j + \frac{h-a}{\beta} \sin \beta t_j \right), \quad j = 1, 2;$$

$$\gamma = |h - a|, \quad \beta = \omega_0.$$

$$35.19. K_y(t_1, t_2) = \frac{a\pi}{2} e^{\frac{1}{2}(t_1^2 + t_2^2 + 2\alpha^2)} \left\{ [\Phi(t_1 - \alpha) + \Phi(\alpha)] \times \right.$$

$$\left. \times [\Phi(t_2 + \alpha) + \Phi(t_1 + \alpha)] - \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{t_1} e^{-\frac{1}{2}(\xi - \alpha)^2} \Phi(\xi + \alpha) d\xi \right\}, \quad t_2 \geq t_1.$$

$$35.20. \bar{y} = \frac{b}{a^2} \left(-1 + e^{\frac{a^2 t^2}{2}} \right); K_y(t_1, t_2) =$$

$$= \frac{\sigma_x^2 b^2 \sqrt{2\pi}}{2\sqrt{a^2 + 2\alpha^2}} e^{\frac{a^2}{2}(t_1^2 + t_2^2)} \int_0^{t_2} e^{-\frac{a^2(a^2 + 4\alpha^2)t^2}{2(a^2 + 2\alpha^2)}} \times$$

$$\times \left\{ \Phi \left[\frac{(a^2 + 2\alpha^2)t_1 - 2\alpha^2 t}{\sqrt{a^2 + 2\alpha^2}} \right] + \Phi \left[\frac{2\alpha^2 t}{\sqrt{a^2 + 2\alpha^2}} \right] \right\} dt.$$

$$35.21. \bar{y}(t) = \frac{t_0}{t} y_0 + \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \bar{x}(\xi) \xi d\xi = 1 + \frac{t_0}{t} (y_0 - 1); K_y(t_1, t_2) =$$

$$= \frac{1}{t_1 t_2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_2} K_x(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{1}{t_1 t_2} \left\{ \frac{4}{3\alpha^3} (t_1^3 - t_0^3) + \frac{1}{\alpha^2} (t_1^4 - t_0^4) + \right.$$

$$+ \frac{2}{5\alpha} (t_1^5 - t_0^5) - \left[\left(\frac{t_1^2}{\alpha} - \frac{2}{\alpha^2} t_1 + \frac{2}{\alpha^3} \right) e^{\alpha t_1} - \left(\frac{t_0^2}{\alpha} - \frac{2}{\alpha^2} t_0 + \frac{2}{\alpha^3} \right) e^{\alpha t_0} \right] \times$$

$$\left. \times \left[\left(\frac{t_1^2}{\alpha} + \frac{2}{\alpha^2} t_1 + \frac{2}{\alpha^3} \right) e^{-\alpha t_1} + \left(\frac{t_2^2}{\alpha} + \frac{2}{\alpha^2} t_2 + \frac{2}{\alpha^3} \right) e^{-\alpha t_2} \right] \right\}, \quad t_2 \geq t_1.$$

$$\begin{aligned}
 35.22. \quad \bar{y}(t) &= \frac{1}{\Delta} \sum_{k,j=1}^n A_{jk} y_k(t) e_j + \int_0^t p(t, \xi) \bar{x}(\xi) d\xi; \quad K_y(t_1, t_2) = \\
 &= \frac{1}{\Delta^2} \sum_{k,j,l,m=1}^n A_{jm} A_{lk} y_m^*(t_1) y_k(t_2) k_{jl} + \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} p(t_1, \xi) p(t_2, \eta) \times \\
 &\times K_x(\xi, \eta) d\xi d\eta, \text{ где } y_1(t), \dots, y_n(t) \text{ — независимые частные интегралы} \\
 &\text{соответствующего однородного уравнения,} \\
 \Delta &= \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) & \dots & y_n(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) & \dots & y_n'(0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(0) & y_2^{(n-1)}(0) & \dots & y_n^{(n-1)}(0) \end{vmatrix},
 \end{aligned}$$

а A_{jl} — алгебраические дополнения этого определителя.

35.23. Так как решение системы дает $Y_2(t) = -2 \int_0^t [e^{-(t-t_1)} - e^{-2(t-t_1)}] X(t_1) dt_1 + 2 [Y_2(0) - Y_1(0)] e^{-t} + [2Y_1(0) - Y_2(0)] e^{-2t}$,
 а $K_x(\tau) = 2e^{-1\tau}$, то $D[Y_2(t)] = 4 \left[\frac{2}{9} + (1-2t)e^{-2t} + \left(\frac{4}{3}t - \frac{20}{9} \right) e^{-3t} + e^{-4t} \right] + (2e^{-t} - e^{-2t})^2 D[Y_2(0)] + (2e^{-2t} - 2e^{-t})^2 \times$
 $\times D[Y_1(0)] + 2(2e^{-t} - e^{-2t})(2e^{-2t} - 2e^{-t}) k_{y_1(0), y_2(0)}$; $D[Y_2(0,5)] = 0,624$.

35.24. $D[Y_1(t)] = \frac{3}{2} e^{-4t} + \frac{4}{9} \left(-t^2 + 4t - \frac{20}{3} \right) e^{-3t} +$
 $+ \left(\frac{1}{2} t^2 - 2t + \frac{5}{4} \right) e^{-2t} + \left(\frac{1}{9} t^2 - \frac{1}{6} t + \frac{23}{108} \right)$; $D[Y_2(t)] = \frac{3}{2} e^{-4t} -$
 $-\frac{8}{27} (3t^2 - 6t + 14) e^{-3t} + (2t^2 - 4t + 1) e^{-2t} + \left(\frac{8}{9} t^2 - \frac{20}{9} t + \frac{89}{54} \right)$.

35.25. $D[Y_1(0,5)] = 0,01078$; $D[Y_2(0,5)] = 0,00150$.

35.26. Так как $Y(t)$ и $Z(t)$ по условию можно считать стационарными, то

$$S_y(\omega) = \frac{a^2 \alpha \sigma_x^2 \omega^2}{\pi b^2 (\omega^2 + \alpha^2) \left(\omega^2 + \frac{1}{b^2} \right)}, \quad S_z(\omega) = \frac{\alpha \sigma_x^2}{\pi b^2 (\omega^2 + \alpha^2) \left(\omega^2 + \frac{1}{b^2} \right)},$$

что после интегрирования дает $D[Y(t)] = \frac{a^2 \alpha \sigma_x^2}{b (ab + 1)}$, $D[Z(t)] =$
 $= \frac{\sigma_x^2}{ab + 1}$.

35.27. Нормальный закон с параметрами $\bar{y} = 0, \sigma_y = 0,78$.

$$\begin{aligned}
35.28. S_x(\omega) = & \frac{n^4}{g^2} \left\{ \omega^2 S_{\xi_c}(\omega) + \int_{-\infty}^{\infty} \omega_1^2 S_{\eta_c}(\omega_1) S_{\varphi}(\omega - \omega_1) d\omega_1 + \right. \\
& + \rho_x^2 \left[2 \int_{-\infty}^{\infty} \omega_1^2 (\omega - \omega_1)^2 S_{\varphi}(\omega - \omega_1) S_{\varphi}(\omega_1) d\omega_1 + \right. \\
& + 3 \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_1)^2 S_{\psi}(\omega - \omega_1) \omega_1^2 S_{\psi}(\omega_1) d\omega_1 + \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} S_{\psi}(\omega - \omega_1) \omega_1^4 S_{\psi}(\omega_1) d\omega_1 + \\
& + 4 \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_1) \omega_1^3 S_{\psi}(\omega - \omega_1) S_{\psi}(\omega_1) d\omega_1 \left. \right] + \\
& + \rho_z^2 \left[\omega^4 S_{\psi}(\omega) + \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_1)^4 S_{\varphi}(\omega - \omega_1) S_{\theta}(\omega_1) d\omega_1 + \right. \\
& + 4 \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_1)^2 S_{\varphi}(\omega - \omega_1) \omega_1^2 S_{\theta}(\omega_1) d\omega_1 + \\
& + 4 \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_1)^3 \omega_1 S_{\varphi}(\omega - \omega_1) S_{\theta}(\omega_1) d\omega_1 \left. \right] \left. \right\}; \\
S_y(\omega) = & \frac{n^4}{g^2} \omega^2 \left[S_{\xi_c}(\omega) + \rho_x^2 \omega^2 S_{\psi}(\omega) \right]; \quad S_{xy}(\omega) = \frac{n^4}{g^2} \rho_x \rho_z \omega^4 S_{\psi}(\omega).
\end{aligned}$$

35.29. Для нахождения асимметрии и эксцесса нужно определить моменты $Y(t)$ до четвертого включительно. При вычислении этих моментов необходимо определить математические ожидания: $\mathbf{M}[X^2(t_1)X^2(t_2)]$, $\mathbf{M}[X^2(t_1)X^2(t_2)X^2(t_3)]$ и $\mathbf{M}[X^2(t_1)X^2(t_2) \times X^2(t_3)X^2(t_4)]$, для определения которых нужно взять производные соответствующих порядков от характеристической функции системы нормальных случайных величин. Например,

$$\mathbf{M}[X^2(t_1)X^2(t_2)] = \frac{\partial^4}{\partial u_1^2 \partial u_2^2} \left\{ \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^2 k_{jl} u_j u_l \right] \right\} \Big|_{u_1=u_2=0}.$$

где $\|k_{jl}\|$ — корреляционная матрица системы случайных величин $X(t_1)$, $X(t_1)$, $X(t_2)$, $X(t_2)$.

$$\begin{aligned}
M [X^2(t_1) X^2(t_2)] &= 2K_x^2(t_2 - t_1) + K_x^2(0); \\
M [X^2(t_1) X^2(t_2) X^2(t_3)] &= K_x^3(0) + 2K_x^2(t_2 - t_1) K_x(0) + \\
&+ 2K_x^2(t_3 - t_2) K_x(0) + 2K_x^2(t_3 - t_1) K_x(0) + \\
&+ 8K_x(t_2 - t_1) K_x(t_3 - t_1) K_x(t_3 - t_2); \\
M [X^2(t_1) X^2(t_2) X^2(t_3) X^2(t_4)] &= K_x^4(0) + 2K_x^2(0) [K_x^2(t_3 - t_4) + \\
&+ K_x^2(t_2 - t_4) + K_x^2(t_2 - t_1) + K_x^2(t_3 - t_2) + K_x^2(t_4 - t_1) + \\
&+ K_x^2(t_3 - t_1)] + 4 [K_x^2(t_2 - t_1) K_x^2(t_4 - t_3) + \\
&+ K_x^2(t_3 - t_1) K_x^2(t_4 - t_2) + K_x^2(t_4 - t_1) K_x^2(t_3 - t_2)] + \\
&+ 8K_x(0) [K_x(t_3 - t_2) K_x(t_4 - t_2) K_x(t_4 - t_3) + \\
&+ K_x(t_1 - t_3) K_x(t_1 - t_4) K_x(t_4 - t_3) + \\
&+ K_x(t_2 - t_1) K_x(t_2 - t_4) K_x(t_4 - t_1) + \\
&+ K_x(t_3 - t_1) K_x(t_3 - t_2) K_x(t_2 - t_1)] + \\
&+ 16 [K_x(t_1 - t_2) K_x(t_1 - t_3) K_x(t_2 - t_4) K_x(t_3 - t_4) + \\
&+ K_x(t_2 - t_1) K_x(t_1 - t_4) K_x(t_2 - t_3) K_x(t_3 - t_4) + \\
&+ K_x(t_1 - t_3) K_x(t_1 - t_4) K_x(t_2 - t_3) K_x(t_2 - t_4)].
\end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в общие формулы для моментов решения дифференциального уравнения, получим

$$Sk = \frac{2}{k+a} \sqrt{2k(k+2a)}; \quad E\chi = 3 \left[\frac{15k^2 + 25ka + 2a^2}{(k+a)(3k+2a)} - 1 \right].$$

35.30. При $\tau \geq 0$ будем иметь

$$\begin{aligned}
R_{yz}(\tau) &= \frac{2\pi(k_1 k_2 c)^2}{\omega_2} \times \\
&\times e^{-h_2 \tau} \frac{2\omega_2(h_1 + h_2) \cos \omega_2 \tau - [\omega_2^2 - \omega_1^2 - (h_1 + h_2)^2] \sin \omega_2 \tau}{[(\omega_2 - \omega_1)^2 + (h_1 + h_2)^2][(\omega_2 + \omega_1)^2 + (h_1 + h_2)^2]};
\end{aligned}$$

при $\tau \leq 0$ будет

$$\begin{aligned}
R_{yz}(\tau) &= \frac{2\pi(k_1 k_2 c)^2}{\omega_1} \times \\
&\times e^{h_1 \tau} \frac{2\omega_1(h_1 + h_2) \cos \omega_1 \tau + [(\omega_2^2 - \omega_1^2) + (h_1 + h_2)^2] \sin \omega_1 \tau}{[(\omega_2 - \omega_1)^2 + (h_1 + h_2)^2][(\omega_2 + \omega_1)^2 + (h_1 + h_2)^2]},
\end{aligned}$$

$$\omega_1 = \sqrt{k_1^2 - h_1^2}, \quad \omega_2 = \sqrt{k_2^2 - h_2^2}.$$

§ 36. Оптимальные динамические системы

36.1. Определяя $K_x(\tau)$ как корреляционную функцию суммы связанных случайных функций и применяя к полученному равенству обратное преобразование Фурье, получим $S_x(\omega) = S_u(\omega) + S_v(\omega) + S_{uv}(\omega) + S_{uv}^*(\omega)$. 36.2. $S_{xz}(\omega) = i\omega [S_u(\omega) + S_{vu}(\omega)]$.

$$36.3. L(i\omega) = i\omega e^{-i\omega\tau}; \quad D[\varepsilon(t)] = 0.$$

$$36.4. L(i\omega) = \frac{i\alpha^2}{a^2(\omega^2 + \beta^2)^2 + b^2(\omega^2 + \alpha^2)^2} \left\{ \omega(\omega^2 + \beta^2)^2 e^{-i\omega\tau} - \right. \\ \left. - \frac{(\omega - i\alpha)^2(\omega - i\beta)^2}{2m} \left[(m - in) \left(\frac{m - in + i\beta}{m - in - i\alpha} \right)^2 e^{-(n+im)\tau} (\omega + m + in) + \right. \right. \\ \left. \left. + (m + in) \left(\frac{m + in - i\beta}{m + in + i\alpha} \right)^2 e^{-(n-im)\tau} (\omega - m + in) \right] \right\},$$

где

$$m = \sqrt{\frac{\sqrt{\mu^2 + \nu^2} - \mu}{2}}, \quad n = \sqrt{\frac{\sqrt{\mu^2 + \nu^2} + \mu}{2}}, \\ \mu = \frac{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}{a^2 + b^2}, \quad \nu = \frac{ab|\beta^2 - \alpha^2|}{a^2 + b^2}.$$

$$36.5. L(i\omega) = \frac{a^2}{c^2} \frac{(\alpha + \beta)(\omega - i\beta)}{(\alpha + d)(\omega - id)}, \quad \text{где} \\ c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad d = \frac{1}{c} \sqrt{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}.$$

36.6.

$$D[\varepsilon(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} |N(i\omega)|^2 S_u(\omega) d\omega - \\ - \int_{-\infty}^{\infty} |L(i\omega)|^2 [S_u(\omega) + S_v(\omega) + S_{uv}(\omega) + S_{uv}^*(\omega)] d\omega.$$

36.7.

$$L(i\omega) = \frac{i\alpha^2}{2mc^2} \left\{ \frac{m + in}{[m + i(n + n_1)]^2 - m_1^2} \cdot \frac{\omega + m - in}{(\omega - m_1 - in_1)(\omega + m_1 - in_1)} - \right. \\ \left. - \frac{-m + in}{[m - i(n + n_1)]^2 - m_1^2} \cdot \frac{\omega - m - in}{(\omega - m_1 - in_1)(\omega + m_1 - in_1)} \right\},$$

где

$$m = \sqrt{\sqrt{\beta^4 + \gamma^4} + \beta^2}, \quad n = \sqrt{\sqrt{\beta^4 + \gamma^4} - \beta^2}, \\ m_1 = \sqrt{\sqrt{\beta^4 + \gamma^4 + \frac{\alpha^2}{4c^2}} + \beta^2}, \quad n_1 = \sqrt{\sqrt{\beta^4 + \gamma^4 + \frac{\alpha^2}{4c^2}} - \beta^2}; \\ D[\varepsilon(t)] = \frac{\pi\alpha^2}{2n} - \frac{\alpha^4\pi}{2m^2c^2} \left[\frac{|A|^2}{n} + \text{Im} \left(\frac{A^2}{m + in} \right) \right],$$

где

$$A = \frac{m + in}{[m^2 - m_1^2 - (n + n_1)^2] + 2im(n + n_1)}.$$

$$36.8. L(i\omega) = e^{-\alpha\tau}. \quad 36.9. L(i\omega) = e^{-\tau} [i\omega\tau + (1 + \tau)].$$

$$36.10. L(i\omega) = \frac{e^{-\beta\tau}}{\omega - ia} \left\{ \omega \left[\cos \beta\tau - \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) \sin \beta\tau \right] + \right. \\ \left. + i [(2\beta - \alpha) \sin \beta\tau - \alpha \cos \beta\tau] \right\};$$

$$D[\varepsilon(\tau)] = \frac{\pi a^2}{2\beta} \left\{ \frac{(\alpha^2 + 2\beta^2)}{2\beta^2} - e^{-2\beta\tau} \left[\cos \beta\tau - \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) \sin \beta\tau \right]^2 - \right. \\ \left. - \frac{\alpha^2}{2\beta^2} e^{-2\beta\tau} \left[\cos \beta\tau + \left(1 - \frac{2\beta}{\alpha}\right) \sin \beta\tau \right]^2 \right\}.$$

$$36.11. L(i\omega) = \frac{a^2(\alpha + \beta)}{c^2(d + \alpha)} e^{-\alpha\tau} \frac{\omega - i\beta}{\omega - id}, \text{ где } c^2 = a^2 + b^2, \quad d^2 = \\ = \frac{1}{c^2} (a^2\beta^2 + b^2\alpha^2).$$

36.12.

$$L(i\omega) = \frac{c^2}{a^2(\omega^2 + b^2)} \left\{ (\omega^2 + \beta^2) e^{-i\omega\tau_0} - \frac{(b - \beta)}{(\alpha + b)} e^{-b\tau_0} (\omega - i\alpha)(\omega - i\beta) \right\},$$

где

$$a^2 = \frac{1}{\pi} (\alpha\sigma_u^2 + \beta\sigma_v^2), \quad b^2 = \frac{1}{a^2} \frac{\alpha\beta}{\pi} (\beta\sigma_u^2 + \alpha\sigma_v^2), \quad c^2 = \frac{\alpha\sigma_u^2}{\pi}.$$

$$36.13. L(i\omega) = e^{-\alpha\tau} \left(\cos \alpha\tau + \sin \alpha\tau + i \frac{\omega}{\alpha} \sin \alpha\tau \right).$$

$$36.14. L(i\omega) = \frac{1}{2\beta(\omega - i\gamma)} e^{-\alpha\tau_0} \left\{ e^{-i\beta\tau_0} [\beta - i(\alpha - \gamma)] (\omega - \beta - i\alpha) + \right. \\ \left. + e^{i\beta\tau_0} [\beta + i(\alpha - \gamma)] (\omega + \beta - i\alpha) \right\}; \quad D[\varepsilon(t)] = [n_1^2 + n_2^2(\alpha^2 + \beta^2)] \sigma_\theta^2 - \\ - 2a^2 n_2^2 \pi \left[\frac{1}{\alpha} |A|^2 - \text{Im} \left(\frac{A^2}{\beta + i\alpha} \right) \right], \quad \text{где } a^2 = \frac{2\sigma_\theta^2}{\pi} \alpha (\alpha^2 + \beta^2) n_2^2, \\ A = \frac{1}{2\beta} e^{-(\alpha - i\beta)\tau_0} (\beta + i\alpha - i\gamma), \quad \gamma = \frac{n_1}{n_2}.$$

36.15. Искомая величина характеризуется средней квадратической ошибкой оптимальной динамической системы, равной соответственно 1,67; 0,738; 0,0627 м/сек. $\sigma_\varepsilon = 2\sigma_v \sqrt{\frac{6\alpha}{T(12 + 6\alpha T + \alpha^2 T^2)}}$.

$$36.16. D[\varepsilon(t)] = 4\sigma_v^2 \alpha^2 d, \quad \text{где } d = \frac{1}{4 + 4\gamma + \gamma^2 + \frac{1}{12}\gamma^3}, \quad \gamma = \alpha T,$$

что дает для σ_ε значения 1,62; 0,829; 0,0846 м/сек.

