(1) $x\sqrt{5+y^2}\,dx + y\sqrt{4+x^2}\,dy = 0$, $\sqrt{5+y^2}\neq 0$, $\sqrt{4+x^2}\neq 0$

$$\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{5+y^2}}dy = 0$$

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{4+x^2}} + \int\frac{y\,dy}{\sqrt{5+y^2}} = 0$$

$\sqrt{4+x^2} + \sqrt{5+y^2} = C$ – заг. інтеграл.

(3) $y' = \dfrac{x+2y-3}{4x-y-3}$

$x = m + a$; $y = n + b$ – заміна. Знайдемо спочатку a і b

$$\begin{cases} a+2b-3=0 \\ 4a-b-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3-2b \\ 4(3-2b)-b-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3-2b \\ 12-8b-b-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$$

Заміна: $x = m+1$; $y = n+1$

$$n' = \frac{m+1+2(n+1)-3}{4(m+1)-(n+1)-3} \Rightarrow n' = \frac{m+2n}{4m-n}$$

$\rceil\, m\neq 0 \Rightarrow n' = \dfrac{1+2\frac{n}{m}}{4-\frac{n}{m}}$

Заміна:

$\frac{n}{m} = u \Rightarrow n = um \Rightarrow n' = u'm + u$

$$u'm + u = \frac{1+2u}{4-u}$$

$$u'm = \frac{1+2u-4u+u^2}{4-u} \Rightarrow u'm = \frac{u^2-2u+1}{4-u}$$

$$\frac{(4-u)du}{(u-1)^2} = dm \Rightarrow \frac{3\,du}{(u-1)^2} - \frac{(u-1)\,du}{(u-1)^2} = dm$$

$$-\frac{3}{u-1}-\ln|u-1|=m+C$$

$$-\frac{3}{\frac{n}{m}-1}-\ln\left|\frac{n}{m}-1\right|=m+C$$

$$-\frac{3m}{n-m}-\ln\left|\frac{n-m}{m}\right|=m+C$$

$$-\frac{3(x-1)}{y-x}-\ln\left|\frac{y-x}{x-1}\right|=x-1+C$$ – загальний інтеграл.

(4) $$y'+\frac{2x}{1+x^2}y=\frac{2x^2}{1+x^2} \quad ; \ y(0)=\frac{2}{3}$$

Запишемо лінійне однорідне рівняння та знайдемо його розв'яз.

$$y'+\frac{2x}{1+x^2}y=0$$

$$y'=-\frac{2x}{1+x^2}y \Rightarrow \frac{dy}{y}=\frac{-2x\,dx}{1+x^2} \Rightarrow$$

$$\ln\left|\frac{y}{c}\right|=-\ln|1+x^2|$$

$$y=\frac{C(x)}{1+x^2}$$ – загальний розв'язок лінійного однорідного

$$y'=\frac{C'(x)\cdot(1+x^2)-2x\cdot C(x)}{(1+x^2)^2}$$

$$\frac{C'(x)\,(1+x^2)-2x\cdot C(x)}{(1+x^2)^2}+\frac{2x\cdot C(x)}{(1+x^2)^2}=\frac{2x^2}{1+x^2}$$

$$\frac{C'(x)\,(1+x^2)}{(1+x^2)^2}=\frac{2x^2}{1+x^2} \Rightarrow C'(x)=2x^2 \Rightarrow C(x)=2x^2+C^*$$

$$y=\frac{\frac{2x^3}{3}+C^*}{1+x^2}$$ Знайдемо C^*

$$\frac{2}{3}=\frac{0+C^*}{1} \Rightarrow C^*=\frac{2}{3} \Rightarrow y_{част.}=\frac{2}{3}\cdot\frac{x^3+1}{x^2+1}.$$

$$⑥\quad 3y' + 2xy = 2xy^{-2}e^{-2x^2}, \quad y(0) = -1$$

$$3y^2y' + 2xy^3 = 2xe^{-2x^2}$$

$$(y^3)' + 2xy^3 = 2xe^{-2x^2}$$

$$y^3 = z$$

$$z' + 2xz = 2xe^{-2x^2}$$

Знайдемо загальний розв'язок лінійного однорідного:

$$z' + 2xz = 0$$

$$\frac{dz}{dx} = -2xz \Rightarrow \frac{dz}{z} = -2x\,dx \Rightarrow \ln\left|\frac{z}{C}\right| = -x^2$$

$z = C(x)\cdot e^{-x^2}$, Знайдемо загальний розв. лінійного неоднорідного:

$$z' = C'(x)\cdot e^{-x^2} + C(x)\cdot e^{-x^2}\cdot(-2x)$$

$$C'(x)\cdot e^{-x^2} + C(x)\cdot e^{-x^2}\cdot(-2x) + 2x\cdot C(x)e^{-x^2} = 2xe^{-2x^2}$$

$$C'(x) = 2xe^{-2x^2}\cdot e^{x^2} \Rightarrow C'(x) = 2x\cdot e^{-x^2} \Rightarrow C(x) = -e^{-x^2} + C^*$$

$$z = (-e^{-x^2} + C^*)\cdot e^{-x^2} = -e^{-2x^2} + C^*\cdot e^{-x^2}$$

$$y^3 = -e^{-2x^2} + C^*\cdot e^{-x^2}$$

Знайдемо сталу C^*, щоб розв'язати задачу Коші і знайти частинний розв'язок

$-1 = 1 + C^*\cdot 1 \Rightarrow C^* = -2$. Отже,

$y = \sqrt{-e^{-2x^2} - 2e^{-x^2}}$ — частинний розв'язок, або розв'язок задачі Коші