$$36.17. D[\varepsilon(t)] = \sigma_\theta^2 (\alpha^2 + \beta^2) - \frac{\pi k_1^4}{a^2} \left\{ \frac{c_1^2}{\alpha_v} + \frac{2|c_2|^2}{a} + \frac{2c_1}{\beta^2 + (\alpha + \alpha_v)^2} \right\} \times \\ \times [\beta b' - (\alpha + \alpha_v) a'], \quad \text{где } a^2 = \frac{\sigma_v^2 \alpha_v}{\pi}; \quad k^2 = \frac{2\sigma_\theta^2 \alpha (\alpha^2 + \beta^2)}{\sigma_v^2 \alpha_v};$$

$$k_1^2 = \sigma_v^2 \alpha_v k^2; \quad c_1 = - \frac{\alpha_v}{(\alpha_v + \alpha_1)(\alpha_v + \beta_1) [\beta^2 + (\alpha_v - \alpha)^2]};$$

$$c_2 = \frac{-\alpha + i\beta}{2\beta(\beta + i\alpha + i\alpha_1)(\beta + i\alpha + i\beta_1)(\beta + i\alpha - i\alpha_2)} = a' + ib';$$

$$\alpha_1^2 = \alpha^2 - \beta^2 + \frac{k^2}{2} + \sqrt{\left(\alpha^2 - \beta^2 + \frac{k^2}{2}\right)^2 - (\alpha^2 + \beta^2)^2 - k^2\alpha_2^2};$$

$$\beta_1^2 = \alpha^2 - \beta^2 + \frac{k^2}{2} - \sqrt{\left(\alpha^2 - \beta^2 + \frac{k^2}{2}\right)^2 - (\alpha^2 + \beta^2)^2 - k^2\alpha_2^2}.$$

$$\begin{aligned} 36.18. L(i\omega) &= \frac{(\omega^2 + \alpha^2)^2}{4\alpha^3} \left\{ \frac{\beta}{\alpha + i\omega} + \frac{\gamma}{(\alpha + i\omega)^2} + \frac{\lambda_1}{i\omega} - \frac{\lambda_2}{\omega^2} - \right. \\ &- e^{-i\omega T} \left[e^{-\alpha T} \left(\frac{\beta + \gamma T}{\alpha + i\omega} + \frac{\gamma}{(\alpha + i\omega)^2} \right) + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 T}{i\omega} - \frac{\lambda_2}{\omega^2} \right] \left. - \frac{(\omega - i\alpha)^2}{4\alpha^3} \times \right. \\ &\times [3\alpha\beta - \gamma + 2\alpha\lambda_1 - \lambda_2 - i\omega(\beta + \lambda_1)] - \frac{(\omega + i\alpha)^2}{4\alpha^3} e^{-i\omega T} \times \\ &\times \left. \left\{ e^{-\alpha T} [\alpha(\beta + \gamma T) + \gamma] + 2\alpha(\lambda_1 + \lambda_2 T) + \lambda_2 + i\omega[(\beta + \gamma T)e^{-\alpha T} + \right. \right. \\ &\left. \left. + (\lambda_1 + \lambda_2 T)] \right\}, \text{ где } \lambda_1 = \frac{4(\mu_1 - \beta)}{4 + \alpha T} - \frac{T}{2} \lambda_2 = -0,015202 \text{ сек.}^{-1}. \right. \end{aligned}$$

$$\lambda_2 = -\frac{4 \left[\alpha^2 \mu_2 - \alpha\beta + \gamma + \frac{\alpha^2 T}{2} (\mu_1 - \beta) \right]}{\frac{1}{12} \alpha^3 T^3 + \alpha^2 T^2 + 4\alpha T + 4} = -0,0112 \text{ сек.}^{-1}, \mu_1 = 1.$$

$$\mu_2 = \tau_0, \beta = (1 + \alpha\tau_0) e^{-\alpha\tau_0}, \gamma = \alpha e^{-\alpha\tau_0}; D[e(t)] = \sigma_u^2 \left[1 + \lambda_1 \mu_1 + \right. \\ \left. + \lambda_2 \mu_2 - \frac{\beta}{\alpha} (2\alpha\beta - 2\gamma + \alpha\lambda_1 - \lambda_2) - \frac{\gamma}{\alpha^2} (\gamma + \lambda_2) \right] = 0,4525.$$

$$\begin{aligned} 36.19. \text{Общая формула для } L(i\omega) \text{ та же, что и в предыдущей} \\ \text{задаче, но } \mu_1 = 0; \mu_2 = 1; \beta = -\alpha^2 \tau_0 e^{-\alpha\tau_0}; \gamma = -\alpha^2 e^{-\alpha\tau_0}; \\ \lambda_1 = 4,58 \cdot 10^{-3}; \lambda_2 = -2,54 \cdot 10^{-4}; D[e(t)] = \sigma_u^2 \left[\alpha^2 + \lambda_2 \mu_2 - \right. \\ \left. - \frac{\beta}{\alpha} (2\alpha\beta - 2\gamma + \alpha\lambda_1 - \lambda_2) - \frac{\gamma}{\alpha^2} (\gamma + \lambda_2) \right] = 0,0110 \text{ сек.}^{-2}. \end{aligned}$$

$$36.20. I(\tau) = \delta(\tau); D[e(t)] = 0.$$

$$\begin{aligned} 36.21. \text{Для первой системы } L(i\omega) &= [(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2] \times \\ &\times \left\{ \frac{\lambda_1}{i\omega} - \frac{\lambda_2}{\omega^2} + \frac{\lambda_3 + i\lambda_4}{2(\Omega - \omega)} + \frac{\lambda_3 - i\lambda_4}{2(\Omega + \omega)} - e^{-i\omega T} \left[\frac{\lambda_1 + \lambda_2 T}{i\omega} - \frac{\lambda_2}{\omega^2} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{\lambda_3 + i\lambda_4}{2(\Omega - \omega)} e^{i\Omega T} + \frac{\lambda_3 - i\lambda_4}{2(\Omega + \omega)} e^{-i\Omega T} \right] \right\} - [\omega^2 - (\alpha^2 + \beta^2) - 2i\alpha\omega] \times \\ &\times [2\alpha(\lambda_1 + \lambda_4) - \lambda_2 - \lambda_3\Omega - i(\lambda_1 + \lambda_4)\omega] - e^{-i\omega T} [\omega^2 - (\alpha^2 + \beta^2) + \\ &+ 2i\alpha\omega] [2\alpha(\lambda_1 + \lambda_2 T + \lambda_3 \sin \Omega T + \lambda_4 \cos \Omega T) + \lambda_2 + \lambda_3\Omega \cos \Omega T - \\ &- \lambda_4\Omega \sin \Omega T + i\omega(\lambda_1 + \lambda_2 T + \lambda_3 \sin \Omega T + \lambda_4 \cos \Omega T)], \text{ где постоянные } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \text{ и } \lambda_4 \text{ определяются системой:} \end{aligned}$$

$$\lambda_1 + 10\lambda_2 + 0,1244\lambda_3 + 0,9903\lambda_4 = 0,000578,$$

$$\lambda_1 + 13,4034\lambda_2 + 0,1728\lambda_3 + 0,9620\lambda_4 = 0,$$

$$\lambda_1 - 0,8752\lambda_2 + 0,1657\lambda_3 + 0,9837\lambda_4 = 0,$$

$$\lambda_1 + 10,1831\lambda_2 + 0,1236\lambda_3 + 0,9889\lambda_4 = 0,000584,$$

которая имеет решение: $\lambda_1 = -0,0018$; $\lambda_2 = 0,000011$; $\lambda_3 = -0,0106$; $\lambda_4 = 0,0036$. Дисперсия для оптимальной системы первого типа $D[\varepsilon(t)] = 0,135 \cdot 10^{-4}$. Для второй системы вид $L(i\omega)$ сохраняется тем же, но $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, а λ_3 и λ_4 определяются из системы

$$\begin{aligned} \lambda_3 + 5,937\lambda_4 &= 0, \\ \lambda_3 + 8,003\lambda_4 &= 0,0047, \end{aligned}$$

что дает $\lambda_3 = -0,0136$; $\lambda_4 = 0,0023$. Дисперсия для этой системы $D[\varepsilon(t)] = 0,266 \cdot 10^{-4}$.

36.22. $a = e^{-\alpha\tau_0}$; $D[\varepsilon(t)] = (1 - e^{-2\alpha\tau_0}) \sigma_x^2$.

36.23. $a = e^{-\alpha\tau} \left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta\tau \right)$; $b = \frac{1}{\beta} e^{-\alpha\tau} \sin \beta\tau$; $D[\varepsilon(t)] = \sigma_x^2 \left[1 - e^{-2\alpha\tau} \left(1 + 2 \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta\tau \cos \beta\tau + 2 \frac{\alpha^2}{\beta^2} \sin^2 \beta\tau \right) \right]$.

36.24. $a = \frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_v^2} e^{-\alpha\tau_0}$; $D[\varepsilon(t)] = \sigma_u^2 \left(1 - \frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_v^2} e^{-2\alpha\tau_0} \right)$.

36.25. $a = -\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta} e^{-\alpha\tau_0} \sin \beta\tau_0 = -0,09721 \text{ сек.}^{-1}$;

$b = e^{-\alpha\tau_0} \left(\cos \beta\tau_0 - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta\tau_0 \right) = 0,9736$; $c = 0$; $D[\varepsilon(t)] = 0,404 \text{ град}^2/\text{сек}^2$.

36.26. $a = e^{-\alpha\tau_0} \left(\cos \beta\tau_0 + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta\tau_0 \right) = 0,99$; $b = \frac{1}{\beta} e^{-\alpha\tau_0} \sin \beta\tau_0 = 0,20 \text{ сек.}$; $c = 0$.

§ 37. Метод огибающих

37.1. $K_a(\tau) = \sigma_x^2 \left[2E(1 - q^2) - q^2 K(1 - q^2) - \frac{\pi}{2} \right]$, где $q^2 = 1 - k^2(\tau) - r^2(\tau)$; $k(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$; $r(\tau) = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \omega\tau}{\omega^2 + \alpha^2} d\omega = \frac{1}{\pi} [e^{-\alpha\tau} \text{Ei}(\alpha\tau) - e^{\alpha\tau} \text{Ei}(-\alpha\tau)]$; $\text{Ei}(x)$ — обозначение интегральной

показательной функции. $\text{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^u}{u} du$. 37.2. Так как

$S_x(\omega) = \sigma_x^2 \frac{2\alpha^3}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)^2}$, то $\omega_1 = \frac{2\alpha}{\pi}$, $\omega_2 = \alpha$. $P(\dot{\Phi} \geq 0) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{\pi} \right) = 0,818$; $P(\dot{\Phi} \leq 0) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) = 0,182$, они не зависят от α .

$$37.3. \quad P(\dot{\Phi} \geq 0) = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{\pi\beta} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2\alpha\beta} \right) \right];$$

$$P(\dot{\Phi} \leq 0) = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{\pi\beta} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2\alpha\beta} \right) \right].$$

37.4. $P = 0,5$ и не зависит от $\frac{\alpha}{\beta}$.

$$37.5. \quad f(\dot{\Phi}) = \frac{\alpha^2 \left(1 - \frac{4}{\pi^2} \right)}{2 \left[\left(\dot{\Phi} - \frac{2\alpha}{\pi} \right)^2 + \alpha^2 \left(1 - \frac{4}{\pi^2} \right) \right]^{3/2}}. \quad 37.6. \quad \text{Фаза рас-}$$

пределена равномерно в интервале $[0, 2\pi]$.

$$37.7. \quad f(\dot{\Phi}) = \frac{(\alpha^2 + \beta^2) \left[1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\pi^2 \beta^2} \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2\alpha\beta} \right)^2 \right]}{2 \left\{ \left[\dot{\Phi} - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\pi\beta} \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2\alpha\beta} \right) \right]^2 + \right.}$$

$$\left. + (\alpha^2 + \beta^2) \left[1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\pi^2 \beta^2} \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2\alpha\beta} \right)^2 \right] \right\}^{3/2}}$$

$$37.8. \quad f(a, \dot{a}) =$$

$$= \frac{a}{\alpha \sigma_x^3 \sqrt{2\pi} \sqrt{1 - \frac{4}{\pi^2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_x^2} \left[a^2 + \frac{\dot{a}^2}{\alpha^2 \left(1 - \frac{4}{\pi^2} \right)} \right] \right\}.$$

37.9. Так как $k(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau|)$, $k(2) = 0,982$,

$$r(2) = 2 \int_0^\infty \frac{2\alpha^3}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)^2} \sin 2\omega d\omega = \frac{1}{\pi} [1,2e^{-0,2} \operatorname{Ei}(0,2) - 0,8 \operatorname{Ei}(-0,2)] =$$

$$= 0,122, \text{ то}$$

$$f(a_2 | a_1 = \sigma_x) = \frac{48,08a}{\sigma_x^2} \exp \left\{ -\frac{24,04a_2^2}{\sigma_x^2} - 23,2 \right\} I_0 \left(47,56 \frac{a_2}{\sigma_x} \right).$$

37.10. Так как $\Delta^2 = \omega_2^2 - \omega_1^2 = (\alpha^2 + \beta^2) \left[1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\pi^2 \beta^2} \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2\alpha\beta} \right)^2 \right] = 0,0089$, $\frac{\Delta}{\omega_2} = 0,0135 \ll 1$, то пригодна прибли-

женная формула $f(\tau) \approx \frac{4,45\pi \cdot 10^{-3}}{\tau^2 \left[\left(\frac{\pi}{\tau} - 0,693 \right)^2 + 8,9 \cdot 10^{-3} \right]^{3/2}}$.

$$37.11. \quad f(\tau) = \frac{0,041\pi}{\tau^2 \left[\left(\frac{\pi}{\tau} - 0,647 \right)^2 + 0,0814 \right]^{3/2}}.$$

37.12. Искомое среднее число выбросов равно вероятности произойти выбросу в единицу времени $p = 2 \sqrt{\frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\pi}} e^{-2} =$
 $= 0,083a \text{ сек.}^{-1}$.

37.13. $0,0424\alpha$ сек.⁻¹ 37.14. $f(\varphi_2 | \varphi_1) = \frac{q^2}{2\pi} \left\{ \frac{1}{1 - \kappa^2} + \frac{\kappa}{(1 - \kappa^2)^{3/2}} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \kappa \right] \right\}$, где $q^2 = 1 - k^2(\tau) - r^2(\tau)$;
 $r = \frac{\pi^2 \beta}{\alpha^2 + \beta^2} \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2\alpha\beta} \right)^{-1} = 4,53$ сек.; $k(\tau) = -0,95$;
 $r(\tau) = 2 \int_0^\infty \frac{2\alpha(\alpha^2 + \beta^2)}{\pi[(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2]} \sin \omega\tau d\omega$; $\kappa = \sqrt{1 - q^2} \cos(\varphi_2 - \gamma)$;
 $\gamma = 179^\circ$; $D[X(t + \tau)] \approx M[A^2] M[\cos^2 \Phi] - \{M[A] M[\cos \Phi]\}^2$;
 $M[\cos \Phi] = \int_0^{2\pi} f(\varphi_2 | \varphi_1) \cos \varphi_2 d\varphi_2$; $M[\cos^2 \Phi] = \int_0^{2\pi} f(\varphi_2 | \varphi_1) \cos^2 \varphi_2 d\varphi_2$.

37.15. $R_{xy}(\tau) = 2\sigma_x^2 \int_0^\infty S_x(\omega) \sin \omega\tau d\omega =$
 $= \frac{2\alpha(\alpha^2 + \beta^2)\sigma_x^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \omega\tau}{(\omega^2 - \beta^2 + \alpha^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2} d\omega.$

Глава VIII
МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

§ 38. Цепи Маркова

38.1. Следует из равенства $\mathcal{S}^{\alpha+\beta} = \mathcal{S}^\alpha \mathcal{S}^\beta$. 38.2. $p(3) = R'p(0)$, где $R = \mathcal{S}_1 \mathcal{S}_2 \mathcal{S}_3 = \|r_{ij}\|$; $r_1 = r_{11} = r_{22} = r_{33} = \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 + 6\alpha_1\alpha_2\alpha_3$; $r_2 = r_{12} = r_{31} = r_{23} = 3(\alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_2^2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3^2)$; $r_3 = r_{13} = r_{21} = r_{32} = 3(\alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3^2)$; $p(3) = \{r_1\alpha + r_3\beta + r_2\gamma; r_2\alpha + r_1\beta + r_3\gamma; r_3\alpha + r_2\beta + r_1\gamma\}$.

38.3. Состояния: Q_1 — все встречи выиграны, Q_2 — имеется один ничейный исход, Q_3 — спортсмен выбыл из соревнований. По формуле Перрона $p_{21}^{(n)} = p_{31}^{(n)} = p_{32}^{(n)} = 0$, $p_{33}^{(n)} = 1$, $p_{11}^{(n)} = \alpha^n$, $p_{22}^{(n)} = \gamma^n$, $p_{23}^{(n)} = 1 - \gamma^n$, $p_{13}^{(n)} = 1 - p_{11}^{(n)} - p_{12}^{(n)}$,

$$p_{12}^{(n)} = \begin{cases} \beta \frac{\alpha^n - \gamma^n}{\alpha - \gamma} & \text{при } \gamma \neq \alpha, \\ n\beta\alpha^{n-1} & \text{при } \gamma = \alpha. \end{cases}$$

38.4. Состояния: Q_1 — прибор исправен, Q_2 — вышло из строя блокирующее устройство, Q_3 — прибор не работает; $p_{21}^{(n)} = p_{31}^{(n)} =$

$$= p_{32}^{(n)} = 0, \quad p_{11}^{(n)} = (1 - \alpha - \beta)^n, \quad p_{22}^{(n)} = (1 - \gamma)^n, \quad p_{33}^{(n)} = 1, \quad p_{23}^{(n)} = 1 - (1 - \gamma)^n, \quad p_{13}^{(n)} = 1 - p_{11}^{(n)} - p_{12}^{(n)},$$

$$p_{12}^{(n)} = \begin{cases} \frac{\alpha}{\gamma - \alpha - \beta} [(1 - \alpha - \beta)^n - (1 - \gamma)^n] & \text{при } \alpha + \beta \neq \gamma, \\ n\alpha (1 - \gamma)^{n-1} & \text{при } \alpha + \beta = \gamma. \end{cases}$$

38.5. Состояние Q_j ($j = 0, 1, 2, 3$) — в соревнованиях участвуют j членов команды. При $i < k$ $p_{ik}^{(n)} = 0$ ($i, k = 0, 1, 2, 3$), $p_{00}^{(n)} = 1$, $p_{11}^{(n)} = \alpha^n$, $p_{22}^{(n)} = \beta^n$, $p_{33}^{(n)} = \gamma^n$, $p_{10}^{(n)} = 1 - \alpha^n$, $p_{21}^{(n)} = \beta_1 f(\alpha, \beta)$, $p_{20}^{(n)} = 1 - p_{22}^{(n)} - p_{21}^{(n)}$, $p_{32}^{(n)} = \gamma_1 f(\beta, \gamma)$, $p_{31}^{(n)} = \gamma_2 f(\alpha, \gamma) + \beta_1 \gamma_1 \varphi(\alpha, \beta, \gamma)$, $p_{30}^{(n)} = 1 - p_{33}^{(n)} - p_{32}^{(n)} - p_{31}^{(n)}$, где $f(a, b) = \frac{a^n - b^n}{a - b}$, $f(a, a) = na^{n-1}$, $\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{f(\alpha, \gamma) - f(\beta, \gamma)}{\alpha - \beta}$, $\varphi(\alpha, \alpha, \gamma) = \frac{na^{n-1}}{\alpha - \gamma} - \frac{\alpha^n - \gamma^n}{(\alpha - \gamma)^2}$, $\varphi(\alpha, \alpha, \alpha) = n(n-1)\alpha^{n-2}$.

38.6. Воспользоваться формулой Перрона при простых характеристических числах $\lambda_k = p_k$ ($k = 0, 1, \dots, m$). $|\lambda \mathcal{L} - \mathcal{S}| = \prod_{v=0}^m (\lambda - p_v)$.

При $i > k$ $A_{ki}(\lambda) = 0$, $A_{kk}(\lambda) = \frac{|\lambda \mathcal{L} - \mathcal{S}|}{\lambda - p_k}$. При $k > i$ $A_{ki}(\lambda) = \frac{|\lambda \mathcal{L} - \mathcal{S}| D_{ki}(\lambda)}{\prod_{v=i}^k (\lambda - p_v)}$.

38.7. Воспользоваться формулой Перрона, когда характеристическое число $\lambda = p$ имеет кратность m , а характеристическое число $\lambda = 1$ простое. $|\lambda \mathcal{L} - \mathcal{S}| = (\lambda - p)^m (\lambda - 1)$; $A_{m, m}(\lambda) = \frac{|\lambda \mathcal{L} - \mathcal{S}|}{\lambda - 1}$; $A_{kk}(\lambda) = \frac{|\lambda \mathcal{L} - \mathcal{S}|}{\lambda - p}$ ($k = 0, 1, \dots, m-1$). При $i > k$ $A_{ki}(\lambda) = 0$, $A_{mi}(\lambda) = \frac{|\lambda \mathcal{L} - \mathcal{S}| D_{mi}(\lambda)}{(\lambda - p)^{m-i} (\lambda - 1)}$. При $k > i$, $k \neq m$ $A_{ki}(\lambda) = \frac{|\lambda \mathcal{L} - \mathcal{S}| D_{ki}(\lambda)}{(\lambda - p)^{k-i+1}}$.

38.8. Состояние Q_j — после извлечения в урне останется j белых шаров. При $j > i$ $p_{ij} = 0$; при $i \geq j$ $p_{ij} = \frac{C_i^{i-j} C_{N-i}^{m-i+j}}{C_N^m}$. Характе-

ристические числа $\lambda_0 = 1$, $\lambda_k = \frac{C_{N-k}^m}{C_N^m}$ ($k = 1, 2, \dots, m$) простые.

Транспонированная матрица \mathcal{S}' — верхняя треугольная; вероят-

ности $p_{ij}^{(n)}$ определяются с помощью формул из условия задачи 38.6. При $N=6, m=3$ $p_{01}^{(n)}=p_{02}^{(n)}=p_{03}^{(n)}=p_{12}^{(n)}=p_{13}^{(n)}=p_{23}^{(n)}=0, p_{00}^{(n)}=1, p_{11}^{(n)}=\frac{1}{2^n}, p_{22}^{(n)}=\frac{1}{5^n}, p_{33}^{(n)}=\frac{1}{20^n}, p_{10}^{(n)}=1-\frac{1}{2^n}, p_{20}^{(n)}=1-\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{5^n}, p_{21}^{(n)}=2\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{5^n}\right), p_{30}^{(n)}=1-\frac{3}{2^n}+\frac{3}{5^n}-\frac{1}{20^n}, p_{31}^{(n)}=3\left(\frac{1}{2^n}-\frac{2}{5^n}+\frac{1}{20^n}\right), p_{32}^{(n)}=3\left(\frac{1}{5^n}-\frac{1}{20^n}\right).$

38.9. Состояние Q_j — наибольшее число выбитых очков равно $N+j$; $p_{ii}=\frac{i}{m}, p_{ij}=0$ при $i>j$; $p_{ij}=\frac{1}{m}$ при $i<j$ (см. пример 38.1); $p_{ii}^{(n)}=\left(\frac{i}{m}\right)^n$; $p_{ik}^{(n)}=0$ при $i>k$; $p_{ik}^{(n)}=\left(\frac{k}{m}\right)^n-\left(\frac{k-1}{m}\right)^n$ при $i<k$.

38.10. Состояние Q_j — на участке длины L осталось j цилиндров ($j=0, 1, \dots, m$). Вероятность столкновения шара с цилиндром равна $j\alpha$, где $\alpha=\frac{2(r+R)}{L}$; $p_{j,j-1}=j\alpha, p_{jj}=1-j\alpha, p_{ji}=0$ при $i\neq j$ и $i\neq j-1$ ($i, j=0, 1, \dots, m$). Характеристические числа $\lambda_k=1-k\alpha$ ($k=0, 1, \dots, m$), $p_{ik}^{(n)}=0$ при $i<k$. При $i\geq k$ $A_{ki}(\lambda)=\alpha^{i-k}\frac{i!}{k!}\frac{|\lambda_{\mathcal{E}}-\mathcal{E}|}{\prod_{v=k}^i(\lambda-1+v\alpha)}$. По формуле Перрона при $i\geq k$

$$p_{ik}^{(n)}=\alpha^{i-k}\frac{i!}{k!}\sum_{j=0}^m\left[\frac{\lambda^n(\lambda-\lambda_j)}{\prod_{v=k}^i(\lambda-1+v\alpha)}\right]_{\lambda=\lambda_j} = \frac{i!}{k!}\sum_{j=k}^i\frac{(-1)^{j-k}(1-j\alpha)^n}{(j-k)!(i-j)!} = C_i^k\sum_{v=0}^{i-k}(-1)^v C_{i-k}^v [1-(k+v)\alpha]^n.$$

38.11. Состояние Q_j ($j=1, 2, \dots, m$) — поставленные точки находятся в j частях области D ; $p_{jj}=\frac{j}{m}, p_{j,j+1}=1-\frac{j}{m}$.

Характеристические числа $\lambda_r=\frac{r}{m}$ ($r=1, 2, \dots, m$). Из $\mathcal{E}H=HJ$

следует $h_{rk}=\frac{C_{k-1}^{r-1}}{C_{m-1}^{r-1}}$ ($h_{1k}=1$), а из $H^{-1}\mathcal{E}=JH^{-1}$ и $H^{-1}H=\mathcal{E}$

следует $h_{ir}^{(-1)}=(-1)^{r-i}C_{m-i}^{r-i}C_{m-1}^{i-1}$. $\mathcal{E}^n=HJ^nH^{-1}$. $p_{ik}^{(n)}=0$ при $i>k$, а при $i\leq k$ $p_{ik}^{(n)}=C_{m-i}^{k-i}\sum_{r=0}^{k-i}(-1)^{k-i-r}\left(\frac{r+i}{m}\right)^n C_{k-i}^r$ (другое решение — см. задачу 38.10).

38.12. Положить $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{m}}$. Тогда $H = \|h_{jk}\| = \|\varepsilon^{(j-1)(k-1)}\|$,
 $H^{-1} = \|h_{jk}^{(-1)}\| = \frac{1}{m} \|\varepsilon^{-(k-1)(j-1)}\|$. $\mathcal{P}^n = H \|\delta_{jk} \lambda_k^n\| H^{-1}$, где
 $\lambda_k = \sum_{r=1}^m \alpha_r \varepsilon^{(r-1)(k-1)}$ ($k = 1, 2, \dots, m$). $p_{jk}^{(n)} = \frac{1}{m} \sum_{r=1}^m \lambda_r^n \varepsilon^{(r-1)(j-k)}$,
 $p_j^{(\infty)} = \frac{1}{m}$ ($j, k = 1, 2, \dots, m$).

38.13. Состояние Q_i — частица находится в точке x_i ; $p_{i, i-1} = \frac{i}{m}$,
 $p_{i, i+1} = 1 - \frac{i}{m}$ ($i = 0, 1, \dots, m$). Матричное равенство $H^{-1} \mathcal{P} =$
 $= \|\delta_{ij} \lambda_j\| H^{-1}$ эквивалентно уравнениям $(1 - \xi^2) R'_i(\xi) =$
 $= m(\lambda_i - \xi) R_i(\xi)$ ($i = 0, 1, \dots, m$), где $R_i(\xi) = \sum_{k=0}^m \xi^k h_{ik}^{(-1)} =$
 $= C_i (1 - \xi)^{\frac{m}{2}(1-\lambda_i)} (1 + \xi)^{\frac{m}{2}(1+\lambda_i)}$. Так как $R_i(\xi)$ — многочлен, то
характеристические числа $\lambda_i = 1 - \frac{2i}{m}$ ($i = 0, 1, \dots, m$). Из $HH^{-1} = \mathcal{E}$
следует $\xi^i = \sum_{k=0}^m \delta_{ik} \xi^k = \sum_{j=0}^m h_{ij} R_j(\xi)$. Полагая $\xi = \frac{1-\zeta}{1+\zeta}$, $C_j = 2^{-\frac{m}{2}}$,
для определения элементов $h_{ij} = h_{ij}^{(-1)}$ матриц $H = H^{-1}$ получим
выражения
 $\sum_{j=0}^m h_{ij} \xi^j = \sum_{j=0}^m h_{ij}^{(-1)} \xi^j = 2^{-\frac{m}{2}} (1 - \zeta)^i (1 + \zeta)^{m-i}$ ($i = 0, 1, \dots, m$).
Вероятности $p_{ik}^{(n)}$ являются элементами матрицы

$$\mathcal{P}^n = H \left\| \left(1 - \frac{2i}{m}\right)^n \delta_{ik} \right\| H.$$

38.14. Состояние Q_j — в приемнике автомата j монет по 5 коп.;
 $p_{00} = q$, $p_{mm} = p$, $p_{j, j+1} = p$, $p_{j, j-1} = q$ ($j = 0, 1, \dots, m$). Харак-
теристические числа: $\lambda_0 = 1$, $\lambda_k = 2\sqrt{pq} \cos \frac{k\pi}{m+1}$ ($k = 1, 2, \dots, m$).
 $\mathcal{P} = H \|\delta_{jk} \lambda_k\| H^{-1}$, где $h_{j0} = 1$ ($j = 0, 1, \dots, m$), $h_{jk} = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{j}{2}} \sin \frac{jk\pi}{m+1} -$
 $-\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{j+1}{2}} \sin \frac{(j-1)k\pi}{m+1}$ ($j = 0, 1, \dots, m$; $k = 1, 2, \dots, m$),
 $h_{0k}^{(-1)} = C_1 \left(\frac{p}{q}\right)^k$ ($k = 0, 1, \dots, m$), $h_{jk}^{(-1)} = C_j \left[\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{k}{2}} \sin \frac{kj\pi}{m+1} -$

$$-\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{k-1}{2}} \sin \frac{(k-1)j\pi}{m} \Big] \quad (j = 1, 2, \dots, m; k = 0, 1, \dots, m). \text{ Постоян-}$$

ные C_j определяются из условия $H^{-1}H = \mathcal{E}$: $C_0 = \frac{q-1}{p - \left(\frac{p}{q}\right)^{m+1}}$,

$$C_k = \frac{2p}{m+1} \left[1 - 2\sqrt{pq} \cos \frac{k\pi}{m+1} \right]^{-1} \quad (k = 1, 2, \dots, m), \quad p_{ik}^{(n)} =$$

$$= \sum_{j=0}^m h_{ij} \lambda_j^n h_{jk}^{(-1)} \quad (i, k = 0, 1, \dots, m).$$

38.15. Состояние Q_1 — попадание в мишень, Q_2 — промах; $p_{11} = \alpha$, $p_{21} = \beta$, $p_1(0) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, $p_2(0) = 1 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, $\{p_1(n); p_2(n)\} = (\mathcal{S}')^n \{p_1(0); p_2(0)\}$. Характеристические числа: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \alpha - \beta$. По формуле Лагранжа — Сильвестра при $\lambda_2 \neq 1$ $\mathcal{S}^n = \frac{1}{1 - \alpha + \beta} \times \times [\mathcal{S} - (\alpha - \beta)\mathcal{E} - (\alpha - \beta)^n(\mathcal{S} - \mathcal{E})]$, $p_1(n) = \frac{1}{2(1 - \alpha + \beta)} [2\beta + + (1 - \alpha - \beta)(\alpha - \beta)^{n+1}]$. Если $\lambda_2 = 1$, то $\mathcal{S}^n = \mathcal{E}$, $p_1(n) = \frac{1}{2}$.

38.16. Из $\sum_{j=1}^m p_j^{(\infty)} = 1$, $\sum_{i=1}^m p_{ij} p_i^{(\infty)} = p_j^{(\infty)}$ ($j = 1, 2, \dots, m$) следует, что $p_j^{(\infty)} = \frac{1}{m}$ ($j = 1, 2, \dots, m$).

38.17. Состояние Q_j — в первой урне j белых шаров; $p_{jj} = \frac{2j(m-j)}{m^2}$, $p_{j, j+1} = \frac{(m-j)^2}{m^2}$, $p_{j, j-1} = \frac{j^2}{m^2}$ ($j = 0, 1, \dots, m$). Цепь неприводимая и непериодическая, $p_{ik}^{(\infty)} = p_k^{(\infty)}$. Из системы $p_k^{(\infty)} = p_{k-1}^{(\infty)} p_{k-1, k} + p_k^{(\infty)} p_{kk} + p_{k+1}^{(\infty)} p_{k+1, k}$ ($k = 0, 1, \dots, m$) получается $p_k^{(\infty)} = (C_m^k)^2 p_0^{(\infty)}$, $\frac{1}{p_0^{(\infty)}} = \sum_{k=0}^m (C_m^k)^2 = C_{2m}^m$, $p_{ik}^{(\infty)} = p_k^{(\infty)} = = \frac{(C_m^k)^2}{C_{2m}^m}$ ($k = 0, 1, \dots, m$).

38.18. Состояние Q_j — частица находится в середине j -го интервала деления отрезка; $p_{11} = q$, $p_{mm} = p$, $p_{j, j+1} = p$, $p_{j, j-1} = q$ ($j = 1, 2, \dots, m$). Цепь неприводимая и непериодическая. Вероятности $p_k^{(\infty)}$ находятся из системы

$$\begin{aligned} qp_1^{(\infty)} + qp_2^{(\infty)} &= p_1^{(\infty)}, \\ pp_{m-1}^{(\infty)} + pp_m^{(\infty)} &= p_m^{(\infty)}, \\ pp_{k-1}^{(\infty)} + qp_{k+1}^{(\infty)} &= p_k^{(\infty)} \quad (k = 2, 3, \dots, m-1). \end{aligned}$$

Тогда $p_k^{(\infty)} = \left(\frac{p}{q}\right)^{k-1} p_1^{(\infty)}$, $\sum_{k=1}^m p_k^{(\infty)} = 1$. При $p = q$ $p_k^{(\infty)} = \frac{1}{m}$,

а при $p \neq q$ $p_k^{(\infty)} = \frac{1 - \frac{p}{q}}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^m} \left(\frac{p}{q}\right)^{k-1}$ ($k = 1, 2, \dots, m$). Вероят-

ности $p_k^{(\infty)}$ можно также получить из $p_{ik}^{(n)}$ при $n \rightarrow \infty$ (см. задачу 38.14).

38.19. Цепь неприводимая и непериодическая. Из системы $\sum_{i=1}^{\infty} u_i p_{ij} = u_j$ ($j = 1, 2, \dots$) следует, что $u_j = \frac{1}{j!} u_1$, $u_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{i+1} u_i =$
 $= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{(i+1)!} u_1$. Так как $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{(i+1)!} = 1$, то ненулевое решение

существует. При этом $\sum_{j=1}^{\infty} |u_j| = u_1 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} = u_1 (e - 1) < \infty$, т. е.

цепь эргодическая. $p_j^{(\infty)} = \frac{1}{j!} p_1^{(\infty)}$, $\frac{1}{p_1^{(\infty)}} = e - 1$, $p_j^{(\infty)} = \frac{1}{(e - 1) j!}$
 ($j = 1, 2, \dots$).

38.20. Цепь неприводимая и непериодическая. Из системы $\sum_{i=1}^{\infty} u_i p_{ij} = u_j$ ($j = 1, 2, \dots$) следует, что $u_1 = q \sum_{i=1}^{\infty} u_i$, $u_j = u_1 p^{j-1}$.

При этом $\sum_{j=1}^{\infty} |u_j| = u_1 \sum_{j=1}^{\infty} p^{j-1} = \frac{u_1}{q} < \infty$; поэтому цепь эргоди-

ческая; $p_j^{(\infty)} = p^{j-1} p_1^{(\infty)}$, $p_1^{(\infty)} = q$, т. е. $p_j^{(\infty)} = q p^{j-1}$ ($j = 1, 2, \dots$).

38.21. Цепь неприводимая и непериодическая. Из системы $\sum_{i=1}^{\infty} u_i p_{ij} = u_j$ ($j = 1, 2, \dots$) следует, что $u_j = \frac{u_1}{2(j-1)}$ ($j = 2, 3, \dots$).

Ряд $\sum_{j=1}^{\infty} |u_j| = u_1 \left[1 + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{2(j-1)} \right]$ расходится, т. е. цепь не

эргодическая. Это нуль-регулярная цепь, для которой $p_{ik}^{(\infty)} = 0$
 ($i, k = 1, 2, \dots$).

38.22. Состояние Q_j — частица находится в точке с координатой $j\Delta$ ($j = 1, 2, \dots$); $p_{11} = 1 - \alpha$, $p_{j, j+1} = \alpha$, $p_{j+1, j} = \beta$, $p_{jj} = 1 - \alpha - \beta$ ($j = 1, 2, \dots$). Цепь неприводимая и непериодическая.

Из системы $\sum_{i=1}^{\infty} u_i p_{ij} = u_j$ следует, что $u_k = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{k-1} u_1$ ($k=1, 2, \dots$).

При $\frac{\alpha}{\beta} < 1$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k| = \frac{u_1}{1 - \frac{\alpha}{\beta}} < \infty$, поэтому цепь эргодиче-

ская; $p_k^{(\infty)} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{k-1} p_1^{(\infty)}$, $p_1^{(\infty)} = 1 - \frac{\alpha}{\beta}$, т. е. $p_k^{(\infty)} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{k-1} \times \times \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)$ ($k=1, 2, \dots$). Когда $\frac{\alpha}{\beta} \geq 1$, цепь Маркова нуль-регулярная; $p_{jk}^{(\infty)} = 0$ ($j, k=1, 2, \dots$).

38.23. Так как $W^{\infty} = 0$, то $p_{*j} = \sum_{v=1}^s p_{jv}^{(\infty)} = 1$ ($j = s+1, s+2, \dots, m$).

38.24. Из системы $p_{*j} = \alpha \sum_{v=r+1}^m p_{*v} + \beta$ ($j = r+1, r+2, \dots, m$) получается $p_{*j} = \frac{\beta}{1 - \alpha(m-r)}$ ($j = r+1, r+2, \dots, m$).

38.25. Состояние Q_j — у игрока A имеется j рублей ($j = 0, 1, \dots, m$); $p_{00} = 1$, $p_{mm} = 1$, $p_{j, j+1} = p$, $p_{j, j-1} = q$ ($j = 1, 2, \dots, m-1$). Вероятности $p_{*j} = p_{j0}^{(\infty)}$ разорения игрока A определяются из системы

$$p_{*1} = p_{*2}p + q, \quad p_{*, m-1} = pp_{*, m-2}, \quad p_{*j} = qp_{*, j-1} + pp_{*, j+1} \\ (j = 2, 3, \dots, m-2).$$

Положив $p_{*j} = a - b \left(\frac{q}{p}\right)^j$, находим: при $p \neq q$ $p_{*j} = \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{m-j}}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^m}$, а при $p = q$ $p_{*j} = 1 - \frac{j}{m}$ ($j = 1, 2, \dots, m-1$).

Вероятности разорения игрока B $p_{*j}(B) = 1 - p_{*j}(A)$. Другое решение задачи получается из выражения для $p_{j0}^{(n)}$ при $n \rightarrow \infty$ (см. пример 38.2).

38.26. $H = \|h_{jk}\| = \|e^{(j-1)(k-1)}\|$, где $\epsilon = e^{\frac{2\pi i}{m}}$. Тогда $\mathcal{S}H = = H\|\delta_{jk}\lambda_k\|$, где $\lambda_k = \epsilon^{k-1}$ ($k = 1, 2, \dots, m$). Так как $|\lambda_k| = 1$, то период $\kappa = m$. $H^{-1} = \frac{1}{m} \| \epsilon^{-(j-1)(k-1)} \|$. $p_{jk}^{(n)} = \frac{1}{m} \sum_{v=1}^m \epsilon^{(v-1)(n+j-k)}$,

т. е. $p_{jk}^{(n)} = 1$, если $n + j - k$ делится на m , и $p_{jk}^{(n)} = 0$ в противном случае ($j, k = 1, 2, \dots, m$). $p_{jk}^{(mn+r)} = 1$, если $r + j - k$ делится на m , и $p_{jk}^{(mn+r)} = 0$ в противном случае ($r = 0, 1, \dots, m-1$).

$$\hat{p}_{jk}^{(n)} = \frac{1}{m} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^{m-1} p_{jk}^{(mn+r)} = \frac{1}{m} \quad (j, k = 1, 2, \dots, m).$$

$$38.27. \mathcal{S}^n = \begin{vmatrix} \alpha^n & U_n \\ 0 & R^n \end{vmatrix}; \quad |\lambda \mathcal{S} - \mathcal{S}| = (\lambda - \alpha)(\lambda^3 - 1), \quad \lambda_1 = 1,$$

$\lambda_2 = \alpha, \lambda_3 = \varepsilon, \lambda_4 = \varepsilon^2$, где $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Период $\kappa = 3$. При $j, k = 2, 3, 4$ $p_{jk}^{(n)} = 1$, если $n + j - k$ делится на 3, и $p_{jk}^{(n)} = 0$ в противном случае. По формуле Перрона

$$p_{12}^{(n)} = \frac{1}{3} - \frac{\alpha^n (\alpha^2 \beta + \alpha \delta + \gamma)}{1 - \alpha^3} + \frac{\varepsilon^{n-1} (\beta \varepsilon^2 + \delta \varepsilon + \gamma)}{(\alpha - \varepsilon)(1 - \varepsilon)^2} - \frac{\varepsilon^{2n-1} (\beta \varepsilon^4 + \delta \varepsilon^2 + \gamma)}{3(\alpha - \varepsilon^2)},$$

$$p_{13}^{(n)} = \frac{1}{3} - \frac{\alpha^n (\alpha^2 \gamma + \alpha \beta + \delta)}{1 - \alpha^3} + \frac{\varepsilon^{n-1} (\gamma \varepsilon^2 + \beta \varepsilon + \delta)}{(\alpha - \varepsilon)(1 - \varepsilon)^2} - \frac{\varepsilon^{2n-1} (\gamma \varepsilon^4 + \beta \varepsilon^2 + \delta)}{3(\alpha - \varepsilon^2)},$$

$$p_{14}^{(n)} = \frac{1}{3} - \frac{\alpha^n (\alpha^2 \delta + \alpha \gamma + \beta)}{1 - \alpha^3} + \frac{\varepsilon^{n-1} (\delta \varepsilon^2 + \gamma \varepsilon + \beta)}{(\alpha - \varepsilon)(1 - \varepsilon)^2} - \frac{\varepsilon^{2n-1} (\delta \varepsilon^4 + \gamma \varepsilon^2 + \beta)}{3(\alpha - \varepsilon^2)} = 1 - \alpha^n - p_{12}^{(n)} - p_{13}^{(n)},$$

$$\hat{p}_{jk} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} [p_{jk}^{(3n)} + p_{jk}^{(3n+1)} + p_{jk}^{(3n+2)}],$$

$$\hat{p}_{j1} = 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4), \quad \hat{p}_{jk} = \frac{1}{3} \quad (k = 2, 3, 4; \quad j = 1, 2, 3, 4).$$

38.28. Цепь неприводимая и периодическая с периодом $\kappa = 2$. Первая группа — состояния с нечетными номерами, вторая — с четными. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{jk}^{(2n)} = p_k$, а $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{jk}^{(2n+1)} = 0$, если $j + k$ — четное число, и $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{jk}^{(2n)} = 0$, а $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{jk}^{(2n+1)} = p_k$, если $j + k$ — нечетное число. Средние предельные абсолютные вероятности $\hat{p}_k = \frac{1}{2m}$ ($k = 1, 2, \dots, 2m$) определяются с помощью равенства $\mathcal{S}' \hat{p} = \hat{p}$, $p_k = \kappa \hat{p}_k$.