(2) $xy' = \dfrac{3y^3 + 6yx^2}{2y^2 + 3x^2}$

оскільки $x \neq 0$ (бо тоді $0 \neq 3$), що поділимо обидві частини на x

$y' = \dfrac{3y^3 + 6yx^2}{2y^2x + 3x^3}$, поділимо чисельник і знаменник на одне і теж x^3

$y' = \dfrac{3\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^3 + 6\cdot\frac{y}{x}}{2\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 3}$

Зробимо заміну $\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$

$u'x + u = \dfrac{3u^3 + 6u}{2u^2 + 3}$

$u'x = \dfrac{3u^3 + 6u - 2u^3 - 3u}{2u^2 + 3} \Rightarrow u'x = \dfrac{u^3 + 3u}{2u^2 + 3}$

$\dfrac{du\,(2u^2+3)}{u^3 + 3u} = \dfrac{dx}{x}$

$\dfrac{u^2\,du}{u(u^2+3)} + \dfrac{(u^2+3)\,du}{u(u^2+3)} = \dfrac{dx}{x}$

$\cancel{\frac{1}{2}\ln(u^2+3}$ $\dfrac{u\,du}{u^2+3} + \dfrac{du}{u} = \dfrac{dx}{x}$

$\frac{1}{2}\ln(u^2+3) + \ln u = \ln|Cx|$

$\ln(u^2+3) + \ln u^2 = \ln(Cx)^2$

$u^2(u^2+3) = (Cx)^2$

$\dfrac{y^2}{x^2}\left(\dfrac{y^2}{x^2} + 3\right) = (C\,x)^2$

$y^2(y^2 + 3x^2) = C^2x^6$

$y\sqrt{y^2 + 3x^2} = Cx^3$ – загальний інтеграл.

7.10

$$\left(\frac{1}{x^2}+\frac{3y^2}{x^4}\right)dx-\frac{2y}{x^3}dy=0$$

$$\left(1+\frac{3y^2}{x^2}\right)dx-\frac{2y}{x}dy=0$$

$$y'=\frac{1+3y^2/x^2}{2y/x}$$

Однорідне р-ня.

$$y=u(x)\cdot x$$

$$u'x+u=\frac{1+\frac{3u^2\cdot x^2}{x^2}}{\frac{2u\cdot x}{x}}$$

$$u'x+u=\frac{1+3u^2}{2u}$$

$$u'x=\frac{u^2+1}{2u}$$

$$\frac{2u}{u^2+1}du=\frac{1}{x}dx$$

$$\int\frac{2u}{u^2+1}du=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\int\frac{2u}{u^2+1}du=\left|\begin{matrix}u^2+1=t\\ dt=2udu\end{matrix}\right|=\int\frac{dt}{t}=\ln t=\ln(u^2+1)$$

$$\ln(u^2+1)=\ln|x|+\ln C$$

$$\ln\frac{u^2+1}{xC}=0$$

$$\frac{u^2+1}{xC}=1\Rightarrow u^2=xC-1$$

Тоді

$$y^2=x^2(xC-1).$$

10.10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2-5n)4^n}$

Дослідимо ряд за ознакою Д'Аламбера.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(x-7)^{2n+1}}{(2n^2-n+2)4^{n+1}} \frac{(2n^2-5n)4^n}{(x-7)^{2n-1}} = \frac{(x-7)^2}{4}$$

Ряд збіжний при $\frac{(x-7)^2}{4} < 1$,

$(x-7)^2 < 4$,

$-2 < x-7 < 2$

$5 < x < 9$

$x \in (+5; 9)$.

Дослідимо збіжність ряду на кінцях відрізка

$x=5$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{2n-1}}{(2n^2-5n)4^n} = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{2^{2n}}{2}}{(2n^2-5n)4^n} = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-10n} \rightarrow$

$x=7$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{(2n^2-5n)4^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-10n} \rightarrow$

Отже, даний ряд збіжний при $x \in [5; 9]$.

16.10

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+3)^n}{n^n}, [-5;-1].$$

Скористаємось ознакою Д'Аламбера.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\,(x+3)^{n+1}\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\, n!(x+3)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x+3}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{x+3}{e}.$$

Тоді шуканим мажорантним рядом буде $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e\,n!(x+3)^n}{2n^n}$.

Дійсно

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x+3}{2}$$

$$\frac{x+3}{2} < 1$$

$$x < -1.$$

Отже, він є збіжним на проміжку $[-5;-1]$ і

$$\frac{n!(x+3)^n}{n^n} < \frac{e\,n!(x+3)^n}{2n^n}, \forall n.$$

Тоді $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+3)^n}{n^n} \rightrightarrows$ на $x \in [-5;-1]$ за ознакою Вейєрштраса.

19.10

$$(\mathrm{ch}\,3x)\big|_{x=0} = 1$$

$$(\mathrm{ch}\,3x)' = \mathrm{sh}\,3x\big|_{x=0} = 0$$

$$(\mathrm{ch}\,3x)'' = (\mathrm{sh}\,3x)' = -\mathrm{ch}\,3x\big|_{x=0} = -1$$

$$(\mathrm{ch}\,3x)''' = 0$$

$$(\mathrm{ch}\,3x)^{IV} = 1$$

$$\mathrm{ch}\,3x = 1 - \frac{3^2x^2}{2!} + \frac{3^4x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^k 3^k x^{2k}}{(2k)!} + \ldots$$

Тоді

$$\frac{\mathrm{ch}3x - 1}{x^2} = -\frac{3^2}{2!} + \frac{3^4\cdot x^2}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^k 3^k x^{2k-2}}{(2k)!} + \ldots$$