38.29. Состояние Q_j — частица находится в точке x_j ($j = 0, 1, \dots, m$); $p_{01} = 1, p_{m, m-1} = 1, p_{j, j+1} = p, p_{j, j-1} = q$ ($j = 1, 2, \dots, m-1$). Цепь неприводимая и периодическая с периодом $\kappa = 2$; $q\hat{p}_1 = \hat{p}_0, \hat{p}_0 + q\hat{p}_2 = \hat{p}_1, p\hat{p}_{m-2} + \hat{p}_m = \hat{p}_{m-1}, p\hat{p}_{m-1} = \hat{p}_m, p\hat{p}_{k-1} + q\hat{p}_{k+1} = \hat{p}_k$ ($k = 1, 2, \dots, m-1$). При $p \neq q$ $\hat{p}_0 = \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{p}{q}}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^m}$, $\hat{p}_m = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{q}\right)^{m-1} \frac{1 - \frac{p}{q}}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^m}$, $\hat{p}_k = \frac{1}{2p} \left(\frac{p}{q}\right)^k \frac{1 - \frac{p}{q}}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^m}$ ($k = 1, 2, \dots, m-1$). При $p = q$ $\hat{p}_1 = \hat{p}_m = \frac{1}{2m}$, $\hat{p}_k = \frac{1}{m}$ ($k = 1, 2, \dots, m-1$).

§ 39. Марковские процессы с дискретным числом состояний

39.1. $P_n(t) = e^{-\lambda pt} \frac{(\lambda pt)^n}{n!}$.

39.2. $P_n(t) = \frac{[(\lambda_1 + \lambda_2)t]^n}{n!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}$.

39.3. $P_n(t) = \frac{[\Lambda(t)]^n}{n!} e^{-\Lambda(t)}$, где $\Lambda(t) = \lambda \int_0^t [1 - F(x)] dx$;

$p_n = \lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = \frac{(\lambda \bar{t})^n}{n!} e^{-\lambda \bar{t}}$, где $\bar{t} = \int_0^\infty [1 - F(x)] dx$ — математическое ожидание времени полета электрона.

39.4 $\rho = \sqrt{\frac{t}{t + \tau}}$.

39.5. $F_n(t) = \begin{cases} 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, & \text{если } t \geq 0, \\ 0, & \text{если } t < 0; \end{cases}$

$f_n(t) = \begin{cases} \lambda \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}, & \text{если } t \geq 0, \\ 0, & \text{если } t < 0; \end{cases}$

$m_k = \frac{n(n+1) \dots (n+k-1)}{\lambda^k}$.

39.6. Решая первую систему уравнений $\frac{dP_{ik}(t)}{dt} = -\lambda P_{ik}(t) + \lambda P_{i, k-1}(t)$ при начальных условиях $P_{ik}(0) = \delta_{ik}$ методом индукции от $P_{i, k+1}(t)$ к $P_{ik}(t)$, получим:

$$P_{ik}(t) = \begin{cases} \frac{(\lambda t)^{i-k}}{(i-k)!} e^{-\lambda t}, & \text{если } 0 \leq k \leq i, \\ 0, & \text{если } k > i. \end{cases}$$

39.7. При $\lambda = \mu$ неравенство $p_m = \frac{1}{m} \leq 0,015$ даст $m = 4$.

$$\sum_{n=0}^m \frac{1}{n!}$$

39.8. Система уравнений для предельных вероятностей p_n :

$$\left. \begin{aligned} m\lambda p_0 &= \mu p_1, \\ [(m-n)\lambda + \mu] p_n &= (m-n+1)\lambda p_{n-1} + \mu p_{n+1}, \\ \mu p_m &= \lambda p_{m-1}, \end{aligned} \right\}$$

имеет решения: $p_n = \frac{m!}{(m-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0$, где p_0 определяется из условия $\sum_{n=0}^m p_n = 1$. Математическое ожидание числа автоматов

в очереди $L_q = m - \frac{\lambda + \mu}{\lambda} (1 - p_0)$.

39.9. Система уравнений для предельных вероятностей p_n :

$$\left. \begin{aligned} m\lambda p_0 &= \mu p_1, \\ [(m-n)\lambda + n\mu] p_n &= (m-n+1)\lambda p_{n-1} + (n+1)\mu p_{n+1} && \text{для } 1 \leq n < r, \\ [(m-n)\lambda + r\mu] p_n &= (m-n+1)\lambda p_{n-1} + r\mu p_{n+1} && \text{для } r \leq n \leq m-1, \\ r\mu p_m &= \lambda p_{m-1}. \end{aligned} \right\}$$

имеет решения:

$$p_n = \begin{cases} \frac{m!}{n!(m-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0, & \text{если } 1 \leq n \leq r, \\ \frac{m!}{r^{n-r} r! (m-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0, & \text{если } n > r; \end{cases}$$

математическое ожидание числа автоматов в очереди на ремонт

$$L_q = p_0 \frac{m!}{r!} \sum_{n=r}^m \frac{n-r}{r^{n-r} (m-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n.$$

39.10. Вероятность того, что электронно-вычислительная машина работает, равна предельной вероятности отсутствия в системе требований на обслуживание $p_0 = e^{-\lambda/\mu}$, где μ — среднее число ремонтов в час. Математическое ожидание экономии от применения более надежных элементов за 1000 часов работы

$$\delta = \left[a + 1000c \left(1 - e^{-\frac{\lambda_A}{\mu}} \right) \right] - \left[b + 1000c \left(1 - e^{-\frac{\lambda_B}{\mu}} \right) \right] = 161c - (b - a).$$

39.11. а) Система уравнений для предельных вероятностей

$$\left. \begin{aligned} \lambda p_0 &= \mu p_1, \\ (\lambda + k\mu) p_k &= \lambda p_{k-1} + (k+1)\mu p_{k+1} \quad (1 \leq k < n), \\ (\lambda + n\mu) p_k &= \lambda p_{k-1} + n\mu p_{k+1} \quad (k \geq n) \end{aligned} \right\}$$

имеет решения:

$$p_k = \begin{cases} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k p_0 & \text{при } 1 \leq k \leq n, \\ \frac{1}{n! n^{k-n}} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k p_0 & \text{при } k \geq n, \end{cases}$$

где p_0 — вероятность того, что все аппараты будут свободны от обслуживания, определяемая из условия $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$, — равна $p_0 =$

$$= \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k + \frac{\mu}{(n-1)!(n\mu - \lambda)} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right\}^{-1} \text{ при условии, что}$$

$$\lambda < n\mu; \text{ б) } p^* = \sum_{k=n}^{\infty} p_k = \frac{\mu p_0}{(n-1)!(n\mu - \lambda)} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n; \text{ в) } 1 - F(t) =$$

$= \sum_{k=n}^{\infty} p_k P_k(T > t)$, где $P_k(T > t)$ — вероятность того, что ожидание в очереди продлится более t при условии, что в системе k

требований: $P_k(T > t) = \sum_{j=0}^{k-n} \frac{(\mu n t)^j}{j!} e^{-\mu n t}$. Подставляя это значение,

$$\text{получим } 1 - F(t) = \sum_{k=n}^{\infty} p_k \sum_{j=0}^{k-n} \frac{(\mu n t)^j}{j!} e^{-\mu n t}; \text{ учитывая, что}$$

$\frac{p_k}{p_n} = \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n}$, и меняя порядок суммирования, получим в результате

$$1 - F(t) = p_n e^{-\mu n t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \sum_{k=n+j}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n-j} =$$

$$= \frac{n\mu p_n}{n\mu - \lambda} e^{-(n\mu - \lambda)t},$$

а так как $\frac{p_n}{p^*} = 1 - \frac{\lambda}{n\mu}$, то $F(t) = 1 - p^* e^{-(n\mu - \lambda)t}$ (для $t \geq 0$); $\bar{t} =$

$$= - \int_0^{\infty} t dF(t) = \frac{p^*}{n\mu - \lambda}; \quad \Gamma) m_1 = \sum_{k=n}^{\infty} (k-n) p_k = p_n \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^k =$$

$$= p_n \frac{\lambda}{n\mu \left(1 - \frac{\lambda}{n\mu}\right)^2}, \quad m_2 = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = m_1 + \frac{n p_n}{1 - \frac{\lambda}{n\mu}} +$$

$$+ p_0 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k, \quad m_3 = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) p_k = p_0 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k.$$

39.12. Применить формулы задачи 39.11; $\bar{t} = \frac{2}{115}$ часа.

39.13. Подобрать n так, чтобы $p^* e^{-(n\mu - \lambda)} < 0,01$; $n = 4$ (см. задачу 39.11).

39.14. а) Система уравнений для предельных вероятностей

$$\left. \begin{aligned} \lambda p_0 &= \mu p_1, \\ (\lambda + k\mu) p_k &= \lambda p_{k-1} + (k+1)\mu p_{k+1} \quad (1 \leq k < n), \\ (\lambda + n\mu) p_n &= \lambda p_{n-1} + n\mu p_{n+1} \quad (n \leq k \leq l-1), \\ \lambda p_{l-1} &= n\mu p_l \end{aligned} \right\}$$

где $l = n + m$, имеет решения

$$p_k = \begin{cases} \frac{p_0}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k, & \text{если } 1 \leq k \leq n, \\ \frac{p_0}{n! n^{k-n}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k, & \text{если } n \leq k \leq l, \end{cases}$$

где p_0 — вероятность отсутствия требований в системе:

$$p_0 = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{m+1}}{1 - \frac{\lambda}{n\mu}} \right\}^{-1};$$

б) вероятность отказа $p_l = \frac{p_0}{n! n^{l-n}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^l$; в) вероятность занятости

всех аппаратов $p^* = \sum_{k=n}^{n+m} p_k = p_n \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{m+1}}{1 - \frac{\lambda}{n\mu}}$, где $p_n = \frac{p_0}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$;

г) $F(t) = 1 - \frac{p^* e^{-\mu t}}{1 - \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{m+1}} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(\mu n t)^j}{j!} \left[\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^j - \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^m \right] \quad (t \geq 0)$;

д) $m_1 = \frac{p_n}{\left(1 - \frac{\lambda}{n\mu}\right)^2} \left[\frac{\lambda}{n\mu} - (m+1) \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{m+1} + m \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{m+2} \right]$;

$$m_2 = m_1 + \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{m+1}}{1 - \frac{\lambda}{n\mu}} n p_n + p_0 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k$$

$$m_3 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0$$

39.15. $p_0 = \frac{81}{665}$; $p = \frac{32}{665}$; $p^* = \frac{52}{133}$; $m_1 = \frac{264}{665}$; $m_2 = \frac{1550}{665} \approx 2,33$.

39.16. Система уравнений для предельных вероятностей

$$\left. \begin{aligned} m\lambda p_0 &= \mu p_1, \\ [(m-n)\lambda + n\mu] p_n &= (m-n+1)\lambda p_{n-1} + (n+1)\mu p_{n+1}, \\ m\mu p_m &= \lambda p_{m-1} \end{aligned} \right\}$$

имеет решения

$$p_n = C_m^n \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)^{m-n} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^n.$$

39.17. Система уравнений для вероятностей $P_n(t)$: $\frac{dP_n(t)}{dt} = -n\lambda P_n(t) + (n-1)\lambda P_{n-1}(t)$, при начальных условиях $P_n(0) = \delta_{n1}$ имеет решение $P_n(t) = e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{n-1}$.

39.18. Система уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP_0(t)}{dt} &= \mu P_1(t), \\ \frac{dP_n(t)}{dt} &= -n(\lambda + \mu) P_n(t) + (n-1)\lambda P_{n-1}(t) + \\ &\quad + (n+1)\mu P_{n+1}(t) \quad (n \geq 1) \end{aligned} \right\}$$

при начальных условиях $P_n(0) = \delta_{n1}$ решается с помощью произвольной функции $G(t, u) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) u^n$, для которой получается дифференциальное уравнение $\frac{\partial G(t, u)}{\partial t} = (\lambda u - \mu)(u - 1) \frac{\partial G(t, u)}{\partial u}$ с начальным условием $G(0, u) = u$. Оно имеет решение $G(t, u) = \frac{\mu \kappa + u [1 - (\lambda + \mu) \kappa]}{1 - u \lambda \kappa}$, где

$$\kappa = \begin{cases} \frac{1 - e^{(\lambda - \mu)t}}{\mu - \lambda e^{(\lambda - \mu)t}}, & \text{если } \lambda \neq \mu, \\ \frac{t}{1 + \mu t}, & \text{если } \lambda = \mu, \end{cases}$$

из которого следует, что $P_0(t) = \mu \kappa$, $P_n(t) = (1 - \lambda \kappa)(1 - \mu \kappa)(\lambda \kappa)^{n-1}$ ($n \geq 1$).

39.19. Система уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP_0(t)}{dt} &= -\lambda_0(t) P_0(t), \\ \frac{dP_n(t)}{dt} &= -\lambda_n(t) P_n(t) + \lambda_{n-1}(t) P_{n-1}(t) \quad (n \geq 1) \end{aligned} \right\}$$

при начальном условии $P_n(0) = \delta_{n0}$ имеет решения: $P_0(t) = (1 + at)^{-\frac{1}{a}}$,

$$P_n(t) = t^n (1 + at)^{-\left(n + \frac{1}{a}\right)} \frac{(1 + a)(1 + 2a) \dots [1 + (n-1)a]}{n!}.$$

§ 40. Непрерывные марковские процессы

40.1. $a_j(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \psi_j(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$; $b_{jl}(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi_j(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \varphi_l(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$.

40.2. $a_j(t, x_1, \dots, x_n) = \psi_j(t, x_1, \dots, x_n)$, $j = 1, \dots, n$; $a_{n+1} = x_{n+2}$; $a_{n+2} = x_{n+3}$; $a_{n+3} = -\alpha^3 x_{n+1} - 3\alpha^2 x_{n+2} - 3\alpha x_{n+3}$; $b_{n+3, n+3} = c^2$, остальные $b_{jl} = 0$.

40.3. $U(t) \equiv U_1(t)$ — компонента двумерного марковского процесса, для которого $a_1 = x_2$; $a_2 = -(\alpha^2 + \beta^2)x_1 - 2\alpha x_2$; $b_{11} = c^2$; $b_{12} = -2\alpha c^2$; $b_{22} = 4\alpha^2 c^2$.

40.4. $a_j(t, x_1, \dots, x_n) = \varphi_j(t, x_1, \dots, x_n)$; $b_{jl} = \psi_{jl}(t, x_1, \dots, x_n)$.

40.5. Марковский процесс имеет $r + n$ измерений; $a_j = \varphi_j(t, x_1, \dots, x_r)$, $j = 1, 2, \dots, r$; $a_{r+l} = x_{r+l+1}$, $l = 1, 2, \dots, n-1$; $a_{r+n} = -\sum_{j=1}^n c_{r+n+1-j} x_j$; $b_{r+p, r+q} = c_{r+p} c_{r+q}$; $p, q = n-m, \dots, n$,

остальные $b_{jl} = 0$; здесь $c_{l+k} = \rho_{k+m-n} - \sum_{j=n-m}^{k-1} \alpha_{k-j} c_{j+r}$.

40.7. $\dot{U}_1 = \frac{1}{\mu} U_2 + \frac{1}{\mu} \sqrt{2U_2} \xi_1(t)$; $\dot{U}_2 = \frac{1}{\mu} \varphi(U_1) + \frac{\kappa}{\mu} \xi_2(t)$, где $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ — взаимно независимые случайные функции, обладающие свойством «белого шума».

40.8. $f(y_1, y_2) = c \exp \left\{ -\frac{\alpha^2}{\sigma^2} \int_{x_1}^{y_1} \varphi(\eta) d\eta - \frac{\alpha^2}{2\sigma^2} y_2^2 \right\}$, где c определяется из условий нормировки. При $\varphi(u) = \beta^2 u^3$
 $f = c_1 \exp \left\{ -\frac{\alpha^2 \beta^2}{4\sigma^2} y_1^4 - \frac{\alpha^2}{2\sigma^2} y_2^2 \right\}$, $c_1^{-1} = \frac{2\sigma^2}{\alpha} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^4} d\eta$.

40.9. $f(y) = \frac{c}{\Psi(y)} \exp \left\{ 2 \int_0^{\infty} \frac{\Phi(\eta)}{\Psi(\eta)} d\eta \right\}$, где c определяется из условия $\int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy = 1$.

40.10. Обозначив $U_1 = \xi(t)$, $U_2 = U_1 - U$, для U_2 получаем уравнение, не зависящее от U_1 . Уравнение Колмогорова для U_2 будет $\frac{\partial f}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial y_2} \left\{ \left[\frac{y_2}{RC} + \frac{1}{C} F(y_2) \right] f \right\} - \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\pi RC} \frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2} = 0$, его

стационарное решение: $f(y_2) = c \exp \left\{ -\frac{\pi}{\sigma^2} y_2^2 - \frac{2\pi R}{\sigma^2} \int_0^{y_2} F(\eta) d\eta \right\}$,

где c определяется из условия нормировки. Искомая плотность вероятности $f(y)$ есть композиция $f(y_2)$ и нормального закона распределения с нулевым математическим ожиданием. В упомянутом

частном случае $f(y_2) = c_1 \exp \left\{ -\frac{\pi y_2^2}{\sigma^2} - \frac{2\pi R}{\sigma^2} \frac{k}{4} y_2^2 (1 + \operatorname{sgn} y_2) \right\}$,

где $c_1 = \frac{2\sqrt{1+kR}}{\sigma(1+\sqrt{1+kR})}$; $f(u) = \frac{c_1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+2\pi}} \left[1 - \Phi \left(\frac{u}{\sigma\sqrt{1+2\pi}} \right) \right] \times \right.$
 $\times e^{-\frac{\pi u^2}{(2\pi+1)\sigma^2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi+2\pi kR+1}} \left[1 + \Phi \left(\frac{u}{\sigma\sqrt{2\pi+2\pi kR+1}} \right) \right] \times$
 $\left. \times e^{-\frac{\pi(1+kR)u^2}{(2\pi+2\pi kR+1)\sigma^2}} \right\}$.

40.11. $f(\tau, y) = \frac{\alpha y}{\alpha a^2 + \tau \sigma^2} e^{-\frac{\alpha y^2}{2(\alpha a^2 + \tau \sigma^2)}}$.

40.12. Уравнение Колмогорова для $U = \exp\{-aV\}$ имеет вид

$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{1}{RC} \frac{\partial}{\partial y} \left[(y \ln y - ai_0 R) e^{\frac{a^2 \sigma^2}{2}} \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{ai_0}{C} \right)^2 \sigma_{\xi}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Стационар-

ное решение: $f(y) = N^{-1} \exp \left\{ -\frac{RC}{(ai_0 R)^2 \sigma_{\xi}^2} \left[y^2 \left(\ln y - \frac{1}{2} \right) - 2ai_0 R e^{-a^2 \sigma^2} y \right] \right\}$, где $\sigma_{\xi}^2 = \frac{2}{\alpha} e^{a^2 \sigma^2} [E_1(-a^2 \sigma^2) - 2 \ln a \sigma - 0,57721 \dots]$ (ср. [44], стр. 243).

$$40.13. \quad f(y) = c \exp \left\{ -\frac{2}{\sigma^2} \int_0^y \varphi(\eta) d\eta \right\},$$

$$\text{где } c^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{2}{\sigma^2} \int_0^y \varphi(\eta) d\eta \right\} dy.$$

40.14. Уравнение Колмогорова: $\frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y} \{ [\alpha(\tau) + \beta(\tau)y] f \} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [\gamma^2(\tau) f] = 0$; уравнение для характеристической функции $E(\tau, z)$: $\frac{\partial E}{\partial \tau} - iz\alpha(\tau)E - z\beta(\tau) \frac{\partial E}{\partial z} + \frac{\gamma^2}{2} z^2 E = 0$, $E(\tau, z) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sigma_y^2 z^2 + iz\bar{y} \right\}$, $\bar{y} = e^{\int_t^{\tau} \beta(\tau_1) d\tau_1} \left\{ x + \int_t^{\tau} \exp \left[-\int_t^{\tau_2} \beta(\tau_1) d\tau_1 \right] \times \right.$
 $\times a(\tau_2) d\tau_2 \left. \right\}$, $\sigma_y^2 = \int_t^{\tau} \exp \left\{ -2 \int_t^{\tau_2} \beta(\tau_1) d\tau_1 \right\} \gamma^2(\tau_2) d\tau_2$.

40.15. Уравнение Колмогорова: $\frac{\partial f}{\partial \tau} - \frac{1}{T_0} \frac{\partial}{\partial y} (yf) - \frac{1}{2} \frac{i_0^2 \sigma_e^2}{T_0^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$; $f = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\bar{y})^2}{2\sigma_y^2}}$; $\bar{y} = xe^{-\frac{\tau-t}{T_0}}$;
 $\sigma_y^2 = \frac{i_0^2 \sigma_e^2}{2T_0} \left[1 - e^{-\frac{2(\tau-t)}{T_0}} \right]$.

40.16. Обозначив $U_1(t) = U(t)$, $U_2(t) = \dot{U}_1(t)$, для коэффициентов уравнения Колмогорова получим: $a_1 = x_2$; $a_2 = -2hx_2 - k^2 x_1$;
 $b_{11} = 0$; $b_{12} = 0$; $b_{22} = c^2$; $f(\tau, y_1) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(y_1 - \bar{y}_1)^2}{2\sigma_1^2} \right\}$,
 где $\bar{y}_1 = xe^{-h(\tau-t)} \left[\cos \omega_0(\tau-t) + \frac{h}{\omega_0} \sin \omega_0(\tau-t) \right]$; $\sigma_1^2 = \frac{c^2}{4hk^2} \times$
 $\times \left\{ \left(1 - \frac{k^2}{\omega_0^2} e^{-2h\tau_1} \right) + \frac{h^2}{\omega_0^2} e^{-2h\tau_1} (h \cos^2 \omega_0 \delta_1 - \omega_0 \sin 2\omega_0 \varepsilon_1) \right\}$; $\tau_1 = \tau - t$;
 $\omega_0 = \sqrt{k^2 - h^2}$.

49.17. $\frac{\partial f}{\partial \tau} - \alpha \frac{\partial}{\partial y} (f \operatorname{sgn} y) - \frac{c^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$

49.18. $f(t, x; \tau, y) =$
 $= \left(\frac{\beta y^2}{\alpha^2}\right)^{2\mu + \frac{1}{2}} \frac{2\sqrt{\beta}}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n\beta\tau} e^{-\frac{\beta y^2}{\alpha^2}} \frac{n!}{\Gamma(n + 2\mu + 1)} \times$
 $\times L_n^{(2\mu)}\left(\frac{\beta x^2}{\alpha^2}\right) L_n^{(2\mu)}\left(\frac{\beta y^2}{\alpha^2}\right),$

где $\mu = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\alpha^2} - \frac{1}{2}\right)$, а $L_n^{(\nu)}(x)$ — обобщенные полиномы Лагерра.

49.19. $W(T) = \int_{-\beta}^{\beta} w(\alpha T, y_1) dy_1; \quad w(\tau_1, y_1) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j^2 \tau_1} \times$
 $\times e^{-\frac{1}{4} y_1^2} D_a(y_1) c_j$, где $D_a(x)$ — четное решение уравнения Вебера 1) (функция параболического цилиндра): $\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{1}{4} x^2 - a\right) y = 0;$
 $\lambda_j^2 = a_j - 0,5; \quad a_j$ — корень уравнения $D_a(\beta) = 0, \quad \tau_1 = \alpha\tau;$
 $y_1 = \frac{\sqrt{2\alpha}}{c} y; \quad \beta = \frac{\sqrt{2\alpha}}{c} u_0; \quad c_j = \frac{\sqrt{\alpha}}{c} \frac{1}{N_j} D_{a_j}(0); \quad N_j = \int_{-\beta}^{\beta} e^{-\frac{1}{2} y_1^2} \times$
 $\times D_{a_j}(y_1) dy_1.$

49.20. $W(T) = \int_{-\infty}^{\beta} w(\alpha T, y_1) dy_1; \quad w(\tau_1, y_1) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j^2 \tau_1} \times$
 $\times e^{-\frac{1}{4} y_1^2} V(y_1) c_j$, где $V_a(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{-\frac{a}{2}} \left\{ 2^{-\frac{1}{4}} \Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} a\right) \times \right.$
 $\times D_a^{(1)}(x) \sin \pi \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} a\right) + 2^{\frac{1}{4}} \Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} a\right) D_a^{(2)}(x) \cos \pi \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} a\right) \left. \right\};$
 $D_a^{(1)}(x)$ и $D_a^{(2)}(x)$ — соответственно четное и нечетное решения уравнения Вебера 1): $\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{1}{4} x^2 - a\right) y = 0; \quad a_j$ — корень уравне-
 ния $V_{a_j}(\beta) = 0; \quad \lambda_j^2 = a_j - 0,5; \quad \tau_1 = \alpha\tau; \quad y_1 = \frac{\sqrt{2\alpha}}{c} y; \quad \beta = \frac{\sqrt{2\alpha}}{c} u_0;$
 $c_j = \frac{\sqrt{\alpha}}{c} \frac{1}{N_j} V_{a_j}(0); \quad N_j = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} y_1^2} V_{a_j}(y_1) dy_1.$

Глава IX

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ

§ 41. Определение моментов случайных величин по результатам опытов

41.1. 10,58 м. 41.2. а) 814,87 м²; б) 921,86 м². 41.3. $\tilde{v} = 424,73$ м/сек;
 $\tilde{\sigma}_v = 8,84$ м/сек. 41.4. $\tilde{v} = 33$ м/сек; $\tilde{E}_v = 3,07$ м/сек.

41.5. $\tilde{x} = 404,85$ мкв; $\tilde{\sigma}_x = 133$ мкв. 41.6. При $P(A) = 0,5$ $D_{\max} = \frac{1}{4n}$.

41.7. $D[\tilde{\sigma}_1^2] = \frac{2(n-1)}{n^2} D^2[X]$; $D[\tilde{\sigma}_2^2] = \frac{2}{n-1} D[X]$. 41.8. $\tilde{S}_k = 0,85$;

$\tilde{E}_x = 2,70$. 41.9. $k = \frac{1}{2(n-1)}$. 41.10. $k = \sqrt{\frac{\pi}{2n(n-1)}}$.

41.11. а) $k = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$; б) $k = \frac{1}{\sqrt{n \left[1 + \frac{2}{\pi}(n-1) \right]}}$. 41.12. $A_j =$

$= \frac{\lambda}{\sigma_j^2}$, где λ — произвольное число. 41.13. $\tilde{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$;

$\tilde{y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k$; $\tilde{E}_x = \rho k_n \sqrt{\frac{2}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \tilde{x})^2}$; $\tilde{E}_y =$

$= \rho k_n \sqrt{\frac{2}{n-1} \sum_{k=1}^n (y_k - \tilde{y})^2}$, значения k_n даны в таблице 23.

41.14. $\tilde{x} = 48,31$ м; $\tilde{y} = 53,31$ м; $\tilde{E}_x = 10,75$ м; $\tilde{E}_y = 12,50$ м.

41.15. $\tilde{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$; $\tilde{y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k$;

$$\tilde{E}_\xi = \rho \sqrt{2} \sqrt{\tilde{\sigma}_x^2 \cos^2 \alpha + \tilde{k}_{xy} \sin 2\alpha + \tilde{\sigma}_y^2 \sin^2 \alpha};$$

$$\tilde{E}_\eta = \rho \sqrt{2} \sqrt{\tilde{\sigma}_x^2 \sin^2 \alpha - \tilde{k}_{xy} \sin 2\alpha + \tilde{\sigma}_y^2 \cos^2 \alpha}.$$

где $\tilde{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \tilde{x})^2$; $\tilde{\sigma}_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (y_k - \tilde{y})^2$; $\tilde{k}_{xy} =$

$= \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \tilde{x})(y_k - \tilde{y})$, а угол α определяется решением

уравнения $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tilde{k}_{xy}}{\tilde{\sigma}_x^2 - \tilde{\sigma}_y^2}$. 41.16. $\tilde{x} = 1$ м; $\tilde{y} = 40$ м; $\tilde{E}_\xi = 23$ м;

$\tilde{E}_\eta = 1.07$ м. 41.17. $k = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \sqrt{\frac{n}{2}}$. Предварительно доказать, что плотность вероятности случайной величины $\tilde{\sigma}$ определяется формулой $f_n(\tilde{\sigma}) = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left(\frac{n}{2\sigma^2}\right)^{\frac{n-1}{2}} (\tilde{\sigma})^{n-2} e^{-\frac{n(\tilde{\sigma})^2}{2\sigma^2}}$.

41.18. См. таблицу 132.

Таблица 132

I_j	1-10	11-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70	71-80	81-90	91-100
\tilde{p}_j	0,107	0,100	0,127	0,087	0,093	0,127	0,093	0,073	0,087	0,106
$\tilde{F}(x)$	0,107	0,207	0,334	0,421	0,514	0,641	0,734	0,807	0,894	1,0

$\tilde{x} = 48,50$; $\tilde{D}[X] = 829,18$.
41.19. См. таблицу 133.

Таблица 133

I_j	0-3	3-6	6-9	9-12	12-15	15-18	18-21	21-24
\tilde{p}_j	0,000	0,002	0,006	0,040	0,070	0,114	0,156	0,164

I_j	24-27	27-30	30-33	33-36	36-39	39-42	42-45
\tilde{p}_j	0,180	0,122	0,108	0,030	0,004	0,004	0,000

$\tilde{x} = 22,85$; $D[X] = 40,08$.

41.20. $\tilde{\sigma}_1^2$ и $\tilde{\sigma}_2^2$ являются несмещенными оценками дисперсии ($M[\tilde{\sigma}_2^2] = M[\tilde{\sigma}_1^2] = \sigma^2$); $D[\tilde{\sigma}_1^2] = \frac{2\sigma^4}{n-1}$; $D[\tilde{\sigma}_2^2] = \frac{3n-4}{(n-1)^2} \sigma^4$, т. е. при любом $n > 2$ $D[\tilde{\sigma}_1^2] < D[\tilde{\sigma}_2^2]$ (см. табл. 134).

Таблица 134

n	3	5	7	10	15	∞
$\frac{D[\tilde{\sigma}_1^2]}{D[\tilde{\sigma}_2^2]}$	0,80	0,73	0,71	0,69	0,68	0,67

§ 42. Доверительные вероятности и доверительные интервалы

42.1. (92,36 м, 107,64 м). 42.2. $\tilde{x} = 116 \frac{1}{22}$ м; (115,53 м; 116,57 м).
 42.3. 0,55; 0,34. 42.4. а) $\tilde{x} = 10,57$ м, $\tilde{\sigma}_x = 2,05$ м; б) 0,26; в) 0,035.
 42.5. (5,249 сек., 5,751 сек.); (1,523 сек., 1,928 сек.). 42.6. (867,6 м/сек., 873,0 м/сек). 42.7. Не менее 11 измерений. 42.8. (24 846 м, 25 154 м); (130,7 м, 294,9 м). 42.9. ($4,761 \cdot 10^{-10}$, $4,805 \cdot 10^{-10}$); $\tilde{x} = 4,783 \cdot 10^{-10}$.
 42.10. а) (420,75 м/сек., 428,65 м/сек.); (6,69 м/сек., 12,70 м/сек.); б) 0,61; 0,76. 42.11. Не менее трех дальномеров. 42.12. Не менее 15 измерений. 42.13. 0,44; 0,55; 0,71; 0,91. 42.14. См. таблицу 135.

Таблица 135

n	3	5	10	25
$\sigma = 20$ м	$\pm 18,98$ м	$\pm 14,71$ м	$\pm 10,40$ м	$\pm 6,58$ м
$\tilde{\sigma} = 20$ м	$\pm 33,72$ м	$\pm 19,05$ м	$\pm 11,59$ м	$\pm 6,84$ м

42.15. $\tilde{t} = 425$ час.; (270,70 часа, 779,82 часа). 42.16. (410,21 часа, 1036,56 часа). 42.17. (50,75 часа, 85,14 часа). 42.18. (0,123; 0,459). 42.19. (0,303; 0,503); (0,276; 0,534). 42.20. (0,000; 0,149); (0,000; 0,206); (0,000; 0,369). 42.21. Для стрелка А (0,128; 0,872), для стрелка В (0,369; 0,631). 42.22. (1,15; 3,24). 42.23. (3,721; 4,020). 42.24. (0; 4,6).
 42.25. При $\alpha = 0,99$ при $\alpha = 0,95$

для r_{12} (0,42; 0,68), для r_{12} (0,45; 0,65),

для r_{13} (0,13; 0,47), для r_{13} (0,17; 0,43),

для r_{14} (0,21; 0,53); для r_{14} (0,25; 0,49).

42.26. $9,82 < \bar{x} < 11,18$; $1,624 < \sigma_x < 2,632$; $70,58 < \bar{y} < 77,42$; $8,12 < \sigma_y < 13,16$; $0,369 < r_{xy} < 0,796$.

§ 43. Критерии согласия

43.1. $\tilde{\lambda} = 0,928$; $\chi_q^2 = 2,172$; $k = 4$; $P(\chi^2 \geq \chi_q^2) = 0,705$. Отклонение не значимо, гипотеза о согласии наблюдений с законом распределения Пуассона не опровергается.

43.2. $\tilde{\lambda} = 1,54$; $\chi_q^2 = 7,953$; $k = 6$; $P(\chi^2 \geq \chi_q^2) = 0,246$. Отклонение не значимо.

43.3. $\tilde{x} = 5$; $p = 0,5$; $\chi_q^2 = 3,156$; $k = 9$; $P(\chi^2 \geq \chi_q^2) = 0,944$.

Гипотеза о том, что при каждой из стрельб имелась постоянная вероятность попадания одним выстрелом, не опровергается.

43.4. $\chi_q^2 = 10,32$; $k = 7$; $P(\chi^2 \geq \chi_q^2) = 0,176$. Отклонения не значимы.

43.5. $D_{\text{гип}} = 0,1068$; $\lambda_{\text{гип}} = 1,068$; $P(\lambda_{\text{гип}}) = 0,202$; $D_{\text{бин}} = 0,1401$; $\lambda_{\text{бин}} = 1,401$; $P(\lambda_{\text{бин}}) = 0,039$. Гипотеза о согласии наблюдений с гипергеометрическим законом распределения не опровергается; отклонение статистического закона распределения от биномиального значимо, и гипотезу о согласии с биномиальным законом распределения следует отвергнуть.

43.6. $\tilde{x} = 11,8$; $z = 4,691$; $k = 2$; $\chi_q^2 = 1,16$; $P(\chi^2 \geq \chi_q^2) = 0,568$.

Гипотеза о согласии наблюдений с законом нормального распределения не опровергается.

43.7. $\tilde{x} = 22,85$; $\tilde{\sigma} = 6,394$; $k = 6$; $\chi_q^2 = 5,939$; $P(\chi^2 \geq \chi_q^2) = 0,436$.

Гипотеза о согласии статистического распределения с законом нормального распределения не опровергается, так как отклонения не значимы.

43.8. $M[Z] = 4,5$; $D[Z] = 8,25$, где Z — случайная цифра; $M[X] = 22,5$; $D[X] = 41,23$; $\sigma = 6,423$; $D_0 = 0,0405$; $\lambda = 0,6403$; $P(\lambda) = 0,807$. Гипотеза о согласии статистического распределения с законом нормального распределения не опровергается.

43.9. $\chi_q^2 = 5,012$; $k = 9$; $P(\chi^2 \geq \chi_q^2) = 0,831$. Отклонения не значимы; гипотеза о том, что первые 800 десятичных знаков в числе π подчиняются закону равномерного распределения, не опровергается.

43.10. $D_0 = 0,0138$; $\lambda = 0,3903$; $P(\lambda) = 0,998$. Гипотеза о согласии распределения первых 800 десятичных знаков числа π с законом равномерного распределения не опровергается.

43.11. $\chi_q^2 = 4$; $k = 9$; $P(\chi^2 \geq \chi_q^2) = 0,91$. Гипотеза о согласии наблюдений с законом равномерного распределения не опровергается.

43.12. $D_0 = 0,041$; $\lambda = 0,5021$; $P(\lambda) = 0,963$. Гипотеза о согласии наблюдений с законом равномерного распределения не опровергается, так как отклонения не значимы.

43.13. $\chi_q^2 = 24,9$; $k = 9$; $P(\chi^2 \geq \chi_q^2) = 0,0034$. Отклонения значимы; гипотезу о согласии опытных данных с законом равномерного распределения следует отвергнуть. Результаты отсчетов содержат систематическую ошибку.

43.14. $\tilde{x} = 8,75$; $\tilde{\sigma} = 16,85$; $\chi_{qn}^2 = 11,83$; $k_n = 5$; $P(\chi^2 \geq \chi_{qn}^2) = 0,0398$; для параметра δ закона распределения Симпсона получается оценка $\delta = \sqrt{\tilde{\sigma}} = 41,28$; $\chi_{qc}^2 = 17,06$; $k_c = 5$; $P(\chi^2 \geq \chi_{qc}^2) = 0,00402$. Гипотеза о согласии наблюдений с законом распределения Симпсона опровергается, а гипотезу о согласии наблюдений с законом нормального распределения можно считать неопровергнутой.

43.15. $x = \lg y$; $\tilde{x} = -0,1312$; $\tilde{\sigma}_x^2 = 0,3412$; $\tilde{\sigma}_x = 0,5841$; $n = 9$; $k = 6$; $P(\chi^2 \geq \chi_q^2) = 0,890$. Гипотеза о согласии опытных данных с законом логарифмически нормального распределения не опровергается (отклонения не значимы).

43.16. $\tilde{x} = 2,864$; $\tilde{m}_2 = 11,469$; $M[X] = v\tilde{\sigma}$; $\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{\tilde{m}_2}{1+v^2}}$, где v — корень уравнения $T(v) = 0,4229$; $T(v) = \frac{\varphi(v) + 0,5v\Phi(v)}{\sqrt{1+v^2}} = \frac{x}{2\sqrt{m_2}}$; при $v = 1,2$ $T(v) = 0,4200$; при $v = 1,3$ $T(v) = 0,4241$;

$v \approx 1,271$; $M[X] = 2,662$; $\tilde{\sigma} = 2,094$; $\chi_q^2 = 5,304$; $k = 9$; $P(\chi^2 \geq \chi_q^2) = 0,894$. Гипотеза о том, что X есть абсолютное значение нормально распределенной величины, не опровергается.

43.17. $\tilde{x} = 87,46$; $\tilde{\sigma} = 2,471$; $\tilde{\alpha} = 80,02$; $\tilde{\beta} = 94,90$; $\chi_{qn}^2 > 500$; $k_n = 7$; $P(\chi^2 \geq \chi_{qn}^2) \approx 0$. Плотность вероятности $\Psi(x)$ для композиции законов нормального и равномерного распределений имеет вид $\Psi(x) = \frac{1}{2 \cdot 14,88} \left[\Phi\left(\frac{x-80,02}{2,471}\right) + \Phi\left(\frac{94,90-x}{2,471}\right) \right]$; $\chi_{q\Psi}^2 = 2,949$; $k_\Psi = 6$; $P(\chi^2 \geq \chi_{q\Psi}^2) = 0,814$. Гипотеза о согласии опытных данных с законом нормального распределения опровергается. Гипотеза о согласии опытных данных с композицией законов нормального и равномерного распределений не опровергается.

43.18. $\tilde{r} = 50,13$; $\tilde{\sigma} = \tilde{r} \sqrt{\frac{2}{\pi}} = 40,0$; $\chi_q^2 = 2,73$; $k = 8$; $P(\chi^2 \geq \chi_q^2) = 0,95$. Гипотеза о согласии наблюдений с законом распределения Рэлея не опровергается.

43.19. $\tilde{x} = 508,6$; $\tilde{\sigma} = 123,7$; $\chi_{qn}^2 = 2,95$; $k_n = 7$; $P(\chi^2 \geq \chi_{qn}^2) = 0,888$. Параметр \tilde{a} для закона распределения Максвелла определяется из формулы $\tilde{a} = \frac{\tilde{x} - x_0}{1,596} = 193,4$; $\chi_{qM}^2 = 1,383$; $k_M = 7$; $P(\chi^2 \geq \chi_{qM}^2) = 0,986$. Наблюдения лучше согласуются с законом распределения Максвелла, чем с законом нормального распределения.

43.20. $\tilde{t} = 871,5$ часа; $\tilde{a} = 0,001148$; $k = 8$; $\chi_q^2 = 4,495$; $P(\chi^2 \geq \chi_q^2) = 0,808$. Гипотеза о согласии наблюдений с экспоненциальным законом распределения не опровергается (отклонения не значимы).

43.21. $\tilde{t} = 394,5$ часа, $\tilde{\sigma} = 228,1$ часа; $\tilde{v}_m = 0,5782$; $\tilde{m} = 1,789$; $\tilde{b}_m = 0,8893$; $\chi_q^2 = 13,44$; $k = 7$; $P(\chi^2 \geq \chi_q^2) = 0,0629$. Гипотеза о согласии наблюдений с законом распределения Вейбулла не опровергается.

43.22. Функция распределения арктангенса $F(z) = \int_{-\infty}^z f(z) dz =$
 $= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg \frac{z}{2}$; $D_0 = 0,0195$; $\lambda = 0,6166$; $P(\lambda) = 0,842$. Гипотеза о согласии статистического распределения величин z с законом распределения Коши и, следовательно, величин Y с законом нормального распределения не опровергаются.

43.23. Функция распределения арксинуса $F(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{a}{z}$;
 $D_0 = 0,0290$; $\lambda = 0,917$; $P(\lambda) = 0,370$. Гипотеза о том, что маятник совершает гармонические колебания, не опровергается.

43.24. $\tilde{\sigma}^2 = 0,1211$; $k = 2$; $\chi_q^2 = 1,629$; $P(\chi^2 \geq \chi_q^2) = 0,59$. Отклонения не значимы; гипотеза о согласии наблюдаемых значений q_i с законом χ^2 -распределения с числом степеней свободы $k' = 19$ и, следовательно, гипотеза об однородности ряда дисперсий не опровергаются. Указание. Значения q_i следует расположить в порядке возрастания и разбить на интервалы с тем, чтобы в каждый попало не менее пяти значений q_i .

43.25. $\tilde{F}(\eta_i) = \frac{i - \frac{1}{2}}{n}$; $D_\eta = 0,126$; $\lambda = 0,797$; $P(\lambda) = 0,549$.

Гипотеза о согласии наблюдаемых значений η_i с законом распределения Стьюдента и, следовательно, гипотеза о согласии наблюдаемых значений x_i с законом нормального распределения не опровергаются.

43.26. $\tilde{x} = 115,3$; $\tilde{\sigma} = 21,43$; $\chi_{qn}^2 = 10,20$; $k_n = 10$; $P(\chi^2 \geq \chi_{qn}^2) =$
 $= 0,43$; $\tilde{\mu}_3 = 2046$; $\tilde{\mu}_4 = 6137 \cdot 10^2$; $\tilde{S}_k = 0,2079$; $\tilde{E}_x = -0,0912$. Функция распределения для А-ряда Шарлье: $F(z) = 0,5 + 0,5\Phi(z) -$
 $- 0,03465\varphi_2(z) - 0,0038\varphi_3(z)$, где $z = \frac{x - 115,3}{21,43}$; $\chi_{qш}^2 = 8,394$;

$k_{ш} = 8$; $P(\chi^2 \geq \chi_{qш}^2) = 0,411$. Гипотезы о согласии наблюдений с законами нормального распределения и распределения, определяемого А-рядом Шарлье, не опровергаются, причем последний не улучшает согласия наблюдений с теоретическим законом распределения.

43.27. $\tilde{\mu}_3 = -221,12$; $\tilde{\mu}_4 = 1560 \cdot 10^2$; $\tilde{S}_k = -0,06961$; $\tilde{E}_x = 0,3406$. Функция распределения для А-ряда Шарлье $F(z) = 0,5 + 0,5\Phi(z) +$
 $+ 0,01160\varphi_2(z) + 0,01417\varphi_3(z)$, где $z = \frac{c - 299773,85}{14,7}$; $\chi_q^2 = 17,25$;

$k = 6$; $P(\chi^2 \geq \chi_q^2) = 0,0085$. Отклонения значимы. Гипотеза о согласии наблюдений с законом распределения, определяемым А-рядом Шарлье, опровергается.

43.28. $\chi_q^2 = 20,48$; $k = 2$; $P(\chi^2 \geq \chi_q^2) = 0,001$. Отклонения значимы. Гипотеза о независимости характера размеров от номера партии опровергается. Следует признать, что для второй партии характерно систематическое занижение размеров.

§ 44. Обработка результатов наблюдений по способу наименьших квадратов

44.1. $\tilde{h} = 0,609 + 0,1242E$; $M_{0,0} = 0,3896$; $M_{1,1} = 0,00001156$; $\tilde{\sigma}^2 = 1,464$; $\tilde{\sigma}_{a_0}^2 = 0,5704$; $\tilde{\sigma}_{a_1}^2 = 0,0000169$.

44.2. $\tilde{h} = 0,679 + 0,124E$; $\tilde{\sigma}^2 = 1,450$; $\tilde{\sigma}_{a_0}^2 = 0,5639$; $\tilde{\sigma}_{a_1}^2 = 0,00001672$. Совпадение с результатами задачи 44.1 вполне удовлетворительное. Точность результата в задаче 44.2 выше, чем в задаче 44.1, так как при решении задачи 44.1 производилось большое количество вычислительных операций, в том числе вычитание близких по величине чисел.

44.3. $\tilde{h} = 9,14 + 65,89t + 489,28t^2$; $\tilde{\sigma}^2 = 0,001245$; $\tilde{\sigma}_g = 1,177$ см/сек².

44.4. $\tilde{h} = 65,021 + 5,176P_{1,13}(x) \cdot 13 + 1,087P_{2,13}(x) \cdot 13$, где $x = 30t - 1$, или $\tilde{h} = 9,133 + 65,895t + 489,28t^2$; $\tilde{\sigma}_g = 1,167$ см/сек². 44.5. $\tilde{y} = 0,8057 + 0,2004x - 0,1018x^2$; $\tilde{\sigma}^2 = 0,0002758$; $\tilde{\sigma}_{a_0} = 0,00009192$; $\tilde{\sigma}_{a_1} = 0,000009848$; $\tilde{\sigma}_{a_2} = 0,000003283$.

44.6. $\tilde{y} = 26,97 + 0,3012P_{1,16}(t) = 29,33 - 0,3012t$; $\tilde{y} = 26,97 + 0,3012P_{1,16}(t) - 0,000916P_{2,16}(t) + 0,01718P_{3,16}(t) = 29,82 - 0,7133t + 0,06782t^2 - 0,002864t^3$, где $P_{k,16}$ — табличные значения полиномов Чебышева. Для линейной зависимости $\tilde{\sigma} = 0,3048$; при $\alpha = 0,90$ имеем $0,2362 < \sigma < 0,4380$. Для зависимости третьей степени $\tilde{\sigma} = 0,1212$; при $\alpha = 0,90$ имеем $0,0924 < \sigma < 0,1800$.

44.7. $\tilde{y} = 21,07 + 5,954x$; $\tilde{\sigma}_{a_0} = 2,90$; $\tilde{\sigma}_{a_1} = 0,0889$; $\tilde{K}_{a_0, a_1} = -0,2041$. Доверительные интервалы для a_k при $\alpha = 0,90$: $14,3 < a_0 < 27,9$; $5,75 < a_1 < 6,16$. $\tilde{\sigma}_y^2(x) = 2,900 - 0,4082x + 0,0889x^2$. Доверительные границы для $y = F(x)$ при $\alpha = 0,90$ даны в таблице 136.

Таблица 136

i	0	1	2	3	4
$\tilde{y}_i - \gamma\tilde{\sigma}_y(x_i)$	45,3	72,7	140,0	258,4	366,8
$\tilde{y}_i + \gamma\tilde{\sigma}_y(x_i)$	57,3	83,3	148,7	268,8	383,6

44.8. $\tilde{y} = 0,3548 + 0,06574x + 0,00130x^2$; $\tilde{\sigma}_a = 0,0147$; $\tilde{\sigma}_{a_1} = 0,0106$; $\tilde{\sigma}_{a_2} = 0,00156$.

44.9. $\tilde{y} = 1,1188 + \frac{8,9734}{x}$; $\tilde{\sigma}_{a_0} = 0,2316$; $\tilde{\sigma}_{a_1} = 0,6157$; при $\alpha = 0,95$

имеем: $1,065 < a_0 < 1,172$; $8,831 < a_1 < 9,115$; $\tilde{K}_{a_0, a_1} = -0,0854$. Доверительные границы для $y = F(x)$ при $\alpha = 0,95$ даны в таблице 137.

Т а б л и ц а 137

x_i	1	2	3	5	10	20	30	50	100	200
$y_i - \gamma \tilde{\sigma}_y(x_i)$	10,03	5,55	4,06	2,87	1,97	1,52	1,37	1,25	1,16	1,11
$y_i + \gamma \tilde{\sigma}_y(x_i)$	10,27	5,66	4,16	2,96	2,06	1,62	1,47	1,35	1,26	1,22

$\tilde{\sigma}_y^2(x) = 0,05364 - \frac{0,1708}{x} + \frac{0,3790}{x^2}$.

44.10. $U = 100,8e^{-0,3127t}$; $89,97 < U_0 < 112,9$; $0,2935 < a < 0,3319$.

44.11. $\delta_B = 204,9 - \frac{34205}{v^2}$; $\tilde{\sigma}_{a_0} = 4,36$; $\tilde{\sigma}_{a_1} = 504$.

44.12. $p = 0,1822e^{-\frac{(x-117,25)^2}{2 \cdot 462,91}}$; $|\epsilon_{\max}| = 0,04633$;

$p'_0 = \frac{10}{\sqrt{2\pi\sigma}} = 0,1854$.

44.13. $\varphi' = 62^\circ$ подобрано по формуле $y = a' \sin(\omega t - \varphi')$, где

$a' = \frac{|y_{0,05}| + |y_{0,45}| + |y_{0,95}|}{3} = 33$; $\tilde{y} = 30,75 \sin(\omega t - 59^\circ 59')$;

$|\tilde{y} - y|_{\max} = 18^\circ,4$. 44.14. $\tilde{y} = 1,0892 - 1,2496 \cos x + 2,0802 \sin x + 0,9795 \cos 2x + 0,4666 \sin 2x$; $|\epsilon_{\max}| = 0,24$ при $x = 120^\circ$.

44.15. $\tilde{y} = -3,924 + 1,306x$; $|\epsilon_{\max}| = 1,41$.

§ 45. Статистические методы контроля качества

45.1. Для однократной выборки $\alpha = 0,0323$; $\beta = 0,0190$; для двукратной выборки $\alpha = 0,0067$; $\beta = 0,0100$. Средний расход изделий для 100 партий при двукратной выборке $48,36 \cdot 15 + 51,64 \cdot 30 = 2275$ изделий. Расход для 100 партий при однократной выборке составляет 2200 изделий. Расход изделий почти одинаков, но при двукратной выборке значительно меньше вероятности ошибок α и β .

$A = 30,38$; $B = 0,01963$; $\lg A = 1,4825$; $\lg B = -1,7069$. Для хорошей партии при $p = 0$ $n_{\min} = 13$; $\lg \gamma(12; 0) = -1,6288$; $\lg \gamma(13; 0) = -1,7771$. Для негодной партии при $p = 1$ $n_{\min} = 2$; $\lg \gamma(1; 1) = 0,8451$; $\lg \gamma(2; 2) = 1,9590$.

45.2. Для однократной выборки $\alpha = 0,049$; $\beta = 0,009$; для двукратной выборки $\alpha = 0,046$; $\beta = 0,008$. $A = 19,8$; $B = 0,01053$; $h_1 = -3,758$; $h_2 = 2,424$; $h_3 = 0,02915$; $M[n|p_0] = 244,2$; $M[n|p_1] = 113,6$; $M[n]_{\max} = 321,9$. Для 100 партий при двукратной выборке средний расход изделий $35,1 \cdot 220 + 64,9 \cdot 440 = 36\,278$ изделий; при однократной выборке средний расход 41 000 изделий. При последовательном анализе на 100 хороших партий средний расход — не более 24 420 изделий.

45.3. Применим нормальный закон распределения: $\alpha = 0,0023$; $\beta = 0,0307$. $A = 415,9$; $B = 0,03077$; $h_1 = -4,295$; $h_2 = 7,439$; $h_3 = -0,1452$. Для хорошей партии при $p = 0$ $n_{\min} = 30$; для негодной партии при $p = 1$ $n_{\min} = 9$; $M[n|0,10] = 94,52$; $M[n|0,20] = 128,9$; $M[n]_{\max} = 257,4$; $c = 2,153$; $P(n < 300) = 0,9842$; $P(n < 150) = 0,8488$.

45.4. а) $n_0 = 285$; $v = 39$ (применим нормальный закон распределения); $A = 98$; $B = 0,0202$; $h_1 = -4,814$; $h_2 = 5,656$; $h_3 = 0,1452$; $M[n|p_0] = 102,1$; $M[n|p_1] = 101,0$; $M[n]_{\max} = 219,4$; б) $n_0 = 65$; $v = 8$; $A = 8$; $B = 0,2222$; $h_1 = -1,861$; $h_2 = 2,565$; $h_3 = 0,1452$; $M[n|p_0] = 21,6$; $M[n|p_1] = 38,6$; $M[n]_{\max} = 38,6$.

45.5. Применить переход от закона распределения Пуассона к χ^2 -распределению: $v = 9$; $n_0 = 180$; $A = 18$; $B = 0,1053$; $h_1 = -2,178$; $h_2 = 2,796$; $h_3 = 0,05123$; $M[n|p_0] = 90,86$; $M[n|p_1] = 79,82$; $M[n]_{\max} = 125,2$. Для хорошей партии при $p = 0$ $n_{\min} = 43$; для негодной партии при $p = 1$ $n_{\min} = 3$.

$$45.6. z_0 = \frac{z_{1-\alpha} z_{1-p_1} + z_{1-\beta} z_{1-p_0}}{z_{1-\alpha} + z_{1-\beta}}, n_0 = \left(1 + \frac{z_0^2}{2}\right) \left(\frac{z_{1-\alpha} + z_{1-\beta}}{z_{1-p_0} - z_{1-p_1}}\right)^2,$$

где z_p — квантили нормального распределения: $F(z_p) = 0,5 + 0,5\Phi(z_p) = p$; $z_{0,97} = 1,881$; $z_{0,92} = 1,405$; $z_{0,95} = 1,645$; $z_{0,90} = 1,282$; $z_0 = 1,613$; $n_0 = 87$. Объем однократной выборки при контроле по величине при тех же α , β , p_0 , p_1 значительно меньше, чем при контроле доли дефектных изделий.

45.7. При использовании биномиального закона распределения (с переходом к закону нормального распределения) $\alpha = 0,1403$; $\beta = 0,1776$; $n_0 = 49$; $v = 6$; $A = 5,864$; $B = 0,2065$; $h_1 = -1,945$; $h_2 = 2,182$; $h_3 = 0,1452$; $M[n|p_0] = 30,3$; $M[n|p_1] = 26,4$; $M[n]_{\max} = 34,2$. Средний расход изделий при двукратной выборке на 100 партий составляет $64,34 \cdot 30 + 35,66 \cdot 60 = 4070$ изделий. При однократной выборке на 100 партий расход изделий 4900 шт.; при последовательном анализе средний расход на 100 хороших партий — не более 3030 изделий. При использовании закона распределения Пуассона $\alpha = 0,1505$; $\beta = 0,2176$; $n_0 = 49$; $v = 6$ (переход к χ^2 -распределению).

45.8. Применить нормальный закон распределения: $n_0 = 286$; $v = 15$; $A = 9900$; $B = 0,01$; $h_1 = 3,529$; $h_2 = 7,052$; $h_3 = 0,04005$;

$M[n|0,02] = 176,0$; $M[n|0,07] = 231,9$; $M[n]_{\max} = 647,1$; $c = 3,608$;
 $P(n < M[n|0,02]) = 0,5993$; $P(n < 2M[n|0,02]) = 0,9476$; $P(n < n_0) = 0,8860$.

45.9. При $n_0 = 925$ $v = 12$. При $t_0 = 1000$ час. $A = -2,197$;
 $B = 2,197$; $t_1 = 237,6$; $t_2 = -237,6$; $t_3 = 74,99$; $M[T|10^{-5}] = 613,2$;
 $M[T|2 \cdot 10^{-5}] = 482,9$; $M[T]_{\max} = 750,6$.

t_0 , час.	500	1000	2000	5000
n_0	1849	925	463	185

45.10. Для метода однократной выборки применить переход от закона распределения Пуассона к χ^2 -распределению: $v = 6$; $n_0 = 122$; $A = 184$; $B = -0,08041$; $h_1 = -1,487$; $h_2 = 3,077$; $h_3 = -0,0503$. Для хорошей партии при $p = 0$ $n_{\min} = 30$; для негодной партии при $p = 1$ $n_{\min} = 4$. $M[n|0,02] = 48,3$; $M[n|0,10] = 54,6$;
 $M[n]_{\max} = 95,9$; $c = 5,286$; $P(n < n_0) = 0,982$; $P\left(n < \frac{1}{2} n_0\right) = 0,714$.

45.11. Для двукратной выборки $\alpha = 0,001486$; $\beta = 0,0009152$; для однократной выборки $n_0 = 62$; $v = 13$ (переход к закону нормального распределения); $A = 671,0$; $B = 0,0009166$; $h_1 = -4,446$; $h_2 = 4,043$; $h_3 = 0,2485$; $M[n|a_0] = 29,2$; $M[n|a_1] = 16,0$; $M[n]_{\max} = 70,7$. На 100 отсеков при двукратной выборке средний расход картофеля равен $62,88 \cdot 40 + 37,12 \cdot 60 = 4743$ шт. На 100 отсеков при однократной выборке расход картофеля 6200 шт.; при последовательном анализе средний расход на 100 хороших партий — не более 2920 шт.

45.12. Для двукратной выборки $\alpha = 0,0896$; $\beta = 0,0233$; для однократной выборки $n_0 = 15$; $v = 12,45$; $A = 10,90$; $B = 0,02560$; $h_1 = -977,7$; $h_2 = 637,2$; $h_3 = 184,9$; $M[n|\sigma_0] = 9,81$; $M[n|\sigma_1] = 2,78$; $M[n]_{\max} = 10$. При двукратной выборке средний расход изделий на 100 хороших партий $85,66 \cdot 13 + 14,44 \cdot 26 = 1488$; при однократной выборке расход изделий 1500 шт.; при последовательном анализе средний расход — не более 981 изделия.

45.13. При однократной выборке $\alpha = 0,0000884$; $\beta = 0,00621$; $B = 0,00621$; $A = 1124 \cdot 10$; $h_1 = 6,506$; $h_2 = -11,94$; $h_3 = 5,15$; $M[n|\xi_0] = 26,02$; $M[n|\xi_1] = 47,32$; $M[n]_{\max} = 121,4$; $c = 2,542$; $P(n \leq 300) > 0,99$ ($< 0,999$); $P(n \leq 150) = 0,9182$.

45.14. $n_0 = 86$; $v = 66,7$ часа; $A = 999$; $B = 0,001001$; $h_1 = 690,8$; $h_2 = -690,8$; $h_3 = 69,33$; $\lambda^* = 0,01442$; $M[n|\lambda_0] = 22,48$; $M[n|\lambda_1] = 35,67$; $M[n]_{\max} = 99,31$.

45.15. Для одиночного контроля доли ненадежных конденсаторов $n_0 = 246$. $v = 5$. Для последовательного контроля надежности конденсаторов $A = 9999$; $B = 0,0001$; $h_1 = 1152 \cdot 10^4$; $h_2 = -1152 \cdot 10^4$; $h_3 = 6384 \cdot 10^2$. $\lambda^* = 0,000001566$.

45.16. $t_n = 952,6$ часа; $v = 72,8$ часа; $\ln A = 2,197$; $\ln B = -2,197$;
 $t_1 = \frac{\ln AT_0 T_1}{T_1 - T_0} = 219,7$ часа; $t_2 = \frac{\ln BT_0 T_1}{T_1 - T_0} = -219,7$ часа; $t_3 =$
 $\frac{T_0 T_1 \ln \frac{T_1}{T_0}}{T_1 - T_0} = 69,3$ часа. Для худшей из хороших партий
 $(\tilde{T} = T_0 = 100)$ $t_{\min} = 715,7$ часа; для лучшей из плохих партий
 $(\tilde{T} = T_1 = 50)$ $t_{\min} = 569,2$ часа.

§ 46. Определение вероятностных характеристик случайных функций по опытным данным

46.1. Нужно доказать, что если $\tilde{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$, то $M[\tilde{x}] = \bar{x}$,

$\lim_{T \rightarrow \infty} D[\tilde{x}] = 0$. 46.2. Нет, так как $\lim_{T \rightarrow \infty} M[\tilde{S}_x(\omega)] = S_x(\omega)$,
но $D[\tilde{S}_x(\omega)] = S_x^2(\omega)$ и, следовательно, не стремится к нулю при

росте T . 46.3. $D[\tilde{K}_x(\tau)] = \frac{2}{(T-\tau)^2} \int_0^{T-\tau} (T-\tau-\tau_1) [K_x^2(\tau_1) +$
 $+ K_x(\tau_1 + \tau) K_x(\tau_1 - \tau)] d\tau_1$.

46.4. $M[\tilde{K}_1(\tau)] = K(\tau) - \frac{2}{(T-\tau)^2} \int_0^{T+\tau} (T-\tau-\tau_1) K(\tau_1) d\tau_1$;

$M[\tilde{K}_2(\tau)] = K(\tau) - \frac{2}{(T-\tau)^2} \int_0^{T-\tau} (T-\tau-\tau_1) K(\tau + \tau_1) d\tau_1$;

$D[\tilde{K}_1(\tau)] = \frac{2}{(T-\tau)^2} \int_0^{T-\tau} (T-\tau-\tau_1) [K^2(\tau_1) +$

$+ K(\tau_1 + \tau) K(\tau_1 - \tau)] d\tau_1 + \frac{8}{(T-\tau)^4} \left[\int_0^{T-\tau} (T-\tau-\tau_1) K(\tau_1) d\tau_1 \right]^2 -$

$- \frac{4}{(T-\tau)^3} \int_0^{T-\tau} \int_0^{T-\tau} \int_0^{T-\tau} K(t_3 - t_1) K(t_2 - t_1 - \tau) dt_1 dt_2 dt_3$;

$$\begin{aligned}
 D[\tilde{K}_2(\tau)] = & \frac{2}{(T-\tau)^2} \int_0^{T-\tau} (T-\tau-\tau_1) [K^2(\tau_1) + K(\tau_1+\tau)K(\tau_1-\tau) + \\
 & + K(\tau)K(\tau+\tau_1) + K(\tau)K(\tau_1-\tau)] d\tau_1 - \\
 & - \frac{2}{(T-\tau)^3} \int_0^{T-\tau} \int_0^{T-\tau} \int_0^{T-\tau} [K(t_2-t_1)K(t_3-t_1) + \\
 & + K(t_2-t_1+\tau)K(t_3-t_1-\tau)] dt_1 dt_2 dt_3 + \\
 & + \frac{2}{(T-\tau)^4} \left\{ \int_0^{T-\tau} (T-\tau-\tau_1) [K(\tau_1+\tau) + K(\tau_1-\tau)] d\tau_1 \right\}^2 + \\
 & + \frac{4}{(T-\tau)^4} \left\{ \int_0^{T-\tau} (T-\tau-\tau_1) K(\tau_1) d\tau_1 \right\}^2 - \\
 & - \frac{4}{(T-\tau)^4} \left\{ \int_0^{T-\tau} (T-\tau-\tau_1) K(\tau+\tau_1) d\tau_1 \right\}^2.
 \end{aligned}$$

46.5. $D[\tilde{x}] = \frac{2\sigma_x^2}{\alpha T} \left(1 - \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} \right).$

46.6. $D[\tilde{S}(\omega)] = \frac{1}{2\pi^2 T^2} \int_0^T (T-t) \left\{ \int_0^T [K(t+\eta) + \right.$
 $\left. + K(t-\eta)] \sin(T-\eta)\omega d\eta + \left| \int_{-T}^T e^{-i\tau\omega} K(t-\tau) d\tau \right|^2 \right\} dt.$

46.7. σ_y уменьшится на 2%. 46.8. τ_y уменьшится на 3%.

46.9. $D[\tilde{K}_\theta(0)] = 22 \text{ град}^4$; $D[\tilde{K}_\theta(3)] = 2.8 \text{ град}^4$. 46.10. Значение первого нуля функции $\tilde{K}(\tau)$ равно: а) 2,20 сек.; б) 2,30 сек.

46.11. $D[\tilde{K}_\theta(\tau)] = \frac{a^2}{2(T-\tau)} \left\{ \frac{2a^2 + \beta^2}{\alpha(a^2 + \beta^2)} + e^{-2a\tau} \left[2\tau \cos 2\beta\tau + \frac{1}{\beta} \sin 2\beta\tau + \frac{1}{\alpha} \cos 2\beta\tau + \frac{\alpha \cos 2\beta\tau - \beta \sin 2\beta\tau}{a^2 + \beta^2} \right] \right\}$; $D[\tilde{K}_\theta(0)] = 5.82 \text{ град}^4$; $D[\tilde{K}_\theta(2.09)] = 5.35 \text{ град}^4$; $D[\tilde{K}_\theta(4.18)] = 4.80 \text{ град}^4$; $D[\tilde{K}_\theta(16.72)] = 2.92 \text{ град}^4$, а соответствующие средние квадратические отклонения равны 2,41; 2,32; 2,19 и 1,71 град².

46.12. При росте t отношение t_1/t сходится по вероятности к вероятности P совпадения знаков ординат случайных функций $X(t)$

и $X(t + \tau)$, связанной для нормального процесса с нормированной корреляционной функцией $k(\tau)$ соотношением $k(\tau) = \cos \pi(1 - P)$, которое может быть доказано путем интегрирования двумерного нормального закона распределения ординат случайной функции в соответствующих пределах.

46.13. Обозначая $Z(t) = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{X(t)X(t+\tau)}{|X(t)X(t+\tau)|} \right]$, P — вероятность совпадения знаков $X(t)$ и $X(t+\tau)$, имеем $\bar{z} = P$; $\tilde{k}_x(\tau) = \cos \pi(1 - \tilde{z}) \approx \cos \pi(1 - \bar{z}) + \pi(\tilde{z} - \bar{z}) \sin \pi(1 - \bar{z})$. Следовательно, $D[\tilde{k}(\tau)] \approx \pi^2 D[\tilde{z}] \sin^2 \pi(1 - P) = \pi^2 [1 - k_x^2(\tau)] D[\tilde{z}]$;

$$D[\tilde{z}] = \frac{2}{T^2} \int_0^T (T - \tau_1) K_2(\tau_1) d\tau_1;$$

$$K_2(\tau) = \left\{ \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty + \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 + \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 \int_0^\infty \int_0^\infty + \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 \int_0^\infty \int_0^\infty \right\} f(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 - \bar{z}^2, \quad \text{где}$$

$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ — закон распределения системы нормальных величин $X(t_1), X(t_1 + \tau), X(t_2), X(t_2 + \tau)$.

46.14. $\tilde{K}_x(\tau) = g_1 \tilde{K}_1(\tau) + g_2 \tilde{K}_2(\tau) + g_3 \tilde{K}_3(\tau)$, где приближенно

$$g_j = \frac{\frac{1}{\sigma_j^2}}{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + \frac{1}{\sigma_3^2}} \quad (j = 1, 2, 3); \quad \sigma_j^2 = \frac{2}{T_j^2} \int_0^{T_j} (T_j - \tau) \tilde{K}_j(\tau) d\tau.$$

При T_j , значительно превосходящих время затухания $K_x(\tau)$, приближенно можно считать $\sigma_j^2 = \frac{2}{T_j} \left(a - \frac{b}{T_j} \right)$, где $a = \int_0^\infty \tilde{K}(\tau) d\tau$,

$b = \int_0^\infty \tau \tilde{K}(\tau) d\tau$, а за значение $\tilde{K}(\tau)$ можно принять подходящее значение, полученное по любой из реализаций.

$$46.15. D[\tilde{K}_x(\tau)] = \frac{2}{(m-l)^2} \sum_{s=1}^{m-l-1} [\tilde{K}_x^2(s\Delta) + \tilde{K}_x(s\Delta + l\Delta) \times \\ \times \tilde{K}_x(s\Delta - l\Delta)] (m-l-s) + \frac{1}{m-l} [\tilde{K}_x^2(0) + \tilde{K}_x^2(l\Delta)].$$

46.16. На 9%.

$$46.17. \alpha_0 = \frac{1}{T} \int_0^T K_x(\tau) d\tau; \quad \alpha_j = \frac{2}{T} \int_0^T K_x(\tau) \cos \frac{2\pi j\tau}{T} d\tau, \quad j > 0;$$

$$\Delta_{\text{онт}} = \int_0^T K_x^2(\tau) d\tau - T\alpha_0^2 - \frac{T}{2} \sum_{j=1}^m \alpha_j^2.$$

46.18. Так как

$$\tilde{j} = \frac{1}{T} \int_0^T j(t) dt, \quad \text{то } D[\tilde{j}] = \frac{2a}{\alpha T} \left[1 - \frac{1}{\alpha T} (1 - e^{-\alpha T}) \right] = \\ = \sigma_j^2 = (0,86 \cdot 10^{-8})^2 A^2.$$

Средняя ошибка $E_{\tilde{j}} = \rho \sqrt{2} \sigma_{\tilde{j}} = 0,58 \cdot 10^{-8} A$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ТАБЛИЦЫ

Таблица I

Закон распределения Пуассона $P(m, \lambda) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$

$m \backslash \lambda$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812
1	090484	163746	222245	268128	303265	329287
2	004524	016375	033337	053626	075816	098786
3	000151	001092	003334	007150	012636	019757
4	000004	000055	000250	000715	001580	002964
5		000002	000015	000057	000158	000356
6			000001	000004	000013	000036
7					000001	000003
$m \backslash \lambda$	0,7	0,8	0,9	1,0	2	3
0	0,496585	0,449329	0,406570	0,367879	0,135335	0,049787
1	347610	359463	365913	367879	270671	149361
2	121663	143785	164661	183940	270671	224042
3	028388	038343	049398	061313	180447	224042
4	004968	007669	011115	015328	090224	168031
5	000696	001227	002001	003066	036089	100819
6	000081	000164	000300	000511	012030	050409
7	000008	000019	000039	000073	003437	021604
8	000001	000002	000004	000009	000859	008102
9				000001	000191	002701
10					000038	000810

Продолжение табл. I

$m \backslash \lambda$	0,7	0,8	0,9	1,0	2	3
11					0,000007	0,000221
12					000001	000055
13						000013
14						000003
15						000001
$m \backslash \lambda$	4	5	6	7	8	9
0	0,018316	0,006738	0,002479	0,000912	0,000335	0,000123
1	073263	033690	014873	006383	002684	001111
2	146525	084224	044618	022341	010735	004998
3	195367	140374	089235	052129	028626	014994
4	195367	175467	133853	091226	057252	033737
5	156293	175467	160623	127717	091604	060727
6	104196	146223	160623	149003	122138	091090
7	059540	104445	137677	149003	139587	117116
8	029770	065278	103258	130377	139587	131756
9	013231	036266	068838	101405	124077	131756
10	005292	018138	041303	070983	099262	118580
11	001925	008242	022529	045171	072190	097020
12	000642	003434	011264	026350	048127	072765
13	000197	001321	005199	014188	029616	050376
14	000056	000472	002228	007094	016924	032384
15	000015	000157	000891	003311	009026	019431
16	000004	000049	000334	001448	004513	010930
17	000001	000014	000118	000596	002124	005786
18		000004	000039	000232	000944	002893
19		000001	000012	000085	000397	001370
20			000004	000030	000159	000617
21			000001	000010	000061	000264
22				000003	000022	000108
23				000001	000008	000042
24					000003	000016
25					000001	000006
26						000002
27						000001

Таблица II

Суммарные вероятности для распределения Пуассона

$$Q(m; \lambda) = \sum_{v=m}^{\infty} \frac{\lambda^v}{v!} e^{-\lambda}.$$

$m \backslash \lambda$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
0	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
1	0,09516	0,18127	0,25918	0,32968	0,39347	0,45119	0,50341
2	00468	01752	03694	06155	09020	12190	15580
3	00016	00115	00360	00793	01439	02312	03414
4	0	00006	00027	00078	00175	00336	00575
5		0	00002	00006	00017	00039	00079
6					00001	00004	00009
7							00001
$m \backslash \lambda$	0,8	0,9	1,0	2,0	4,0	6,0	8,0
0	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
1	0,55067	0,59343	0,63212	0,86466	0,98168	0,99752	0,99966
2	19121	22752	26424	59399	90842	98265	99698
3	04742	06286	08030	32332	76190	93803	98625
4	00908	01346	01899	14288	56653	84880	95762
5	00141	00234	00366	05265	37116	71494	90037
6	00018	00034	00059	01656	21487	55432	80876
7	00002	00004	00008	00453	11067	39370	68663
8		00001	00002	00110	05113	25602	54704
9				00024	02136	15276	40745
10				00005	00813	08392	28338
11				00001	00284	04262	18411
12					00092	02009	11192
13					00027	00883	06380
14					00008	00363	03418
15					00002	00140	01726
16					00001	00051	00823
17						00017	00372
18						00006	00159
19						00002	00065
20						00001	00025
21							00009
22							00003
23							00001
24							

Таблица III

$$\text{Функция Лапласа } \Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

z	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,	0	797	1585	2358	3108	3829	4515	5161	5763	6319
1,	6827	7287	7699	8064	8385	8664	8904	9109	9231	9426
2,	9545	9643	9722	9786	9836	9876	9907	9931	9949	9963
3,	9973	9981	9986	9990	9993	9995	9997	9998	9999	9999

В таблице приведены значения $\Phi(z) \cdot 10^4$. В первом столбце указаны целые, а в верхней строке — десятые доли аргумента z .

Приведем также некоторые значения z , отвечающие круглым значениям функции $\Phi(z)$.

$\Phi(z)$	0,80	0,90	0,95	0,99	0,999
z	1,2816	1,6449	1,9600	2,5758	3,2905

Таблица IV

Приведенная функция Лапласа

$$\hat{\Phi}(z) = \frac{2\rho}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\rho^2 x^2} dx = \Phi(z\rho\sqrt{2}).$$

z	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,	0	538	1073	1603	2127	2641	3143	3632	4105	4562
1,	5000	5419	5817	6194	6550	6883	7195	7485	7753	8000
2,	8227	8433	8622	8792	8945	9082	9205	9314	9410	9495
3,	9570	9635	9691	9740	9782	9818	9848	9874	9896	9915
4,	9930	9943	9954	9963	9970	9976	9981	9985	9988	9990
5,	9992	9994	9995	9996	9997	9998	9998	9999	9999	9999

В таблице приведены значения $\hat{\Phi}(z) \cdot 10^4$. В первом столбце указаны целые, а в верхней строке — десятые доли аргумента z .

Таблица V

Плотность вероятности для закона нормального распределения

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

z	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,	3989	3970	3910	3814	3683	3521	3332	3123	2897	2661
1,	2420	2179	1942	1714	1497	1295	1109	940	790	656
2,	540	440	355	283	224	175	136	104	79	60
3,	44	33	24	17	12	9	6	4	3	2

В таблице приведены значения $\varphi(z) \cdot 10^4$. В первом столбце указаны целые, а в верхней строке — десятые доли аргумента z .

Таблица VI

Закон распределения Стьюдента

$$P(t; k) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{k\pi}} \int_{-\infty}^t \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} dx.$$

k \ t	1	2	3	4	6	8	10	12	14	16	18	∞
0,0	500	500	500	500	500	500	500	500	500	500	500	500,00
0,1	532	535	537	537	538	539	539	539	539	539	539	539,83
0,2	563	570	573	574	576	577	577	578	578	578	578	579,26
0,3	593	604	608	610	613	614	615	615	616	616	616	617,91
0,4	621	636	642	645	648	650	651	652	652	653	653	655,42
0,5	648	667	674	678	683	685	686	687	688	688	688	691,46
0,6	672	695	705	710	715	717	719	720	721	722	722	725,75
0,7	694	722	733	739	745	748	750	751	752	753	754	758,04
0,8	715	746	759	766	773	777	779	780	781	782	783	788,14
0,9	733	768	783	790	799	803	805	807	808	809	810	815,94
1,0	750	789	804	813	822	827	830	832	833	834	835	841,34
1,2	779	823	842	852	862	868	871	873	875	876	877	884,93
1,4	803	852	872	883	894	900	904	907	908	910	911	919,24
1,6	822	875	896	908	920	926	930	932	934	935	936	945,20
1,8	839	893	915	927	939	945	949	951	953	955	956	964,07
2,0	852	908	930	942	954	960	963	966	967	969	970	977,25
2,4	874	931	952	963	973	978	981	983	985	986	986	991,80
2,8	891	946	966	976	984	988	991	992	993	994	994	997,44
3,2	904	957	975	984	991	993	995	996	997	997	997	999,31
3,6	914	965	982	989	993	996	998	998	999	999	999	999,84
4,0	922	971	986	992	996	998	999	999	999	999	999	999,97

В таблице приведены значения $P(t; k) \cdot 10^3$.

Таблица VII

Закон распределения χ^2 :

$$P(\chi^2 \geq \chi_q^2) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) 2^{\frac{k}{2}}} \int_{\chi_q^2}^{\infty} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$\chi_q^2 \backslash k$	2	4	6	8	10	12	15	20	25
1	6065	9098	9856	9982	9998	10 000	10 000	10 000	10 000
2	3679	7358	9197	9810	9963	9 994	10 000	10 000	10 000
3	2231	5578	8088	9344	9814	9 955	9 996	10 000	10 000
4	1353	4060	6767	8571	9474	9 834	9 977	10 000	10 000
5	821	2873	5438	7576	8912	9 580	9 921	9 997	10 000
6	498	1992	4232	6472	8153	9 161	9 798	9 989	10 000
7	302	1359	3208	5366	7254	8 576	9 576	9 967	9 998
8	183	916	2381	4335	6288	7 851	9 238	9 919	9 995
9	111	611	1736	3423	5321	7 029	8 775	9 829	9 986
10	67	404	1246	2650	4405	6 160	8 197	9 682	9 966
12	25	174	620	1512	2851	4 457	6 790	9 161	9 866
14	9	73	296	818	1730	3 007	5 255	8 305	9 617
16	3	30	138	424	996	1 912	3 821	7 166	9 148
18	1	12	62	212	550	1 157	2 627	5 874	8 424
20	0	5	28	103	292	671	1 719	4 579	7 468
25		1	3	16	54	148	499	2 014	4 624
30		0	0	2	9	28	119	698	2 243

В таблице приведены значения $P(\chi^2 \geq \chi_q^2) \cdot 10^4$.

Таблица VIII

Значения γ для доверительного интервала $-\gamma < t < \gamma$, где величина t имеет распределение Стьюдента, нижняя γ_1 и верхняя γ_2 границы доверительного интервала для среднего квадратического отклонения σ : $\gamma_1 \bar{\sigma} < \sigma < \gamma_2 \bar{\sigma}$ в зависимости от доверительной вероятности α и числа степеней свободы k

$\alpha \backslash k$	γ			γ_1			γ_2		
	0,90	0,95	0,99	0,90	0,95	0,99	0,90	0,95	0,99
1	6,31	12,71	63,7	0,510	0,446	0,356	15,9	31,9	159
2	2,92	4,30	9,92	0,578	0,521	0,434	4,40	6,28	14,1
3	2,35	3,18	5,84	0,620	0,566	0,483	2,92	3,73	6,47
4	2,13	2,77	4,60	0,649	0,599	0,519	2,37	2,87	4,39
5	2,02	2,57	4,03	0,672	0,624	0,546	2,09	2,45	3,48
6	1,943	2,45	3,71	0,690	0,644	0,569	1,916	2,20	2,98
7	1,895	2,36	3,50	0,705	0,661	0,588	1,797	2,04	2,66
8	1,860	2,31	3,36	0,718	0,675	0,604	1,711	1,916	2,44
9	1,833	2,26	3,25	0,729	0,688	0,618	1,645	1,826	2,28
10	1,812	2,23	3,17	0,739	0,699	0,630	1,593	1,755	2,15
11	1,796	2,20	3,11	0,748	0,708	0,641	1,550	1,698	2,06
12	1,782	2,18	3,06	0,755	0,717	0,651	1,515	1,651	1,976
13	1,771	2,16	3,01	0,762	0,725	0,660	1,485	1,611	1,910
14	1,761	2,14	2,98	0,769	0,732	0,669	1,460	1,577	1,854
15	1,753	2,13	2,95	0,775	0,739	0,676	1,437	1,548	1,806
16	1,746	2,12	2,92	0,780	0,745	0,683	1,418	1,522	1,764
17	1,740	2,11	2,90	0,785	0,750	0,690	1,400	1,499	1,727
18	1,734	2,10	2,88	0,790	0,756	0,696	1,385	1,479	1,695
19	1,729	2,09	2,86	0,794	0,760	0,702	1,370	1,460	1,666
20	1,725	2,08	2,84	0,798	0,765	0,707	1,358	1,444	1,640
22	1,717	2,07	2,82	0,805	0,773	0,717	1,335	1,416	1,595
24	1,711	2,06	2,80	0,812	0,781	0,726	1,316	1,391	1,558
26	1,706	2,06	2,78	0,818	0,788	0,734	1,300	1,371	1,526
28	1,701	2,05	2,76	0,823	0,794	0,741	1,286	1,352	1,499
30	1,697	2,04	2,75	0,828	0,799	0,748	1,274	1,337	1,475
40	1,684	2,02	2,70	0,847	0,821	0,774	1,228	1,279	1,390
60	1,671	2,00	2,66	0,871	0,849	0,808	1,179	1,217	1,299
120	1,658	1,98	2,62	0,925	0,912	0,887	1,106	1,110	1,150
∞	1,645	1,96	2,58	—	—	—	—	—	—

Таблица IX

Вероятности того, что относительная ошибка в среднем квадратическом отклонении не превзойдет данной величины q :

$$P\left(\frac{\sqrt{k}}{1+q} < \chi < \frac{\sqrt{k}}{1-q}\right)$$

$q \backslash k$	0,01	0,02	0,06	0,10	0,15	0,20	0,25
1	10	19	58	97	145	193	241
2	15	29	88	147	219	290	358
4	22	43	129	214	317	414	504
6	27	54	160	264	388	501	599
8	31	62	186	305	444	567	669
10	35	70	208	340	491	620	722
15	44	86	254	412	583	717	812
20	50	100	293	470	652	784	868
30	61	122	356	559	749	867	930
40	72	142	408	628	815	913	957

В таблице приведены значения $P\left(\frac{\sqrt{k}}{1+q} < \chi < \frac{\sqrt{k}}{1-q}\right) \cdot 10^3$

Таблица X

Критические значения λ_α для распределения Колмогорова

α	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
λ_α	0,828	0,895	0,974	1,073	1,224	1,358	1,520	1,627	1,950

Таблица XI

Ортогональные полиномы Чебышева $P_{k;n}(x_i)$

$n \backslash x_i$	k	1	2	3	4	5
5 (6 точек)	0	5	5	5	1	1
	1	3	-1	-7	-3	-5
	2	1	-4	-4	2	10
	3	-1	-4	4	2	-10
	4	-3	-1	7	-3	5
	5	-5	5	-5	1	-1
S_k		70	84	180	28	252
7 (8 точек)	0	7	7	7	7	7
	1	5	1	-5	-13	-23
	2	3	-3	-7	-3	17
	3	1	-5	-3	9	15
	4	-1	-5	3	9	-15
	5	-3	-3	7	-3	-17
	6	-5	1	5	-13	23
	7	-7	7	-7	7	-7
S_k		168	168	264	616	2184
9 (10 точек)	0	9	6	42	18	6
	1	7	2	-14	-22	-14
	2	5	-1	-35	-17	1
	3	3	-3	-31	3	11
	4	1	-4	-12	18	6
	5	-1	-4	-12	18	-6
	6	-3	-3	31	3	-11
	7	-5	-1	35	-17	-1
	8	-7	2	14	-22	14
	9	-9	6	-42	18	-6
S_k		330	132	8580	2860	780

Продолжение табл. XI

n	$x_i \backslash k$	1	2	3	4	5
11 (12 точек)	0	11	55	33	33	33
	1	9	25	-3	-27	-57
	2	7	1	-21	-33	-21
	3	5	-17	-25	-13	29
	4	3	-29	-19	12	44
	5	1	-35	-7	28	20
	6	-1	-35	7	28	-20
	7	-3	-29	19	12	-44
	8	-5	-17	25	-13	-29
	9	-7	1	21	-33	21
	10	-9	25	3	-27	57
11	-11	55	-33	33	-33	
S_k		572	12012	5148	8008	15912
12 (13 точек)	0	6	22	11	99	22
	1	5	11	0	-66	-33
	2	4	2	-6	-96	-18
	3	3	-5	-8	-54	11
	4	2	-10	-7	11	26
	5	1	-13	-4	64	20
	6	0	-14	0	84	0
	7	-1	-13	4	64	-20
	8	-2	-10	7	11	-26
	9	-3	-5	8	-54	-11
	10	-4	2	6	-96	18
	11	-5	11	0	-66	33
12	-6	22	-11	99	-22	
S_k		182	2002	572	68068	6188

Продолжение табл. XI

n	$x_i \backslash k$	1	2	3	4	5
13 (14 точек)	0	13	13	143	143	143
	1	11	7	11	-77	-187
	2	9	2	-66	-132	-132
	3	7	-2	-98	-92	28
	4	5	-5	-95	-13	139
	5	3	-7	-67	63	145
	6	1	-8	-24	108	60
	7	-1	-8	24	108	-60
	8	-3	-7	67	63	-145
	9	-5	-5	95	-13	-139
	10	-7	-2	98	-92	-28
	11	-9	2	66	-132	132
	12	-11	7	-11	-77	187
13	-13	13	-143	143	-143	
S_k		910	728	97240	136136	235144
16 (17 точек)	0	8	40	28	52	104
	1	7	25	7	-13	-91
	2	6	12	-7	-39	-104
	3	5	1	-15	-39	-39
	4	4	-8	-18	-24	36
	5	3	-15	-17	-3	83
	6	2	-20	-13	17	88
	7	1	-23	-7	31	55
	8	0	-24	0	36	0
	9	-1	-23	7	31	-55
	10	-2	-20	13	17	-88
	11	-3	-15	17	-3	-83
	12	-4	8	18	-24	-36
	13	-5	1	15	-39	39
	14	-6	12	7	-39	104
	15	-7	25	-7	-13	91
16	-8	40	-28	52	-104	
S_k		408	7752	3876	16756	100776

ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ТАБЛИЦЫ СО ССЫЛКАМИ НА ЛИТЕРАТУРУ

1Т. Биномиальные коэффициенты C_n^m : [10] — стр. 393; [23] — стр. 564—567; [33] — стр. 265.

2Т. Факториалы $n!$ или логарифмы факториалов $\lg n!$: [2] — стр. 2, 3; [5] — стр. 350—353; [6] — стр. 42; [10] — стр. 394; [23] — стр. 568, 569; [41] — стр. 393; [45] — стр. 311.

3Т. Степени некоторых десятичных дробей Q^x : [23] — стр. 571, 572.

4Т. Биномиальная функция распределения $P(d < m + 1) = P(d \leq m) = \sum_{k=0}^m C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$: [23] — стр. 573—578.

5Т. Значения гамма-функции $\Gamma(x)$ или логарифмов гамма-функции $\lg \Gamma(x)$: [5] — стр. 353; [6] — стр. 75; [33] — стр. 284; [41] — стр. 353—391; [51] — стр. 528; [56] — стр. 115.

6Т. Вероятности $P(m, a) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$ для закона распределения Пуассона: [5] — стр. 357, 358; [10] — стр. 395; [13] — стр. 385, 386; [21] — стр. 492—494; [52] — стр. 343; [57] — стр. 195—204.

7Т. Суммарные вероятности $P(k \geq m) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{a^k}{k!} e^{-a}$ для закона распределения Пуассона: [5] — стр. 359, 360; [13] — стр. 387, 388; [21] — стр. 495—497; [57] — стр. 205—214.

8Т. Функция Лапласа (интеграл вероятностей) при аргументе, выраженном в средних квадратических отклонениях $\Phi(z) =$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx: [1] — стр. 226; [4] — стр. 410, 411; [6] — стр. 81,$$

82; [10] — стр. 396; [12] — стр. 215, 216; [14] — стр. 144; [20] — стр. 415—417; [21] — стр. 501; [25] — стр. 608; [29] — стр. 367—369; [34] — стр. 366; [38] — стр. 154, 155; [45] — стр. 288—290; [51] — стр. 494—496; [52] — стр. 344.

В некоторых книгах приведена таблица $\frac{1}{2}\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx$:

[13] — стр. 384; [17] — стр. 352—354; [20] — стр. 415—417; [21] — стр. 499, 500; [23] — стр. 584; [42] — стр. 400.

9Т. Плотность вероятности нормального закона $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$

при аргументе, выраженном в средних квадратических отклонениях: [1] — стр. 226; [5] — стр. 354—356; [9] — стр. 555; [10] — стр. 398, 399; [13] — стр. 383; [17] — стр. 352—354; [20] — стр. 414; [21] — стр. 498, 499; [23] — стр. 584; [29] — стр. 370; [42] — стр. 39; [45] — стр. 281; [51] — стр. 497—507; [52] — стр. 342; [53] — стр. 733; [57] — стр. 112.

10Т. Производные от плотности вероятности нормального закона $\varphi(x)$: $\varphi_2(x) = \varphi''(x) = (x^2 - 1)\varphi(x)$; $\varphi_3(x) = \varphi'''(x) = -(x^3 - 3x)\varphi(x)$: [10] — стр. 400, 401; [51] — стр. 497—507.

11Т. Приведенная функция Лапласа при аргументе, выраженном в средних отклонениях, $\hat{\Phi}(z) = \frac{2\rho}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\rho^2 x^2} dx$: [9] — стр. 552—554; [10] — стр. 397, 398; [16] — стр. 421—426; [45] — стр. 296—301.

12Т. Плотность вероятности нормального закона при аргументе, выраженном в средних отклонениях, $\hat{\varphi}(z) = \frac{\rho}{\sqrt{\pi}} e^{-\rho^2 z^2}$: [10] — стр. 402, 403; [45] — стр. 291—295.

13Т. Функция $p(z) = \frac{2\rho}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\rho^2 x^2} dx - 2z \frac{\rho}{\sqrt{\pi}} e^{-\rho^2 z^2} =$

$= \hat{\Phi}(z) - 2z\hat{\varphi}(z)$: [10] — стр. 415; [45] — стр. 316.

14Т. Функция распределения Стьюдента $P(T < t) =$
 $= \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \sqrt{k\pi}} \int_0^t \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} dx$: [10] — стр. 404; [13] — стр. 393, 394; [21] — стр. 516, 517; [53] — стр. 736, 737; [57] — стр. 121, 122.

15Т. Вероятности $\Phi_1(t_\alpha, k) = P(|T| < t_\alpha) = 2P(T < t_\alpha) - 1$ для закона распределения Стьюдента: [51] — стр. 508.

16Т. Значения γ , отвечающие доверительной вероятности $\alpha = P(|T| < \gamma)$ и числу степеней свободы k , для закона распределения Стьюдента: [1] — стр. 227; [9] — стр. 556, 557; [10] — стр. 406, 407; [20] — стр. 424; [21] — стр. 520 ($q_t = (1 - \alpha) \cdot 100$); [23] — стр. 587; [25] — стр. 611; [28] — стр. 344; [45] — стр. 306, 307; [51] — стр. 508.

17Т. Вероятности $P(\chi^2 \geq \chi_q^2) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) 2^{\frac{k}{2}} \chi_q^2} \int_{\chi_q^2}^{\infty} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx$ для

закона χ^2 -распределения в зависимости от χ_q^2 и числа степеней

свободы k : [10]—стр. 408—410; [13]—стр. 389—392; [21]—стр. 505—507; [34]—стр. 370—373; [45]—стр. 302, 303; [57]—стр. 113, 114.

18Т. Значения χ_q^2 в зависимости от вероятности $P(\chi^2 \geq \chi_q^2)$ и числа степеней свободы k для закона χ^2 -распределения: [5]—стр. 361, 362; [9]—стр. 558 ($r=k$); [21]—стр. 503—505; [23]—стр. 588, 589; [25]—стр. 610; [34]—стр. 368, 369; [42]—стр. 403, 404; [46]—стр. 328; [51]—стр. 517—519 ($p=1-\alpha$); [53]—стр. 735; [57]—стр. 115—118.

19Т. Нижняя γ_1 и верхняя γ_2 границы доверительного интервала для среднего квадратического отклонения σ в зависимости от доверительной вероятности α и числа степеней свободы k для закона χ^2 -распределения: [10]—стр. 411; [21]—стр. 515; [28]—стр. 346; [42]—стр. 405.

20Т. Вероятности $L(q, k) = P\left(\frac{\sqrt{k}}{1+q} < \chi < \frac{\sqrt{k}}{1-q}\right)$ для закона χ -распределения: [10]—стр. 412, 413; [20]—стр. 425; [45]—стр. 308, 309.

21Т. Плотность вероятности для χ -распределения $f(y, k) = \frac{y^{k-1} e^{-\frac{y^2}{2}}}{2^{\frac{k-2}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$: [51]—стр. 511, 512.

22Т. Вероятности $P(y \leq q\sqrt{k})$ для величины y , подчиненной закону χ -распределения, $P(y \leq q\sqrt{k}) = \frac{1}{2^{\frac{k-2}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int_0^{q\sqrt{k}} y^{k-1} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$:

[51]—стр. 508—510.

23Т. Функция распределения Рэля $P(X < x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$: [51]—стр. 507.

24Т. Функция $p(x) = 1 - e^{-\beta^2 x^2}$: [10]—стр. 415; [45]—стр. 315.

25Т. Вероятности $P(D\sqrt{n} \geq \lambda) = P(\lambda) = 1 - K(\lambda)$, $K(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 \lambda^2}$, для закона распределения Колмогорова: [1]—стр. 241, 242 ($K(\lambda)$); [10]—стр. 414; [13]—стр. 395, 396 ($K(\lambda)$); [20]—стр. 426; [21]—стр. 539—540 ($K(\lambda)$); [34]—стр. 380; [57]—стр. 421.

26Т. Значения y (p -квантили) в зависимости от параметра c и функции распределения Вальда

$$p = W_c(y) = \sqrt{\frac{c}{2\pi}} \int_0^y y^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{c}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right)} dy;$$

ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ТАБЛИЦЫ СО ССЫЛКАМИ НА ЛИТЕРАТУРУ 629

27Т. Таблицы случайных чисел: [20]—стр. 426; [22]; [23]—стр. 579; [34]—стр. 386, 387; [51]—стр. 528—530; [57]—стр. 231—234.

28Т. Функция $\eta(p) = -p \log_2 p$: [9]—стр. 560; [10]—стр. 415; [54]—стр. 305—308.

29Т. Ортогональные полиномы Чебышева

$$P_{k,n}(x) = \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j C_{k+j}^j \frac{x(x-1) \dots (x-j+1)}{n(n-1) \dots (n-j+1)};$$

[10]—стр. 416—419; [33]—стр. 274—282.

30Т. Двусторонние доверительные пределы для оценки вероятности по частоте при биномиальном законе распределения: [21]—стр. 520—529.

31Т. Значения $z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}$: [21]—стр. 550.

32Т. Соотношения между параметрами b_m , v_m и m для закона распределения Вейбулла: [51]—стр. 50.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арлей Н. и Бух К., Введение в теорию вероятностей и математическую статистику, ИЛ, 1951.
2. Барлоу П., Таблицы квадратов, кубов, квадратных корней, кубических корней и обратных величин, ИЛ, 1950.
3. Башаринов А. Е. и Флейшман Б. С., Методы статистического последовательного анализа и их приложения, «Советское радио», 1962.
4. Бернштейн С. Н., Теория вероятностей, Гостехиздат, 1946.
5. Боев Г. П., Теория вероятностей, Гостехиздат, 1956.
6. Бронштейн И. Н. и Семендяев К. А., Справочник по математике, Физматгиз, 1959.
7. Бунимович В. И., Флуктуационные процессы в радио-приемных устройствах, «Советское радио», 1951.
8. Вальд А., Последовательный анализ, Физматгиз, 1960.
9. Вентцель Е. С., Теория вероятностей, Изд-во «Наука», 1964.
10. Володин Б. Г., Ганин М. П., Динер И. Я., Комаров Л. Б., Свешников А. А., Старобин К. Б., Руководство для инженеров по решению задач теории вероятностей, Судпромгиз, 1962.
11. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, Гостехиздат, 1953.
12. Гливенко В. И., Курс теории вероятностей, ГОНТИ, 1939.
13. Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, Физматгиз, 1961.
14. Гнеденко Б. В. и Хинчин А. Я., Элементарное введение в теорию вероятностей, Физматгиз, 1961.
15. Голдман С., Теория информации, ИЛ, 1957.
16. Гончаров В. Л., Теория вероятностей, Оборонгиз, 1939.
17. Гутер Р. С. и Овчинский Б. В., Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта, Физматгиз, 1962.
18. Гюнтер Н. М. и Кузьмин Р. О., Сборник задач по высшей математике, ч. III, Гостехиздат, 1951.
19. Девенпорт В. Б. и Рут В. Л., Введение в теорию случайных сигналов и шумов, ИЛ, 1960.
20. Длин А. М., Математическая статистика в технике, «Советская наука», 1958.
21. Дуннин-Барковский И. В. и Смирнов Н. В., Теория вероятностей и математическая статистика в технике (общая часть), Гостехиздат, 1955.

22. Кадыров М., Таблицы случайных чисел, Ташкент, 1936.
23. Коуден Д., Статистические методы контроля качества, Физматгиз, 1961.
24. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М., Основные дифференциальные уравнения математической физики, Физматгиз, 1962.
25. Крамер Г., Математические методы статистики, ИЛ, 1948.
26. Крылов А. Н., Лекции о приближенных вычислениях, Гостехиздат, 1954.
27. Левин Б. Р., Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике, «Советское радио», 1957.
28. Линник Ю. В., Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений, Физматгиз, 1962.
29. Лукомский Я. И., Теория корреляции и ее применение к анализу производства, Госстатиздат, 1961.
30. Лэннинг Д. Х. и Бэттин Р. Г., Случайные процессы в задачах автоматического регулирования, ИЛ, 1958.
31. Месяцев П. П., Применение теории вероятностей и математической статистики при конструировании и производстве радиоаппаратуры, Воениздат, 1958.
32. Миддлтон Д., Введение в статистическую теорию связи, «Советское радио», т. 1, 1961, т. 2, 1962.
33. Мили В. Э., Численный анализ, ИЛ, 1951.
34. Налимов В. В., Применение математической статистики при анализе вещества, Физматгиз, 1960.
35. Пугачев В. С., Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, Физматгиз, 1960.
36. Романовский В. И., Дискретные цепи Маркова, Гостехиздат, 1949.
37. Романовский В. И., Математическая статистика, ГОНТИ, 1938.
38. Румшиский Л. З., Элементы теории вероятностей, Физматгиз, 1960.
39. Сарымсаков Т. А., Основы теории процессов Маркова, Гостехиздат, 1954.
40. Свешников А. А., Прикладные методы теории случайных функций, Судпромгиз, 1961.
41. Сегал Б. И. и Семендяев К. А., Пятизначные математические таблицы, Физматгиз, 1962.
42. Смирнов Н. В. и Дунин-Барковский И. В., Краткий курс математической статистики, Физматгиз, 1959.
43. Солодовников В. В., Введение в статистическую динамику систем автоматического управления, Гостехиздат, 1952.
44. Стратонович Р. Л., Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, «Советское радио», 1961.
45. Унковский В. А., Теория вероятностей, Военмориздат, 1953.
46. Уорсинг А. и Геффнер Д., Методы обработки экспериментальных данных, ИЛ, 1953.
47. Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, ИЛ, 1955.

48. Хальд А., Математическая статистика с техническими приложениями, ИЛ, 1956.
49. Хинчин А. Я., Работы по математической теории массового обслуживания, Физматгиз, 1963.
50. Шерстобитов В. В. и Динер И. Я., Сборник задач по стрельбе зенитной артиллерии, Воениздат, 1948.
51. Шор Я. Б., Статистические методы анализа и контроля качества и надежности, «Советское радио», 1962.
52. Шнголев Б. М., Математическая обработка наблюдений, Физматгиз, 1962.
53. Юл Дж. Э. и Кендел М. Дж., Теория статистики, Гостехиздат, 1960.
54. Яглом А. М. и Яглом И. М., Вероятность и информация, Физматгиз, 1960.
55. Яглом А. М. и Яглом И. М., Неэлементарные задачи в элементарном изложении, Гостехиздат, 1954.
56. Янке Е. и Эмде Ф., Таблицы функций с формулами и кривыми, Гостехиздат, 1948.
57. Янко Я., Математико-статистические таблицы, Госстатиздат, 1961.
58. Bachelier L., Calcul des probabilités, Paris, 1942.
59. Bertrand I., Calcul des probabilités, Paris, 1897.
60. Borel E., Elements de la theorie des probabilités, Paris, 1924.
61. Czuber E., Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung, Leipzig und Berlin, 1910.
62. Saaty T. L., Resume of useful formulas in queuing theory, Operations Research, № 2, 1957.
63. Takacs L., Stochastic processes, Problems and solutions, New York, 1962.